

## Заочный тур для 7-9 классов

- 1) Как нагревают воду космонавты на Международной космической станции?
  - А) С помощью обычного чайника.
  - Б) В герметичном котле с помощью газовой горелки.
  - В) **В специальной печи при помощи электромагнитных волн.**
  - Г) Вливая тонкой струйкой концентрированную серную кислоту в сосуд с водой и используя тепло, выделяемое при этой реакции.
  - Д) Космонавты берут с собой в полет запас горячей воды с Земли в термосах.
  
- 2) Почему скафандры космонавтов для работы в открытом космосе имеют пепельно-белый цвет?
  - А) **Такие скафандры лучше отводят падающее солнечное излучение (меньше нагреваются).**
  - Б) Такие скафандры лучше защищают космонавтов от гамма-лучей.
  - В) Чтобы создать атмосферу праздника на Международной космической станции.
  - Г) Это неверно, такие скафандры бывают и других цветов (оранжевый, красный).
  - Д) Чтобы цвета скафандров не создавали ассоциаций с цветами флагов государств.
  
- 3) Выполняются ли закон Паскаля и закон Архимеда на борту Международной космической станции?
  - А) Науке это пока неизвестно! У космонавтов нет времени на проверку всех законов!
  - Б) Оба закона справедливы.
  - В) **Закон Паскаля справедлив, а закон Архимеда нет.**
  - Г) Закон Архимеда справедлив, а закон Паскаля нет.
  - Д) Оба закона не выполняются.
  
- 4) Как современные космонавты возвращаются на Землю с борта Международной космической станции?
  - А) С помощью многоразового транспортного космического корабля (космического челнока).
  - Б) Делают затяжной прыжок на парашютах.
  - В) Используют ракету-носитель вертикальной посадки.
  - Г) Используют космический лифт.
  - Д) **На борту одноразового спускаемого аппарата.**
  
- 5) Что такое «гравитационный маневр»?
  - А) Это маневр, который приходится проделывать космонавтам на Международной космической станции, чтобы попасть из одного модуля в другой.
  - Б) Это термин, используемый в фантастических фильмах.
  - В) Это маневр космического корабля для возвращения на Землю.
  - Г) **Это изменение скорости движения космического аппарата за счет гравитационного поля планеты.**
  - Д) Это перелет космического аппарата между планетами Солнечной системы.
  
- 6) Какая планета Солнечной системы имеет самый массивный спутник по сравнению со своей собственной массой (т.е. отношение массы спутника к массе планеты максимально)?
  - А) **Земля.**
  - Б) Марс.
  - В) Юпитер.
  - Г) Сатурн.

- Д) Нептун.
- 7) 60 лет тому назад (в 1959 году) произошло знаменательное событие для всего человечества. Что это за событие?
- А) Был открыт принцип реактивного движения, что позволило перемещаться в космическом пространстве и запустить человека в космос.
  - Б) Был запущен первый биологический объект в космос. До этого считалось, что ничто живое в космосе и невесомости жить не может.
  - В) Была получена первая фотография обратной стороны Луны. До этого люди видели Луну только с одной стороны.**
  - Г) На Землю упал большой метеорит, что привело к изменению скорости вращения Земли, после чего на Земле началось потепление.
  - Д) Была построена первая многоступенчатая ракета, что позволило достичь второй космической скорости.
- 8) Космонавт на Земле имеет массу тела 75 кг. А какая масса тела у него на борту Международной космической станции, на высоте 400 км над поверхностью Земли?
- А) 0 кг.
  - Б) 150 кг.
  - В) 75 кг.**
  - Г) 84,67 кг.
  - Д) 66,44 кг.
- 9) Космонавты перед запуском часто вешают в кабине космического аппарата небольшую игрушку. Зачем?
- А) Это неправда. Ничего вешать нельзя!
  - Б) Это талисман – его обязательно выбирает себе каждый экипаж.
  - В) Это простейший индикатор наступления невесомости.**
  - Г) Космонавты очень суеверны. Так было у Гагарина, и все повторяют.
  - Д) Это простейший «датчик Земли». С помощью него космонавты определяют направление к Земле.
- 10) Какой космический аппарат улетел дальше всего от Земли?
- А) Первый искусственный спутник Земли, запущенный в 1957 г.
  - Б) Аппарат «Вояджер-1», запущенный в 1977 г.**
  - В) Первый искусственный спутник Солнца, запущенный в 1959 г.
  - Г) Первая космическая станция «Салют», запущенная в 1971 г.
  - Д) Аппарат «Пионер-10», запущенный в 1973 году.

## ЗАДАЧА 1

**Текст задачи.**

*Писать повесть («Мальш») мы начали гораздо позже, в июне 1970, причем вначале основательно перелопатили сюжет Борис Стругацкий. «Комментарии к пройденному»*

03 июля 1970 года было новолуние, а Земля находилась в афелии своей орбиты. На каком расстоянии от Солнца находилась в этот момент Луна? Ответ округлите до сотен тысяч километров.  
**Конец текста задачи.**

**Решение.** В момент новолуния Луна находится в точности на отрезке, соединяющем Землю и Солнце. Земля находилась в афелии своей орбиты, т.е. на расстоянии 152 098 тыс. км от Солнца. Таким образом, расстояние от Луны до Солнца было равно  $152\,098 - d_{з-л}$  тыс. км, где  $d_{з-л}$  – расстояние от Земли до Луны на этот момент. Это расстояние колеблется от 356 до 408 тыс. км, т.е. искомое расстояние лежит между 151 690 до 151 742 тыс. км. В любом случае, при округлении получаем 151 700 тыс. км. На самом деле, Луна находилась в апогее своей орбиты 07 июля 1970 года, т.е. 03 июля 1970 года  $d_{з-л} \approx 390$  тыс. км.

**Ответ:** 151 700 000 км

## ЗАДАЧА 2

### Текст задачи.

*Я подготовил для тебя информацию, начал уже ее кодировать, но тут все так запуталось, что я просто вынужден просить тебя потерпеть еще некоторое время.  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»*

С борта летательного аппарата в Центр управления полетами поступает телеметрическая информация. Датчик напряжения передает информацию 50 раз в секунду. Информация об исправности этого датчика ('1' - исправен, '0' – неисправен) поступает реже (примерно 1 раз в секунду). Предположим, что получен ряд следующего вида:

информационный бит (0 или 1), несколько пропущенных тактов времени (каждый пропущенный такт обозначается символом `\*`), информационный бит и т.д.

Для сокращения объема файлов, этот ряд кодируется. Схема кодирования такова: число '1' информационного бита кодируется как '11', число '0' кодируется как '10', а последовательность (одного или нескольких) символов `\*`, идущих подряд, кодируется `0`. Напишите программу, которая закодированный ряд переводит в ряд, состоящий только из информационных битов.

### Пример

Исходные данные

1\*\*\*1\*\*\*\*0\*\*\*0\*\*\*\*\*1

Данные после кодирования – входные данные для Вашей программы

11011010010011

Выходные данные

11001

Программа должна ввести с клавиатуры число  $N$  в диапазоне от 10 до 100 – количество битов в строке исходных данных, затем ввести с клавиатуры  $N$  чисел 0 или 1 – исходный ряд данных. Программа должна вывести на экран строку выходных данных, состоящую из информационных битов. Проверку корректности введенных исходных данных проводить не надо, т.е. если пользователь вместо чисел `0` и `1` станет вводить нечто другое или введет строку из 0 и 1, которая не допускает раскодирование, то программа имеет право не работать.

Пример (вид экрана после работы программы):

Введите число N:

6

Введите данные:

1

0

0

0

1

0

Ответ: 00

Разрешается использовать языки программирования Python, C, C#, C++, Pascal. Разрешается в качестве ответа представить не саму программу, а только алгоритм, оформленный в виде блок-схемы.

**Конец текста задачи.**

Ответ: текст программы или блок-схема.

### ЗАДАЧА 3

**Текст задачи.**

*«ЭР-два базе, — скороговоркой прочитал он. — Экстренная.  
В квадрате сто два обнаружен потерпевший крушение  
земной корабль типа „Пеликан“ ...  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»*

Участок  $S$  предполагаемой посадки спускаемого аппарата представляет собой квадрат  $ABCD$  со стороной  $a = \dots$  км. Поисковую группу необходимо расположить в точке  $X$  на стороне  $AB$ . Обозначим  $f(X)$  расстояние, которое ей придется преодолеть от точки  $X$  до места посадки при самом неблагоприятном случае (когда аппарат приземлится в наиболее удаленную от  $X$  точку участка  $S$ ). Найдите такую точку (или точки)  $X$ , для которой число  $f(X)$  окажется наименьшим. В ответ запишите длину отрезка  $AX$ .

**Конец текста задачи.**

Варьируемый параметр  $a$  выбирается от 4 до 12 с шагом 1.

Ответ:  $a/2$ .

#### ЗАДАЧА 4

**Текст задачи.**

*Ганса я разбудил, и спросонок он только мычал и мямлил  
какую-то несусветицу про дождь и низкое давление.  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»*

На поверхности планеты измерили атмосферное давление с помощью ртутного барометра. Оказалось, что давление равно  $h = \dots$  мм ртутного столба. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности планеты  $g = 6,7 \text{ м/с}^2$ , а плотность ртути  $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$ , выразите измеренное давление  $p$  в паскалях. Ответ округлите до целых.

**Конец текста задачи.**

**Решение.** Измеренное ртутным барометром атмосферное давление равно давлению, которое оказывает на дно сосуда столбик ртути высотой  $h$  мм. Таким образом,  $p = \rho gh$ .

Варьируемый параметр  $h$ . Диапазон изменения от 580 до 620 мм с шагом 2 мм. Расчетная формула  
$$p = 91,12 \cdot h.$$

## ЗАДАЧА 5

### Текст задачи.

*Некоторое время я стоял, засунув руки глубоко в карманы дохи, и смотрел, как трудятся мои ребяташки. За ночь они поработали на славу Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»*

Стась получил задание с помощью команды роботов проложить дорогу между девятью пунктами. В качестве тестового алгоритма Стась присвоил пунктам номера от 1 до 9 и дал команду прокладывать дорогу от пункта  $a$  к пункту  $b$  тогда и только тогда, когда двузначное число, составленное из цифр  $a$  и  $b$ , делится на 3. Можно ли при таких условиях добраться по дорогам от пункта 1 до пункта 9 (возможно, проходя через пункты с другими номерами)? Дайте подробное объяснение.

### Конец текста задачи.

Ответ: принимается в текстовом виде, проверяется вручную.

## ЗАДАЧА 6

### Текст задачи.

*Я прищурился и стал смотреть на айсберг.  
Он торчал над горизонтом гигантской глыбой сахара,  
сляпяще-белый иззубренный клык, очень холодный, очень неподвижный, очень цельный...  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»*

Космонавты, оказавшись на полюсе планеты, ощутили  $n\%$  потерю в весе (по сравнению с весом на Земле), где  $n = \dots$ . Сила тяжести тела массой  $m$  на планете массой  $M$  и радиуса  $R$  вычисляется по формуле  $F = G \frac{Mm}{R^2}$ , где  $G$  – гравитационная постоянная. Определите среднюю плотность вещества, из которого состоит планета, если ее радиус в 2 раза меньше радиуса Земли. Планету и Землю считайте шарами. Среднюю плотность Земли считайте равной  $\rho_3 = 5,52 \text{ г/см}^3$ . Ответ дайте в  $\text{г/см}^3$ , округлите до двух знаков после запятой.

### Конец текста задачи.

Варьируемый параметр  $n$  выбирается от 6 до 12 с шагом 1.

Ответ проверяется автоматически по формуле  $\rho_{\text{планеты}} = 2\rho_3 \left(1 - \frac{n}{100}\right)$ .

## ЗАДАЧА 7

### Текст задачи.

*Покажите ему вычислитель, Стась, расскажите, как он действует, попробуйте считать с ним наперегонки. Думаю, здесь ожидает вас некоторый сюрприз...*  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Взяли число  $a_1 = \dots$ , возвели в квадрат, сложили все цифры у полученного числа и прибавили 1 – получили число  $a_2$ . С этим числом проделали то же самое – получили число  $a_3$  и т.д. Например, если  $a_1 = 7$ , то  $(a_1)^2 = 49$ , т.е.  $a_2 = 4 + 9 + 1 = 14$ . Тогда  $(a_2)^2 = 196$ , т.е.  $a_3 = 1 + 9 + 6 + 1 = 17$  и т.д. Чему равно  $a_{1970}$ ?

### Конец текста задачи.

Варьируемый параметр  $a_1$  выбирается от 12 до 32 с шагом 10 (всего три варианта). Ответ: 8 (во всех вариантах).

## ЗАДАЧА 8

### Текст задачи.

*Скалы эти тянулись вдоль всего побережья, насколько хватал глаз,  
а над скалами в безоблачном, но тоже безрадостном ледяном серо-лиловом небе  
всходило крошечное негреющее лиловатое солнце.  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»*

Высота полуденного Солнца в день летнего солнцестояния в некотором пункте на Земле составила  $h = \dots$  градусов, причем Солнце находилось «на юге». Какова широта места наблюдений? Ответ округлите с точностью до целых градусов.

### Конец текста задачи.

Варьируемый параметр  $h$  выбирается от 25,6 до 75,6 с шагом 10. Ответ проверяется автоматически по формуле  $90 - h + 23,5$ .

## Заочный тур для 10-11 классов

- 1) Астроном на Земле в течение нескольких дней наблюдает комету на небесной сфере. Какой может оказаться траектория движения этой кометы относительно Солнца?
  - А) Комета будет двигаться строго по прямой.
  - Б) Траектория движения будет довольно сложной кривой, полученной наложением двух движений: кометы и Земли.
  - В) Траектория движения всегда представляет собой часть эллипса.
  - Г) Траектория движения представляет собой либо часть эллипса, либо часть параболы.
  - Д) **Траектория движения представляет собой либо часть эллипса, либо часть параболы, либо часть гиперболы.**
  
- 2) Как нагревают воду космонавты на Международной космической станции?
  - А) С помощью обычного чайника.
  - Б) В герметичном котле с помощью газовой горелки.
  - В) **В специальной печи при помощи электромагнитных волн.**
  - Г) Вливая тонкой струйкой концентрированную серную кислоту в сосуд с водой и используя тепло, выделяемое при этой реакции.
  - Д) Космонавты берут с собой в полет запас горячей воды с Земли в термосах.
  
- 3) Почему скафандры космонавтов для работы в открытом космосе имеют серебристый цвет?
  - А) **Такие скафандры лучше отводят падающее солнечное излучение (меньше нагреваются).**
  - Б) Такие скафандры лучше защищают космонавтов от гамма-лучей.
  - В) Чтобы создать атмосферу праздника на Международной космической станции.
  - Г) Это неверно, такие скафандры бывают и других цветов (оранжевый, красный).
  - Д) Чтобы цвета скафандров не создавали ассоциаций с цветами флагов государств.
  
- 4) Выполняются ли закон Паскаля и закон Архимеда на борту Международной космической станции?
  - А) Науке это пока неизвестно! У космонавтов нет времени на проверку всех законов!
  - Б) Оба закона справедливы.
  - В) **Закон Паскаля справедлив, а закон Архимеда нет.**
  - Г) Закон Архимеда справедлив, а закон Паскаля нет.
  - Д) Оба закона не выполняются.
  
- 5) Все планеты в Солнечной системе движутся по эллипсам. Почему же тогда на звездных картах изображают только путь движения Солнца относительно Земли – эклиптику, и не изображают пути движения других планет?
  - А) Положение эклиптики относительно звезд меняется очень медленно, а путь планет, наоборот, перемещается по всей звездной карте. Поэтому изображать его бесполезно.
  - Б) На некоторых картах эти пути изображают, а на некоторых – нет, чтобы не загромождать карты.
  - В) **Потому, что эти пути для всех планет (кроме Плутона) близки к эклиптике.**
  - Г) Потому, что эти пути для всех планет (кроме Плутона) с точки зрения земного наблюдателя совпадают с небесным экватором.
  - Д) Потому, что планеты не меняют своего положения на небесной сфере.
  
- 6) Как отводится тепло с борта Международной космической станции?

- А) Нагретый воздух периодически сбрасывается в космическое пространство через специальный клапан.
- Б) Охлаждающая система постоянно проводит эндотермические химические реакции.
- В) Никакой специальной системы не нужно – станция охлаждается сама, поскольку за бортом станции очень холодно.
- Г) С помощью тепловой панели, установленной на стене станции и излучающей тепло в космическое пространство.**
- Д) С помощью обычной форточки.
- 7) В каких точках на поверхности Земли можно наблюдать на небесной сфере южный полюс мира?
- А) Во всех точках, находящихся южнее северного полярного круга (и только в них).
- Б) Во всех точках, находящихся южнее северного тропика (и только в них).
- В) Во всех точках, находящихся южнее экватора (и только в них).**
- Г) Во всех точках, находящихся южнее южного тропика (и только в них).
- Д) Во всех точках самого южного материка – в Антарктиде (и только в них).
- 8) Астроном наблюдает восход Солнца на южном полюсе. В какой момент Земля пройдет точку равноденствия?
- А) В тот момент, когда он увидит верхний край Солнца.
- Б) В тот момент, когда он увидит центр Солнца.
- В) В тот момент, когда он увидит все Солнце целиком.
- Г) Немного ранее того момента, когда он увидит центр Солнца (вследствие атмосферной рефракции света).
- Д) Немного позднее того момента, когда он увидит центр Солнца (вследствие атмосферной рефракции света).**
- 9) Можно ли в космическом пространстве вдали от планет увидеть человеческим глазом радугу?
- А) Нет, это невозможно, потому что нет среды, где свет может преломиться или отразиться.**
- Б) Да, это настолько же частое явление, как и на Земле
- В) Можно, если использовать два пересекающихся направленных пучка лучей.
- Г) Можно, если смотреть в направлении от Солнца.
- Д) Можно, но только вблизи двойных, примерно одинаковых по массе и размерам, звезд.
- 10) Может ли спутник, двигаясь по орбите в системе двух тел Земля-Луна, стать неподвижным относительно центра Земли (точнее, относительно барицентра системы Земля-Луна)?
- А) Да, если спутник находится в точке либрации.**
- Б) Нет, это невозможно.
- В) Таких примеров много: все спутники связи на геостационарной орбите неподвижны относительно Земли.
- Г) Да, все навигационные спутники неподвижны относительно Земли.
- Д) Да, но только на короткий период времени 5 – 10 минут.

## ЗАДАЧА 1

### Текст задачи.

*Я понял только, что Комову позарез нужны данные относительно игрек-фактора для двуноormalьного гуманоида с четырехэтажным индексом, состоящим в общей сложности из девяти цифр и четырнадцати греческих букв.*  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш».

Переданные из Центрального информатория данные (восемь натуральных, не обязательно различных чисел) были зашифрованы в виде уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_8.$$

Восстановите код, если известно, что  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_8$ .

В ответ запишите все числа подряд без пробелов и запятых от первого до восьмого. Если ответов несколько, разделите эти ответы между собой пробелами.

**Конец текста задачи.**

Ответ: 1111223 1111128

## ЗАДАЧА 2

### Текст задачи.

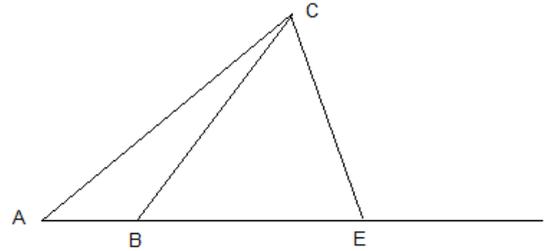
*Том опять остановился.*

*Я раздражено ткнул пальцем в клавишу контрольного вызова.*

*Сигнал задержки сейчас же погас и вспыхнул рубиновый огонек:  
«У нас все в порядке, выполняем задание. Нет ли новых указаний?»*

*Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш».*

Строительный робот Том движется по маршруту  $A \rightarrow B \rightarrow C$ . Из-за сбоя программы в точке  $B$  он не повернул к точке  $C$ , а продолжил ехать прямо, проехав от точки  $B$  расстояние в два раза большее  $AB$  и остановился в точке  $E$ . Получив команду на исправление маршрута, Том тут же повернул к точке  $C$ . На какой угол повернул Том в точке  $E$ , если угол  $BAC = 45^\circ$ , а угол  $BCA = 15^\circ$ . В ответ запишите число градусов.



### Конец текста задачи.

**Решение:** Угол  $ABC$  равен  $120$  градусов, угол  $CBE$   $60$ . На отрезке  $BC$  отметим точку  $O$  так, что  $BO=AB$ . Тогда треугольник  $AOB$  равнобедренный, углы  $BAO$  и  $BOA$  по  $30$  градусов. Тогда угол  $OAC$  равен  $15$  градусов, т.е. треугольник  $AOC$  тоже равнобедренный, т.е.  $AO=OC$ . Отметим точку  $D$  на середине отрезка  $BE$ . Тогда треугольник  $OBD$  равнобедренный с углом  $60$  при вершине, т.е. равносторонний, т.е.  $OD=BD=DE$ . Тогда треугольники  $ODE$  и  $OBA$  равны, т.е. угол  $DEO$  равен  $30$  градусов, а  $OE=OA$ . Тогда треугольник  $AOE$  равнобедренный, угол  $AOE$  равен  $120$  градусов. Угол  $AOC=180-15-15=150$  градусов. Тогда угол  $EOC=90$ . Кроме того,  $OE=OC$ , т.е. треугольник  $EOC$  равнобедренный, а значит, угол  $OEC$  равен  $45$ . Искомый угол  $AEC=AEO+OEC=30+45=75$ .

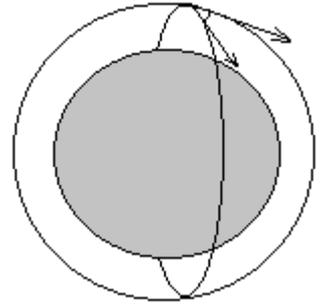
**Ответ:** 75.

### ЗАДАЧА 3

#### Текст задачи.

*Мы принялись обшаривать околопланетное пространство.  
И вот два часа назад пришло сообщение, что он, наконец, обнаружен.  
Спутник-автомат, что-то вроде вооруженного часового.  
Судя по некоторым деталям конструкции, его установили здесь Странники.  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш».*

Искусственный спутник массой  $m$  кг движется вокруг планеты по круговой орбите радиусом  $R = 6700$  км. В результате маневра, осуществленного с помощью кратковременной работы бортового навигационного двигателя, плоскость орбиты спутника повернулась на угол  $\alpha = 40^\circ$ , а радиус орбиты не изменился. Каков модуль вектора  $\overline{\Delta p}$  изменения импульса спутника, произошедшего при этом маневре? Массу планеты примите равной  $M = 6 \cdot 10^{24}$  кг, а гравитационную постоянную  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>. Ответ приведите в кг·м/с, округлив до целых.



#### Конец текста задачи.

Варьируемый параметр  $m$  выбирается от 100 до 200 кг с шагом 10 кг.

**Решение.** По второму закону Ньютона уравнение движения спутника орбите радиусом  $R$  имеет вид  $\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}$ . Отсюда скорость движения спутника по орбите  $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ , а

модуль его импульса  $p_0 = m\sqrt{\frac{GM}{R}}$ . По теореме косинусов,  $\Delta p = 2p_0 \sin \frac{\alpha}{2}$ .

**Ответ:**  $\Delta p = 2m\sqrt{\frac{GM}{R}} \sin \frac{\alpha}{2}$

Расчетная формула  $|\Delta p| = 5298,5532767 \cdot m$ .

## ЗАДАЧА 4

### Текст задачи.

*Планета невидимок.*

*Да, наверное, любопытные вещи можно было бы здесь увидеть,  
если бы Комов разрешил запустить сторожа-разведчика.*

Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Какой максимальной массой  $m_{max}$  может обладать космический зонд сферической формы радиусом  $r$  м, чтобы он мог плавать в атмосфере исследуемой планеты? Примите, что атмосфера состоит из газа со средней молярной массой  $M = 44$  г/моль., причем давление у поверхности  $p_0 = 9$  МПа, а температура  $t = 527^\circ$  С. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К). Ответ приведите в килограммах, округлив до двух знаков после запятой.

### Конец текста задачи.

Варьируемый параметр  $r$ . Диапазон изменения от 0,1 до 0,2 м с шагом 0,01 м.

**Решение.** По закону Архимеда зонд будет плавать при выполнении условия  $mg = \rho g V$ , где

$g$  – ускорение свободного падения у поверхности планеты,  $\rho = \frac{p_0 M}{RT}$  – плотность

атмосферы планеты,  $T = t + 273$  К – абсолютная температура атмосферы,  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  – объем

зонда.

**Ответ:**  $m_{max} = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{p_0 M}{RT}$ .

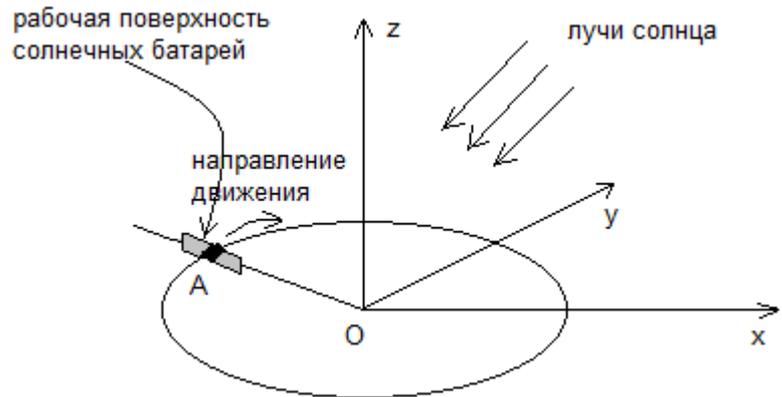
Расчетная формула  $m_{max} = 249,76656 \cdot r^3$ .

## ЗАДАЧА 5

### Текст задачи.

— Лева спит, — говорю я.  
— У нас тут сейчас ночь, вернее, ночное время бортовых суток.  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»

Летательный аппарат вращается вокруг планеты по круговой орбите. Примем планету за материальную точку, расположенную в точке  $O(0,0,0)$ , радиус орбиты  $R = 1$ , а плоскость орбиты совпадающей с плоскостью  $Oxy$ . Известно, что аппарат ориентирован так, что его солнечные батареи (два прямоугольника) в каждый момент времени расположены в плоскости, содержащей луч  $AO$  ( $A$  – точка, в который находится



центр масс аппарата) и перпендикулярной плоскости орбиты. При этом стороны прямоугольников параллельны лучам  $AO$  и  $Oz$ . Будем считать, что солнце находится настолько далеко от планеты, что вектор, направленный на солнце одинаков во всех точках орбиты. Известно, что он имеет координаты  $\vec{s} = (1, y, 1)$ . В какой точке орбиты энергия  $E$ , вырабатываемая солнечными батареями, максимальна? Примите, что  $E = k \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол падения солнечных лучей на батарею, а  $k$  – константа. Солнечные батареи считайте односторонними, а направление вращения аппарата:  $(0,1,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (0,-1,0) \rightarrow (-1,0,0) \rightarrow \dots$ . В ответе укажите тангенс угла между векторами  $\vec{OA}$  и  $(1,0,0)$ , округлив его до 2 знаков после запятой.

**Конец текста задачи.**

Варьируемый параметр  $y$  выбирается от 1 до 5 с шагом 1.

**Ответ:** Ток максимален тогда, когда максимален угол между вектором  $\vec{s}$  и плоскостью батарей, т.е. когда минимален угол между вектором  $\vec{s}$  и вектором  $\vec{n}$  нормали к плоскости батарей. Пусть  $\varphi$  - угол между векторами  $(1,0,0)$  и  $\vec{OA}$ , измеряемый от первого вектора ко второму против часовой стрелки (полярный угол). Тогда  $\vec{OA} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ , а  $\vec{n} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$ . Угол между вектором  $\vec{s}$  и вектором  $\vec{n}$  минимален тогда, когда максимально их скалярное произведение

$$(\vec{s}, \vec{n}) = \sin \varphi - y \cos \varphi \rightarrow \max \Leftrightarrow \cos \varphi + y \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{y}.$$

Ответ проверяется автоматически подстановкой в формулу  $-\frac{1}{y}$ .

## ЗАДАЧА 6

### Текст задачи.

*А сейчас ответь мне: что вверху?  
Ты вчера сказал: звезды. Что такое звезды?  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»*

Двойная звезда, разрешаемая только с помощью телескопа, состоит из двух компонент. Одна ярче другой в 2,5 раза. Самая яркая компонента имеет визуальную звездную величину равную 0. Какова визуальная звездная величина этой системы при наблюдении невооруженным глазом? Ответ округлите до двух знаков после запятой.

### Конец текста задачи.

**Ответ:** -0,36 или -0,37 (оба числа допускаются).

**Решение:** Пусть  $m_1, m_2, m_\varepsilon$  – звездные величины первой (более яркой) звезды, второй звезды и двойной звезды соответственно, а  $L_1, L_2, L_\varepsilon = L_1 + L_2$  – светимости объектов в визуальном диапазоне. Тогда  $m_1 = 0$ , а

$$m_\varepsilon = m_\varepsilon - m_1 = -2,5 \log_{10} \frac{L_\varepsilon}{L_1} \approx -0,36.$$

## ЗАДАЧА 7

### Текст задачи

*Уже с порога рубки я увидел, что имеет место ЧП.  
Все три рабочих экрана на моем пульте показывали полный останов.  
Киберов кто-то увел...  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Малыш»*

Стась задал строительному роботу программу для выполнения работ. В частности, программа содержала подпрограмму, задающую движение робота. Эта программа движений представляла собой строку, состоящую из чисел 1 и (-1). Движения робота проходили вдоль прямой, число 1 означало команду «сделать один шаг вправо», а число (-1) – «сделать один шаг влево». Дойдя до конца строки, робот переходил к ее началу и циклически повторял движения. Например, строка команд  $11(-1)1(-1)(-1)$  означало «два шага вправо, шаг влево, шаг вправо, два шага влево, два шага вправо, шаг влево, шаг вправо, два шага влево, два шага вправо и т.д.».

Однако в программе произошел сбой. По неизвестным причинам (Стась подозревает, что робота перепрограммировал Малыш) в какой-то момент (этот момент не известен) робот начал удваивать число шагов с каждым тактом времени. Причем робот прочел всю строку команд; затем, как и положено, перешел к началу строки, продолжил выполнение (по-прежнему, удваивая число шагов), дошел до того такта, на котором произошел сбой, и здесь остановился.

Например, если строка команд имеет вид  $11(-1)1(-1)(-1)$ , а сбой произошел на третьем такте, то, начиная с этого такта робот двигался так: «один шаг влево, 2 шага вправо, 4 шага влево, 8 шагов влево, 16 шагов вправо, 32 шага вправо, остановка».

Пусть в момент сбоя робот находился в точке  $A$ , а в момент остановки оказался в точке  $B$ . Например, в приведенном выше примере точка  $B$  оказалась в  $-1 + 2 - 4 - 8 + 16 + 32 = 37$  шагах правее точки  $A$ . На деле, робот оказался так далеко от строительной площадки, что Стась его не видит. Помогите Стасю найти робота! Определите, какое максимальное значение может принять длина отрезка  $AB$ .

#### Входные данные.

Вначале программа должна считать с клавиатуры натуральное число  $N$  в диапазоне от 10 до 40 – длина строки. Затем надо ввести с клавиатуры  $N$  чисел 1 или (-1).

#### Выходные данные.

Программа должна вывести одно натуральное число – максимально возможную длину отрезка  $AB$ .

Пример (вид экрана после работы программы):

Введите число N

6

Введите данные

1

1

-1

1

-1

-1

Ответ: 41.

Действительно, если сбой произошел в первый такт времени, то  $AB = |1 + 2 - 4 + 8 - 16 - 32| = 41$ . Если сбой произошел на втором такте, то  $AB = |1 - 2 + 4 - 8 - 16 + 32| = 11$ . Для третьего такта  $AB = |-1 + 2 - 4 - 8 + 16 + 32| = 37$  (мы это уже считали). Для четвертого:  $AB = |1 - 2 - 4 + 8 + 16 - 32| = 13$ , для пятого  $AB = |-1 - 2 + 4 + 8 - 16 + 32| = 25$ , а для шестого  $AB = |-1 + 2 + 4 - 8 + 16 - 32| = 19$ . Максимальная длина равна 41.

Напишите программу на Вашем любимом языке программирования.

#### Конец текста задачи.

Ответ: загруженный программный код.

## ЗАДАЧА 8

### Текст задачи.

*Они все притворяются, будто мы уже овладели космосом, будто мы в космосе как дома. Неверно это. И никогда это не будет верно. Космос всегда будет космосом, а человек всегда остается всего лишь человеком.*  
Аркадий и Борис Стругацкие. «Мальш»

Размер наблюдаемой части космоса составляет 4 Гпк. Оцените среднюю плотность вещества в пространстве в  $\text{кг}/\text{м}^3$ , если считать, что этого вещества достаточно, чтобы наблюдаемая Вселенная оставалась гравитационно связанной. Дайте развернутый ответ.

### Конец текста задачи.

**Ответ:**  $1,1 \cdot 10^{-26} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

**Решение:** Свет шел от наблюдаемой границы Вселенной -  $4 \cdot 10^9 \cdot 3,26 = 1,3 \cdot 10^{10}$  лет

Считая, что расширение линейно, найдем значение постоянной Хаббла:

$$c = HR \Rightarrow H = \frac{c}{R} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ км/с}}{4 \cdot 10^3 \text{ Мпк}} = 75 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$$

Скорость убегания на границе наблюдаемой Вселенной равна 2-ой космической, следовательно,

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi R^2 G \rho_{\text{кр}}} = HR \Rightarrow \rho_{\text{кр}} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3 \cdot \left(75 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}\right)^2}{8 \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,1 \cdot 10^{-26} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

## Вариант 1

1. Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномерно двигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые две минуты. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 10 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?

**Решение.** Пусть  $v_1$  м/мин – скорость первого тела,  $v_2$  м/мин – скорость второго тела. При движении в разные стороны они сближаются со скоростью  $v_1 + v_2$ , а при движении в одну сторону – сближаются со скоростью  $v_1 - v_2$ . Пусть  $L$  – длина окружности. Тогда  $\frac{L}{v_1+v_2} = 2$  мин – время между встречами при движении в разных направлениях, а  $\frac{L}{v_1-v_2} = 10$  минут – время, за которое первое тело догоняет второе.

Получим систему уравнений: 
$$\begin{cases} \frac{L}{v_1+v_2} = 2 \\ \frac{L}{v_1-v_2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 + 2v_2 = L \\ 10v_1 - 10v_2 = L \end{cases} \quad \text{Отсюда}$$

$$v_1 = 0,3L, \quad v_2 = 0,2L.$$

Тогда первое тело проходит окружность за  $\frac{L}{0,3L} = \frac{10}{3}$  минут, второе тело – за  $\frac{L}{0,2L} = 5$  минут.

Разница составляет  $300 - 200 = 100$  секунд.

**Ответ:** 100 секунд.

**Ответы к другим вариантам:** 360, 270, 450.

**Критерии проверки:**

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

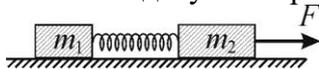
+ (8 баллов) – при верной логике решения допущена арифметическая ошибка (например, при переводе минут в секунды);

± (6 баллов) – верно найдено соотношение между скоростями, дальше ошибки или решение не доведено до конца;

∓ (3 балла) – верно составлена система, дальше ошибки или не доведено до конца или задача решена в частном случае.

– (0 баллов) – все остальное.

2. Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 2$  кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью  $k = 100$  Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками  $\mu = 0,1$ . Какую минимальную работу  $A$  нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



**Решение.** Пусть брусок массы  $m_2$  переместили вдоль поверхности стола на расстояние  $x$ . Для того, чтобы мог сдвинуться брусок массы  $m_1$ , необходимо выполнение условия  $kx = \mu m_1 g$ , откуда  $x = \frac{\mu m_1 g}{k}$ . Искомая работа будет минимальной, если кинетической энергии оба бруска не приобретают. В этом случае искомая работа затрачивается только на преодоление трения и сообщение энергии растянутой пружины:  $A = \mu m_2 g x + \frac{kx^2}{2}$ . Из записанных соотношений следует, что

$$\text{величина минимальной работы равна } A = \frac{\mu^2 g^2 m_1}{k} \left( m_2 + \frac{m_1}{2} \right).$$

**Ответ:**  $A = 0,025$  Дж.

**Ответы к другим вариантам:** 0,022; 0,027; 0,084.

**Критерии проверки:**

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

± (6 баллов) – верно найдено смещение, найдена работа, но в формуле для работы «потеряна»  $\frac{1}{2}$  **или** формулы верные, но есть арифметическая ошибка;

∓ (3 балла) – верно найдено смещение правого бруска, дальше ошибки или решение не доведено до конца;

– (0 баллов) – все остальное.

3. Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:

«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу  $N$  находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны  $N$ . Программа должна ввести с клавиатуры число  $N$  и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»

Пример работы программы:

Введите  $N$

10

Ответ

3 7

**Критерии проверки:** тестируется программа.

4. На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 3 раза, а другого в 8 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное  $P = 7,5$  Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

**Решение.** Обозначим  $\rho$  – плотность воды, тогда плотности металлов равны соответственно  $3\rho$  и  $8\rho$ . Пусть масса первого металла равна  $x$ , тогда второго:  $1 - x$ .

Значит, объемы металлов равны  $V_1 = \frac{x}{3\rho}$  и  $V_2 = \frac{1-x}{8\rho}$ . Из закона Архимеда следует:

$(V_1 + V_2)\rho g = mg - P = \Delta P = 2,5$ , где  $m = 1$  кг – масса сплава. Получаем уравнение:  $\left(\frac{x}{3} + \frac{1-x}{8}\right) \cdot 10 = 2,5$ , откуда  $x = 0,6$ .

**Ответ:** 0,6.

**Ответы к другим вариантам:** 0,64; 0,55; 0,75.

**Критерии проверки:**

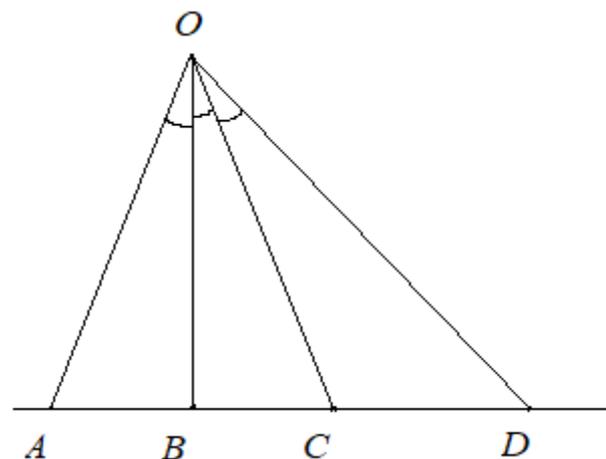
+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

+ (8 баллов) – при верной логике решения ответ неверный вследствие арифметической ошибки;

± (6 баллов) – верно составлено уравнение, дальше ошибки или решение не закончено;

– (0 баллов) – все остальное.

5. Расположенный в точке  $O$  радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол  $\alpha$  для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках  $A, B, C, D$ , расположенных в указанном порядке. Известно, что точка  $B$  находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара,  $OB = 2$ ,  $OC = \sqrt{5}$ . Найдите расстояние  $AD$ .



**Решение.**  $OB$  – биссектриса и высота в треугольнике  $AOC$ , следовательно, этот треугольник равнобедренный. Значит,  $AO = OC = \sqrt{5}$ ,  $AB = BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = 1$ . Обозначим  $CD = x$ .  $OC$  – биссектриса в треугольнике  $BOD$ , значит, по свойству биссектрисы:  $\frac{BC}{CD} = \frac{OB}{OD}$ , откуда  $OD = 2x$ . По теореме Пифагора для треугольника  $BOD$ :  $4 + (x + 1)^2 = (2x)^2$ . Отсюда  $3x^2 - 2x - 5 = 0$ ,  $x_1 = -1, x_2 = 5/3$ . Отрицательный корень не подходит, следовательно,  $AD = 1 + 1 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$ .

**Ответ:**  $11/3$ .

**Ответы к другим вариантам:**  $46/5$ ;  $47/15$ ;  $13/4$ .

**Критерии проверки:**

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

+ (8 баллов) – при верной логике решения ответ неверный вследствие арифметической ошибки;

$\pm$  (6 баллов) верно найдены все элементы равных прямоугольных треугольников и есть свойство биссектрисы, но ответ не получен;

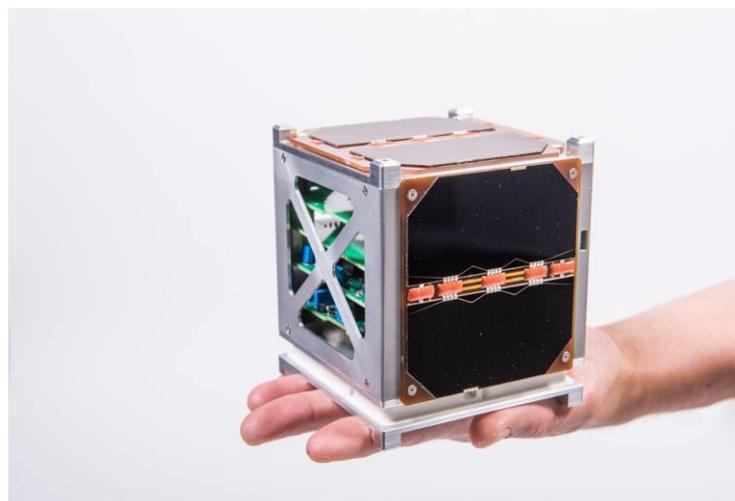
$\mp$  (3 балла) – верно найдены все элементы равных прямоугольных треугольников, дальней ошибки или решение не закончено;

– (0 баллов) – все остальное.

6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?

б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника



опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.

**Решение.**

а) И космонавт, и спутник в его руках уже имеют скорость относительно центра Земли, равную скорости станции, и, как и вся станция, движутся по круговой орбите. Поскольку космонавт не придает спутнику никакой дополнительной скорости, то спутник, предоставленный сам себе, продолжит движение по той же самой орбите. Вернувшись на станцию, космонавт еще долго будет наблюдать «висящий» за бортом спутник. Такая ситуация является, естественно, нежелательной, поскольку различные дополнительные факторы (в первую очередь, непостоянство поля тяготения Земли) могут вызвать малое отклонение траектории движения станции и привести к столкновению.

б) Ясно, что сил космонавта не хватит, чтобы увеличить скорость спутника с первой космической до второй. Значит, спутник, как и станция, будет двигаться по замкнутой эллиптической орбите вокруг Земли. При этом поскольку космонавт придал спутнику дополнительную скорость, направленную по касательной к окружности (орбита станции), т. е. по вектору, направленному вонне окружности, то спутник в первые секунды полета окажется на более высокой орбите. Кроме того, мы уже знаем, что эта эллиптическая орбита касается круговой орбиты МКС в точке запуска спутника. Теперь заметим, что касание эллипса и окружности с центром в фокусе этого эллипса может осуществляться только в двух точках – перигее и апогее эллиптической орбиты. Действительно, если тело движется по эллиптической орбите за пределами окружности, а затем касается этой окружности, то после касания тело вновь окажется вне окружности (эллипс – выпуклая кривая). Значит, это тело вначале приближалось, а затем отдалялось от центра окружности – фокуса эллипса, т. е. точка касания была перигеем орбиты. Итак, единственной общей точкой орбиты спутника и орбиты МКС будет та самая точка, в которой космонавт осуществил запуск, т.е. спутник и МКС вновь сблизятся после одного витка. Однако опасность столкновения со спутником, станции не грозит, т. к. в точку касания орбит тела придут в разное время. Скорость броска руки человека (4-6 м/с) очень мала по сравнению со скоростью станции (примерно 8 км/с), а значит, эллиптическая орбита спутника будет близка к круговой. Считая орбиту спутника близкой к круговой, можем записать равенство  $R\omega^2 = g$ , где  $R$  – радиус орбиты,  $\omega$  – угловая скорость, а  $g$  – ускорение свободного падения. Знаем, что с удалением от Земли сила тяжести уменьшается, т. е. уменьшается величина  $g$ . Радиус при этом увеличивается, а значит, угловая скорость уменьшается. Поскольку мы уже знаем, что орбита спутника в целом выше орбиты станции, то угловая скорость спутника меньше угловой скорости станции. Тогда период обращения спутника  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  по орбите больше периода обращения станции. Итак, после одного витка спутник придет в точку соприкосновения орбит позже станции и столкновение не произойдет. При следующих витках спутник продолжит отставать от станции и столкновение теоретически возможно только после нескольких витков, когда спутник отстанет от станции «на круг». Однако за это время различные дополнительные факторы (в первую очередь прецессия орбиты) вызовут отклонение траектории станции и вероятность столкновения пренебрежимо мала.

**Критерии проверки (по баллам, максимум = 10 баллов):**

а) 1 балл – понимает, что спутник сохраняет орбиту МКС;

1 балл – обосновывает предыдущее утверждение;

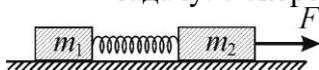
1 балл – понимает потенциальную опасность при маневрах МКС.

б) 1 балл – понимает, что орбита – эллипс;

- 1 балл – понимает, что орбита спутника будет выше орбиты МКС;
- 1 балл – понимает, что есть одна точка касания орбит;
- 1 балл – понимает, что время обращения спутника больше;
- 1 балл – делает вывод о безопасности;
- 1 балл – обосновывает первые три утверждения;
- 1 балл – представлено грамотное и логичное изложение своих мыслей (по сумме пунктов).

## Вариант 2

1. Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномерно двигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые четыре минуты. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 12 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?
2. Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 1,5$  кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью  $k = 110$  Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками  $\mu = 0,11$ . Какую минимальную работу  $A$  нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



3. Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:

«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу  $N$  находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны  $N$ . Программа должна ввести с клавиатуры число  $N$  и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»

Пример работы программы:

Введите  $N$

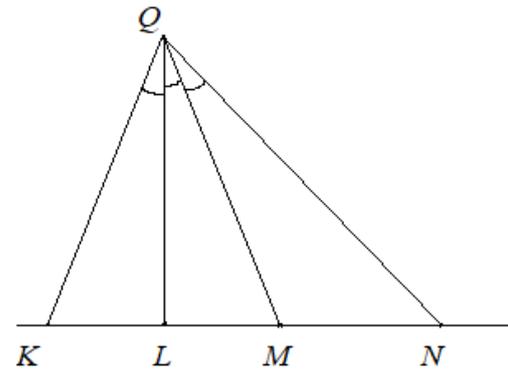
10

Ответ

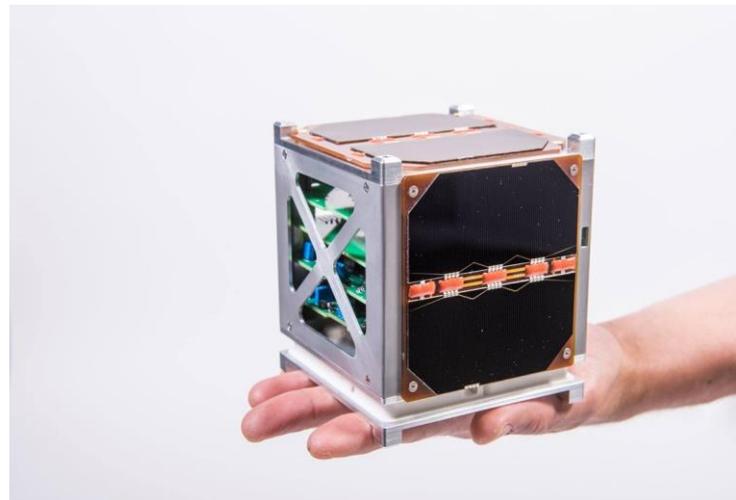
3 7

4. На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 4 раза, а другого в 9 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное  $P = 8$  Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

5. Расположенный в точке  $Q$  радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол  $\alpha$  для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках  $K, L, M, N$ , расположенных в указанном порядке. Известно, что точка  $L$  находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара,  $QK = \sqrt{13}$ ,  $LM = 2$ . Найдите расстояние  $KN$ .



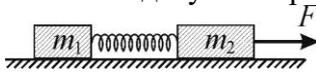
6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.
- а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?



- б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.

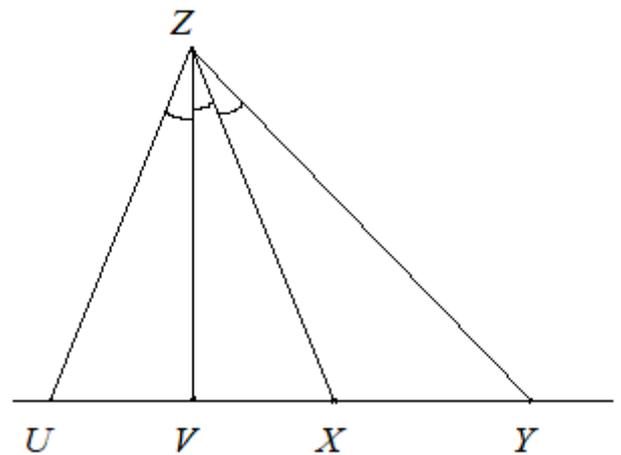
### Вариант 3

1. Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномерно двигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые три минуты. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 9 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?
2. Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 2,5$  кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью  $k = 90$  Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками  $\mu = 0,09$ . Какую минимальную работу  $A$  нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



3. Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:  
«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу  $N$  находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны  $N$ . Программа должна ввести с клавиатуры число  $N$  и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»  
Пример работы программы:  
Введите  $N$   
10  
Ответ  
3 7
4. На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 2 раза, а другого в 6 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное  $P = 6,5$  Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

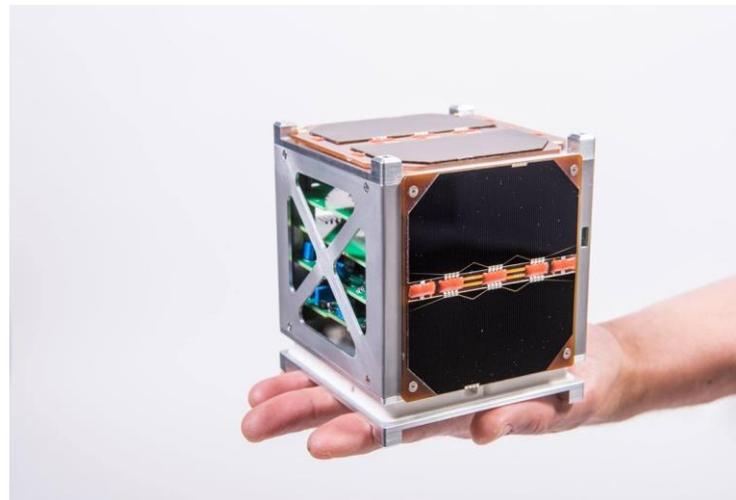
5. Расположенный в точке  $Z$  радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол  $\alpha$  для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках  $U, V, X, Y$ , расположенных в указанном порядке. Известно, что точка  $V$  находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара,  $UV = 1$ ,  $ZX = \sqrt{17}$ . Найдите расстояние  $UY$ .



6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

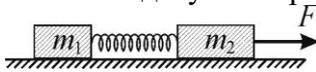
а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?

б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.



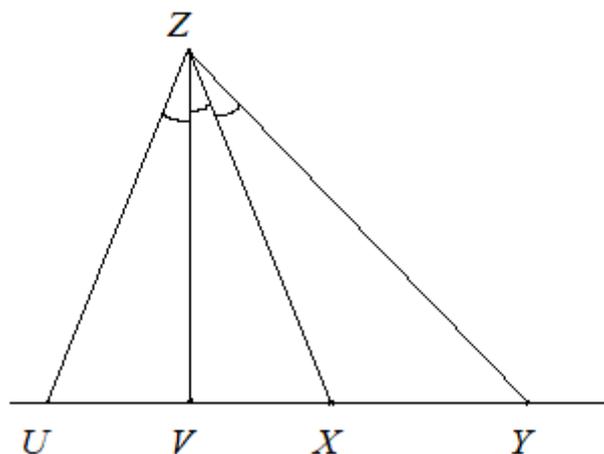
## Вариант 4

1. Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномерно двигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые пять минут. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 15 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?
2. Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 2,5$  кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью  $k = 120$  Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками  $\mu = 0,12$ . Какую минимальную работу  $A$  нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



3. Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:  
«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу  $N$  находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны  $N$ . Программа должна ввести с клавиатуры число  $N$  и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»  
Пример работы программы:  
Введите  $N$   
10  
Ответ  
3 7
4. На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 2 раза, а другого в 6 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное  $P = 6,5$  Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

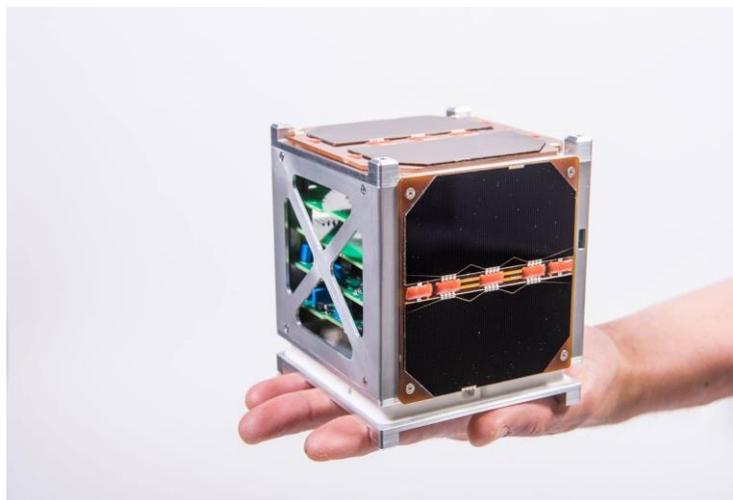
5. Расположенный в точке  $Z$  радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол  $\alpha$  для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках  $U, V, X, Y$ , расположенных в указанном порядке. Известно, что точка  $V$  находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара,  $UV = 1$ ,  $ZX = \sqrt{17}$ . Найдите расстояние  $UY$ .



6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?

б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.



## 10-11 классы

### Вариант 1

1. Известно, что  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 10$ . Найдите  $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} + \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$ .

**Решение.** Заметим, что  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2} = 10$ . Отсюда  $\frac{x^2}{y^2} = \frac{10+2}{10-2} = \frac{3}{2}$ , тогда  $\frac{x^4}{y^4} =$

$\frac{9}{4}$  Обозначим  $A = \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} + \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$ , получим  $A = \frac{\frac{9}{4}+1}{\frac{9}{4}-1} + \frac{\frac{9}{4}-1}{\frac{9}{4}+1} = \frac{194}{65}$ .

**Ответ:**  $\frac{194}{65}$ .

**Ответы к другим вариантам:**  $\frac{674}{175}$ ;  $\frac{353}{136}$ ;  $\frac{1762}{369}$ .

#### Критерии проверки:

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

± (6 баллов) – при верной логике решений ответ неверный вследствие ошибки при преобразованиях;

∓ (3 балла) – верно найдено соотношение между переменными, дальше грубые ошибки или решение не закончено;

– (0 баллов) – все остальное.

2. Ракета среднего класса семейства Р-7 имеет стартовую массу 307,65 тонн. Во время вертикального взлета через некоторое время после пуска двигателей скорость истечения газов из сопла ракеты составила 500 м/с. Сколько килограммов топлива должна израсходовать ракета за 0,1 секунды, чтобы уравновесить действующую на нее силу тяжести? Изменением массы ракеты и скорости истечения газов в течение 0,1 секунды пренебрегаем. Полную массу ракеты к этому моменту времени считайте равной 300 тонн. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение.**  $F\Delta t = \Delta p$ . За 0,1 секунды:  $\Delta t = 0,1$ . Сила тяжести равняется силе тяги, следовательно,  $Mg = \frac{\Delta p}{0,1} = \frac{\mu v}{0,1}$ , где  $M$  – масса ракеты,  $\mu$  – расход топлива,  $v$  –

скорость истечения газов. Отсюда  $\mu = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,1}{500} = 600$  кг.

**Ответ:** 600 кг.

**Ответы к другим вариантам:** 562,5; 500; 600.

#### Критерии проверки:

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

+. (8 баллов) – при верной логике решения ответ неверный вследствие незначительной арифметической ошибки **или** ответ верный, но есть пробелы в рассуждениях;

± (6 баллов) – при верной логике решения ответ неверный вследствие существенной арифметической ошибки (например, ошибки на порядок);

– (0 баллов) – все остальное.

3. Два летательных аппарата движутся по окружностям, пересекающимся в точках  $A$  и  $B$ . Пункты наблюдений находятся в точках  $C$  и  $M$ , расположенных на разных окружностях. Каждая из прямых  $AC$  и  $AM$  пересекает одну из окружностей и является касательной к другой. Расстояния от точки  $B$  до пунктов наблюдения равны 6 и 24. Найдите расстояние между точками пересечения траекторий движения летательных аппаратов.

**Решение.** Рассмотрим первую из окружностей. Угол  $BCA$  является вписанным, следовательно, он равен половине дуги  $AB$ . Угол  $BAM$  образован хордой  $AB$  и касательной  $AM$  к окружности, поэтому он равен половине той же дуги  $AB$ .

Следовательно,  $\angle BSA = \angle BAM$ . Аналогично,  $\angle BSA = \angle BAM$ . Значит,  $\triangle BAS \sim \triangle AMB$ . Из подобия следует пропорция  $\frac{BS}{BA} = \frac{BA}{BM}$ , откуда  $BA = \sqrt{6 \cdot 24} = 12$ .

**Ответ:** 12.

**Ответы к другим вариантам:** 14; 16; 10.

**Критерии проверки:**

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

$\pm$  (6 баллов) – ответ верный, но есть пробелы в обосновании (например, не доказано подобие треугольников);

$\mp$  (3 балла) – задача решена в частном случае;

– (0 баллов) – все остальное.

4. Элементом инженерной конструкции аппарата является вертикальная цилиндрическая труба с площадью сечения  $S = 1 \text{ см}^2$ , заполненная одним моле́м газа и закрытая подвижным тяжелым поршнем массой  $m = 0,5 \text{ кг}$ . Какой газ – одноатомный или двухатомный – надо разместить в трубе, чтобы минимизировать подачу теплоты к трубе для обеспечения равномерного движения поршня со скоростью  $v = 1,5 \text{ см/с}$ ? Найдите это значение количества теплоты  $Q$  в секунду. Атмосферное давление равно  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение.** За время  $t$  поршень сдвинется на расстояние  $h = v \cdot t$ . При этом объем изменится на величину  $\Delta V = h \cdot S$ . Учитывая, что процесс изобарный с постоянным давлением, равным  $p = p_0 + \frac{mg}{S}$ , для работы газа получим  $A = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \Delta V$ .

В соответствии с первым началом термодинамики для изменения внутренней энергии, которая определяется формулой  $\Delta U = \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{i}{2} \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \Delta V$ , можно записать

$$Q \cdot t = A + \Delta U \Rightarrow Q \cdot t = \frac{i+2}{2} \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \Delta V \Rightarrow Q \cdot t = \frac{i+2}{2} \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot v \cdot t \cdot S.$$

Отсюда получим для скорости подачи тепла  $Q$ :

$$Q = \frac{i+2}{2} \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot v \cdot S.$$

Следовательно, для обеспечения движения поршня выгоднее использовать одноатомный газ

( $i = 3$ ). Подставляя данные задачи, получим ответ.

**Ответ:** Одноатомный, 0,5625 Дж/с.

**Ответы к другим вариантам:** везде одноатомный, 0,6 Дж/с; 0,5 Дж/с; 1,3 Дж/с.

**Критерии проверки:**

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

+. (8 баллов) – при верной логике решения ответ неверный вследствие незначительной арифметической ошибки;

$\pm$  (6 баллов) – ответ на первый вопрос верный, при ответе на второй вопрос допущены существенные арифметические ошибки, или есть пробелы в рассуждениях;

$\mp$  (3 балла) – ответ на первый вопрос верный, ответ на второй вопрос не дан, или рассуждение содержит грубые ошибки;

– (0 баллов) – все остальное.

5. Космический пират Весельчак\_У принимал и записывал сообщение от своего напарника Крыса, состоящее из двух натуральных чисел  $A$  и  $B$ , но второпях допустил ошибку: одну или несколько цифр числа  $A$  записал неверно. Он знает, что

число  $A$  должно делиться на  $B$  без остатка. Весельчак  $У$  хочет исправить минимально возможное количество цифр в числе  $A$  (не меняя самого количества цифр) так, чтобы исправленное число делилось на  $B$ .

Помогите Весельчаку сделать нужные исправления! Напишите программу на вашем любимом языке программирования, решающую эту задачу.

Входные данные: два натуральных числа, меньших 1000. Выходные данные: исправленная пара – два натуральных числа, первое из которых делится нацело на второе. Если ответа не существует, выведите  $-1$ .

**Примеры:**

Вход: 123 10

Выход: 120 10

Вход: 123 141

Выход: 423 141

Вход: 10 100

Выход:  $-1$

**Критерии проверки:** тестируется программа.

- б. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» (см. Рисунок 1) с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

Орбиту МКС считайте круговой с высотой  $h = 384,7$  км. Землю считайте идеальным шаром радиуса  $R_3 = 6371,3$  км. Гравитационный параметр считайте равным  $\mu = G \cdot M_3 = 3,984 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ , где  $G$  – гравитационная постоянная, а  $M_3$  – масса Земли

- а) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции), сообщая спутнику скорость  $v = 3$  м/с относительно станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

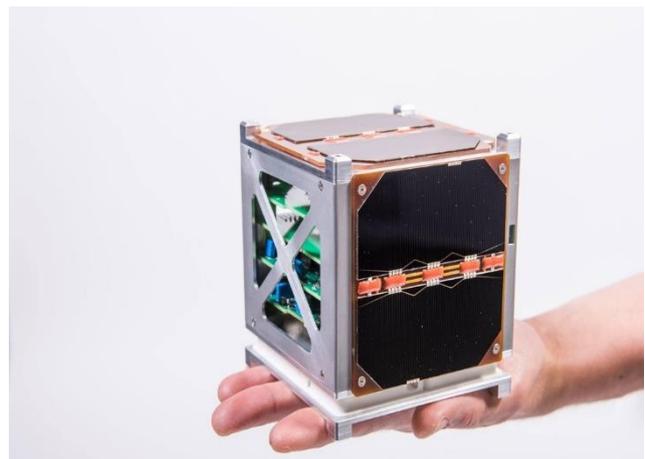


Рисунок 1

б) Предположим, что космонавт бросает спутник по направлению на Землю (для определенности: строго в направлении центра Земли, ось  $Oz$  на Рисунке 2). Какой будет траектория спутника относительно центра Земли? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

в) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его строго перпендикулярно плоскости орбиты станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС

(естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

**Решение.**

Прежде всего, найдем скорость движения МКС. Пусть  $R = R_3 + h = 6756000$  м – радиус орбиты,  $\omega$  – угловая скорость вращения станции, а  $m$  – масса станции. По закону Ньютона,

$$mR\omega^2 = F_T = G \frac{M_3 m}{R^2} = m \frac{\mu}{R^2}$$

Тогда  $\omega = \sqrt{\mu/R^3} = 0,0011366$  с<sup>-1</sup>, а скорость  $V = R\omega = 7679,180$  м/с.

а) Итак, скорость спутника относительно центра Земли равна (по модулю)  $u = V + v = 7683,180$  м/с. Значит, спутник, как и станция, будет двигаться по замкнутой эллиптической орбите вокруг Земли в плоскости орбиты станции. При этом поскольку космонавт придал спутнику дополнительную скорость, направленную по касательной к окружности (орбита станции), т. е. по вектору, направленному вовне окружности, то спутник в первые секунды полета окажется на более высокой орбите. Кроме того, мы уже знаем, что эта эллиптическая орбита касается круговой орбиты МКС в точке запуска спутника. Теперь заметим, что касание эллипса и окружности с центром в фокусе этого эллипса может осуществляться только в двух точках – перигее и апогее эллиптической орбиты. Действительно, если тело движется по эллиптической орбите за пределами окружности, а затем касается этой окружности, то после касания тело вновь окажется вне окружности (эллипс – выпуклая кривая). Значит, это тело вначале приближалось, а затем отдалялось от центра окружности – фокуса эллипса, т. е. точка касания была перигеем орбиты. Итак, единственной общей точкой орбиты спутника и орбиты МКС будет та самая точка, в которой космонавт осуществил запуск, т. е. спутник и МКС вновь сблизятся после одного витка. Однако опасность столкновения со спутником станции не грозит, т. к. в точку касания орбит тела придут в разное время. Большая полуось орбиты спутника больше радиуса орбиты МКС. Тогда, по закону Кеплера (квадраты периодов обращения относятся как кубы больших полуосей орбит), период обращения спутника больше, чем у МКС. Итак, после одного витка спутник придет в точку

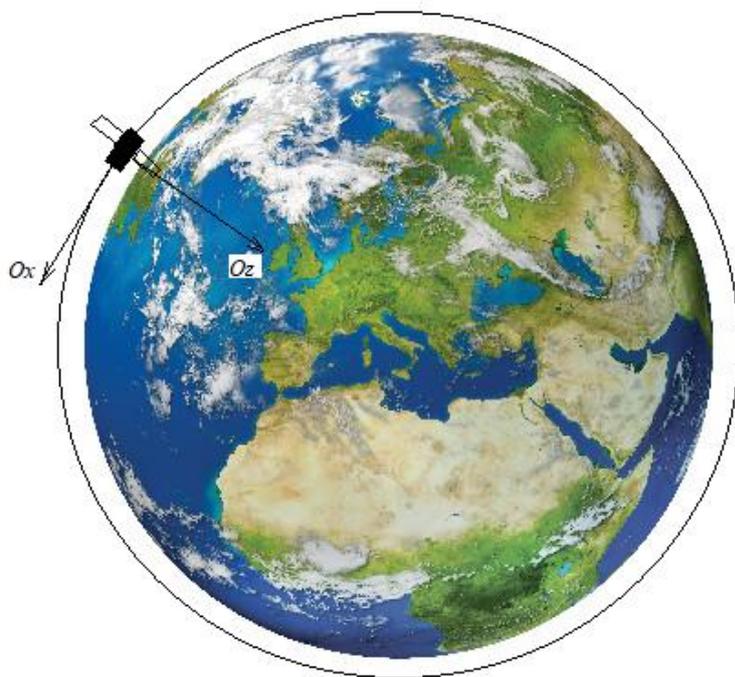


Рисунок 2

соприкосновения орбит позже станции и столкновение не произойдет. При следующих витках спутник продолжит отставать от станции и столкновение теоретически возможно только после нескольких витков, когда спутник отстанет от станции «на круг». Однако за это время различные дополнительные факторы вызовут отклонение траектории станции и вероятность столкновения пренебрежимо мала. Вывод: такой запуск спутника вполне безопасен.

б) Модуль скорости спутника находим из прямоугольного треугольника  $u = \sqrt{V^2 + v^2} = 7679,181$  м/с. Отсюда же находим угол между направлением движения спутника и МКС в момент броска  $\alpha = \arctg \frac{v}{V} = 0,000521$  радиана. Как и в предыдущем пункте, спутник будет двигаться по эллиптической орбите в плоскости орбиты МКС. Отличие от пункта а) в том, что эти орбиты пересекаются в точке А – точке запуска. Заметим, что если эллипс и окружность с центром в фокусе этого эллипса пересекаются, то точек пересечения ровно две. Действительно, при движении по эллипсу точка находится ближе всего к фокусу в точке перигея, затем отдаляется, достигает максимального расстояния в точке апогея, а затем вновь приближается до точки перигея. Тогда через каждое свое промежуточное значение функция расстояния от точки до фокуса проходит ровно два раза. В нашем случае спутник в первые секунды после запуска будет находиться ниже станции, т. е. пойдет по своей орбите к точке перигея, достигнет ее и затем, отдаляясь от центра Земли, пересечет орбиту МКС. Однако опасность столкновения со спутником станции не грозит, т. к. в точку пересечения орбит (точку В) тела придут в разное время. Во-первых, время движения станции от момента запуска до точки пересечения орбит составляет приблизительно половину периода обращения  $\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\omega} = 2764$  с. Действительно, в силу симметрии эллипса две точки пересечения орбит симметричны относительно прямой, проходящей через фокусы и точку перигея эллипса. Но поскольку эллипс будет очень близок к окружности, то симметричная точка близка к диаметрально противоположной точке. Во-вторых, во все время этого полувитка скорость спутника будет больше скорости станции. Начальная скорость спутника фактически равна скорости станции, далее спутник движется к точке перигея и, следовательно, его скорость возрастает. После прохождения точки перигея скорость спутника начнет убывать и в силу симметрии вернется к значению  $u = 7679,181$  м/с в точке В. При этом путь, пройденный спутником меньше, чем путь, пройденный станцией (орбита спутника ниже орбиты станции). Значит, спутник обгонит станцию в точке В. Следующее пересечение орбит произойдет после одного полного витка станции. Здесь применимы рассуждения из предыдущего пункта: период обращения спутника больше периода обращения станции, и спутник от станции отстанет. Вывод: такой запуск спутника также безопасен, хотя и хуже первого способа.

в) При таком запуске орбита движения спутника будет лежать в плоскости, отличной от плоскости орбиты МКС. При этом модуль скорости спутника по-прежнему равен  $u = \sqrt{V^2 + v^2} = 7679,181$  м/с, т. е. практически совпадает со скоростью станции  $V = 7679,180$  м/с. Векторы скоростей спутника и МКС лежат в разных плоскостях, но оба перпендикулярны оси Oz. Это означает, что в плоскости своей орбиты спутник имеет те же начальные данные (радиус-вектор и вектор скорости), что и МКС в своей плоскости. Значит, орбита спутника будет круговой с тем же периодом обращения, что и у МКС. Тогда, через полвитка станция и спутник сблизятся (если пренебречь разницей между  $u$  и  $V$ , то просто столкнутся). Вывод: такой способ запуска является опасным.

**Критерии проверки (по баллам, максимум = 20 баллов):**

а) 1 балл – понимает, что орбита – эллипс;

1 балл – понимает, что орбита спутника выше орбиты МКС;

- 1 балл – понимает, что есть одна точка касания орбит;  
 2 балла – обосновывает первые три пункта;  
 1 балл – понимает, что время обращения спутника больше;  
 1 балл – обосновывает предыдущий пункт;  
 1 балл – делает вывод о безопасности;  
 1 балл – грамотное, объемное или логичное изложение своих мыслей.
- б)** 1 балл – понимает, что орбита – эллипс;  
 1 балл – понимает расположение эллипса или то, что орбита ниже;  
 1 балл – обосновывает предыдущие два пункта;  
 1 балл – говорит о том, что первый полупериод спутника меньше, а второй больше;  
 1 балл – обосновывает предыдущий пункт;  
 1 балл – делает вывод о безопасности;  
 1 балл – грамотное, объемное и логичное изложение своих мыслей.
- в)** 1 балл – понимает, что орбита – круг, и что есть угол наклона;  
 1 балл – обосновывает предыдущий пункт;  
 1 балл – понимает совпадение периодов;  
 1 балл – делает вывод об опасности.

### Вариант 2

1. Известно, что  $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 14$ . Найдите  $\frac{a^4+b^4}{a^4-b^4} + \frac{a^4-b^4}{a^4+b^4}$ .
2. Ракета-носитель Восток имеет стартовую массу 289,5 тонн. Во время вертикального взлета через некоторое время после пуска двигателей скорость истечения газов из сопла ракеты составила 480 м/с. Сколько килограммов топлива должна израсходовать ракета за 0,1 секунды, чтобы уравновесить действующую на нее силу тяжести? Изменением массы ракеты и скорости истечения газов в течение 0,1 секунды пренебрегаем. Полную массу ракеты к этому моменту времени считайте равной 270 тонн. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10 \text{ м / с}^2$ .
3. Два летательных аппарата движутся по окружностям, пересекающимся в точках  $P$  и  $Q$ . Пункты наблюдений находятся в точках  $D$  и  $E$ , расположенных на разных окружностях. Каждая из прямых  $PD$  и  $PE$  пересекает одну из окружностей и является касательной к другой. Расстояния от точки  $Q$  до пунктов наблюдения равны 7 и 28. Найдите расстояние между точками пересечения траекторий движения летательных аппаратов.
4. Элементом инженерной конструкции аппарата является вертикальная цилиндрическая труба с площадью сечения  $S = 2 \text{ см}^2$ , заполненная одним молем газа и закрытая подвижным тяжелым поршнем массой  $m = 1 \text{ кг}$ . Какой газ – одноатомный или двухатомный – надо разместить в трубе, чтобы минимизировать подачу теплоты к трубе для обеспечения равномерного движения поршня со скоростью  $v = 0,8 \text{ см/с}$ ? Найдите это значение количества теплоты  $Q$  в секунду. Атмосферное давление равно  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .
5. Космический пират Весельчак\_У принимал и записывал сообщение от своего напарника Крыса, состоящее из двух натуральных чисел  $A$  и  $B$ , но второпях допустил ошибку: одну или несколько цифр числа  $A$  записал неверно. Он знает, что

число  $A$  должно делиться на  $B$  без остатка. Весельчак  $У$  хочет исправить минимально возможное количество цифр в числе  $A$  (не меняя самого количества цифр) так, чтобы исправленное число делилось на  $B$ .

Помогите Весельчаку сделать нужные исправления! Напишите программу на вашем любимом языке программирования, решающую эту задачу.

Входные данные: два натуральных числа, меньших 1000. Выходные данные: исправленная пара – два натуральных числа, первое из которых делится нацело на второе. Если ответа не существует, выведите  $-1$ .

**Примеры:**

Вход: 123 10

Выход: 120 10

Вход: 123 141

Выход: 423 141

Вход: 10 100

Выход:  $-1$

6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» (см. Рисунок 1) с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

Орбиту МКС считайте круговой с высотой  $h = 384,7$  км. Землю считайте идеальным шаром радиуса  $R_3 = 6371,3$  км. Гравитационный параметр считайте равным  $\mu = G \cdot M_3 = 3,984 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ , где  $G$  – гравитационная постоянная, а  $M_3$  – масса Земли

- а) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции), сообщая спутнику скорость  $v = 3$  м/с относительно станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

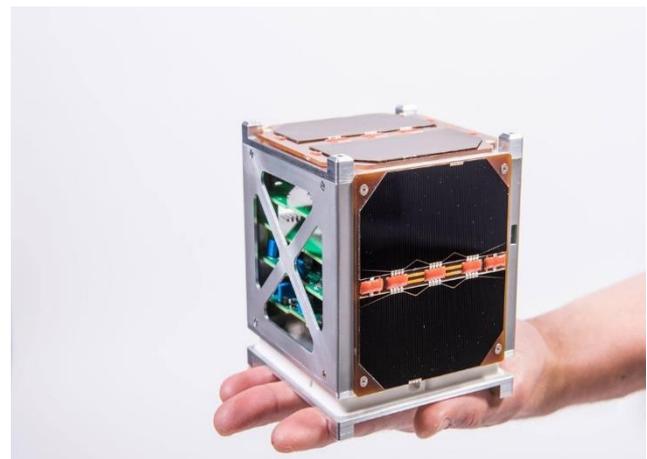


Рисунок 1

б) Предположим, что космонавт бросает спутник по направлению на Землю (для определенности: строго в направлении центра Земли, ось  $Oz$  на Рисунке 2). Какой будет траектория спутника относительно центра Земли? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

в) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его строго перпендикулярно плоскости орбиты станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

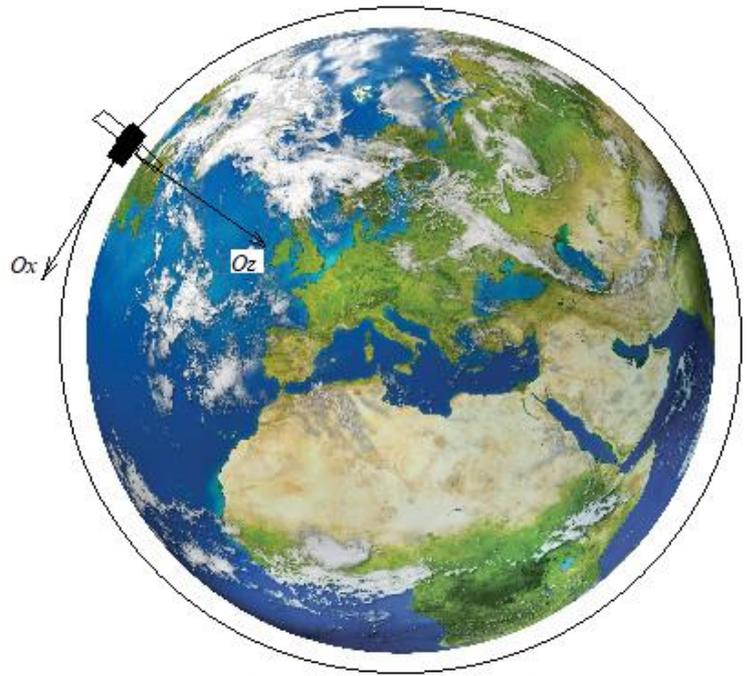


Рисунок 2

### Вариант 3

1. Известно, что  $\frac{p+q}{p-q} + \frac{p-q}{p+q} = 8$ . Найдите  $\frac{p^4+q^4}{p^4-q^4} + \frac{p^4-q^4}{p^4+q^4}$ .
2. Ракета-носитель Луна имеет стартовую массу 283,5 тонн. Во время вертикального взлета через некоторое время после пуска двигателей скорость истечения газов из сопла ракеты составила 560 м/с. Сколько килограммов топлива должна израсходовать ракета за 0,1 секунды, чтобы уравновесить действующую на нее силу тяжести? Изменением массы ракеты и скорости истечения газов в течение 0,1 секунды пренебрегаем. Полную массу ракеты к этому моменту времени считайте равной 280 тонн. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.
3. Два летательных аппарата движутся по окружностям, пересекающимся в точках  $L$  и  $N$ . Пункты наблюдений находятся в точках  $T$  и  $S$ , расположенных на разных

окружностях. Каждая из прямых  $LT$  и  $LS$  пересекает одну из окружностей и является касательной к другой. Расстояния от точки  $N$  до пунктов наблюдения равны 8 и 32. Найдите расстояние между точками пересечения траекторий движения летательных аппаратов.

4. Элементом инженерной конструкции аппарата является вертикальная цилиндрическая труба с площадью сечения  $S = 0,8\text{см}^2$ , заполненная одним молем газа и закрытая подвижным тяжелым поршнем массой  $m = 1,2$  кг. Какой газ – одноатомный или двухатомный – надо разместить в трубе, чтобы минимизировать подачу теплоты к трубе для обеспечения равномерного движения поршня со скоростью  $v = 1$  см/с? Найдите это значение количества теплоты  $Q$  в секунду. Атмосферное давление равно  $p_0 = 10^5$  Па. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.
5. Космический пират Весельчак\_У принимал и записывал сообщение от своего напарника Крыса, состоящее из двух натуральных чисел  $A$  и  $B$ , но второпях допустил ошибку: одну или несколько цифр числа  $A$  записал неверно. Он знает, что число  $A$  должно делиться на  $B$  без остатка. Весельчак\_У хочет исправить минимально возможное количество цифр в числе  $A$  (не меняя самого количества цифр) так, чтобы исправленное число делилось на  $B$ .

Помогите Весельчаку сделать нужные исправления! Напишите программу на вашем любимом языке программирования, решающую эту задачу.

Входные данные: два натуральных числа, меньших 1000. Выходные данные: исправленная пара – два натуральных числа, первое из которых делится нацело на второе. Если ответа не существует, выведите  $-1$ .

**Примеры:**

Вход: 123 10

Выход: 120 10

Вход: 123 141

Выход: 423 141

Вход 10 100

Выход:  $-1$

6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» (см. Рисунок 1) с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

Орбиту МКС считайте круговой с высотой  $h = 384,7$  км. Землю считайте идеальным шаром радиуса  $R_3 = 6371,3$  км. Гравитационный параметр считайте равным  $\mu = G \cdot M_3 = 3,984 \cdot 10^{14}$  м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>, где  $G$  – гравитационная постоянная, а  $M_3$  – масса Земли.

а) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции), сообщая спутнику скорость  $v = 4$  м/с относительно станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

б) Предположим, что космонавт бросает спутник по направлению на Землю (для определенности: строго в направлении центра Земли, ось  $Oz$  на Рисунке 2). Какой будет траектория спутника относительно центра Земли? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

в) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его строго перпендикулярно плоскости орбиты станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

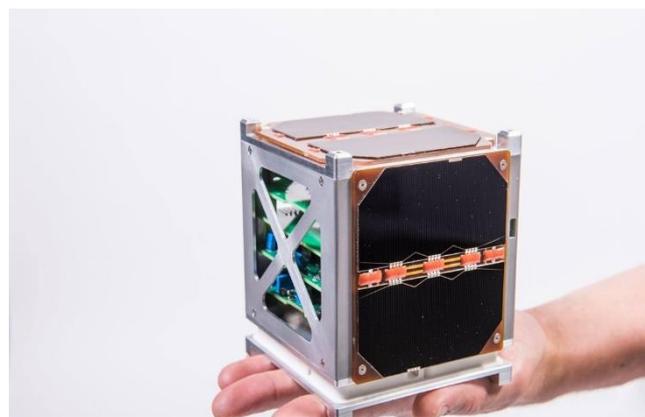


Рисунок 1

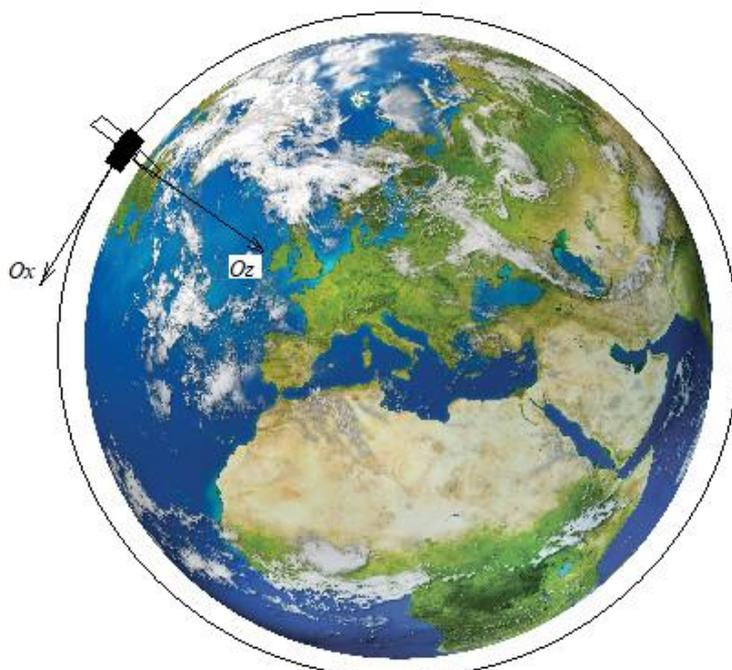


Рисунок 2

#### Вариант 4

1. Известно, что  $\frac{t+s}{t-s} + \frac{t-s}{t+s} = 18$ . Найдите  $\frac{t^4+s^4}{t^4-s^4} + \frac{t^4-s^4}{t^4+s^4}$ .
2. Ракета-носитель Полет имеет стартовую массу 279,5 тонн. Во время вертикального взлета через некоторое время после пуска двигателей скорость истечения газов из сопла ракеты составила 450 м/с. Сколько килограммов топлива должна израсходовать ракета за 0,1 секунды, чтобы уравновесить действующую на нее силу тяжести? Изменением массы ракеты и скорости истечения газов в течение 0,1

секунды пренебрегаем. Полную массу ракеты к этому моменту времени считайте равной 270 тонн. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. Два летательных аппарата движутся по окружностям, пересекающимся в точках  $X$  и  $Y$ . Пункты наблюдений находятся в точках  $U$  и  $V$ , расположенных на разных окружностях. Каждая из прямых  $YU$  и  $YV$  пересекает одну из окружностей и является касательной к другой. Расстояния от точки  $X$  до пунктов наблюдения равны 5 и 20. Найдите расстояние между точками пересечения траекторий движения летательных аппаратов.
4. Элементом инженерной конструкции аппарата является вертикальная цилиндрическая труба с площадью сечения  $S = 1,6 \text{ см}^2$ , заполненная одним молом газа и закрытая подвижным тяжелым поршнем массой  $m = 1 \text{ кг}$ . Какой газ – одноатомный или двухатомный – надо разместить в трубе, чтобы минимизировать подачу теплоты к трубе для обеспечения равномерного движения поршня со скоростью  $v = 2 \text{ см/с}$ ? Найдите это значение количества теплоты  $Q$  в секунду. Атмосферное давление равно  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .
5. Космический пират Весельчак\_У принимал и записывал сообщение от своего напарника Крыса, состоящее из двух натуральных чисел  $A$  и  $B$ , но второпях допустил ошибку: одну или несколько цифр числа  $A$  записал неверно. Он знает, что число  $A$  должно делиться на  $B$  без остатка. Весельчак\_У хочет исправить минимально возможное количество цифр в числе  $A$  (не меняя самого количества цифр) так, чтобы исправленное число делилось на  $B$ .

Помогите Весельчаку сделать нужные исправления! Напишите программу на вашем любимом языке программирования, решающую эту задачу.

Входные данные: два натуральных числа  $A$  и  $B$ , меньших 1000. Выходные данные: исправленная пара – два натуральных числа, первое из которых делится нацело на второе. Если ответа не существует, выведите  $-1$ .

**Примеры:**

Вход: 123 10

Выход: 120 10

Вход: 123 141

Выход 423 141

Вход 10 100

Выход:  $-1$

6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук (см. Рисунок 1). Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

Орбиту МКС считайте круговой с высотой  $h = 384,7$  км. Землю считайте идеальным шаром радиуса  $R_3 = 6371,3$  км. Гравитационный параметр считайте равным  $\mu = G \cdot M_3 = 3,984 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ , где  $G$  – гравитационная постоянная, а  $M_3$  – масса Земли.

а) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции), сообщая спутнику скорость  $v = 6$  м/с относительно станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

б) Предположим, что космонавт бросает спутник по направлению на Землю (для определенности: строго в направлении центра Земли, ось  $Oz$  на Рисунке 2). Какой будет траектория спутника относительно центра Земли? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

в) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит его строго перпендикулярно плоскости орбиты станции? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)?

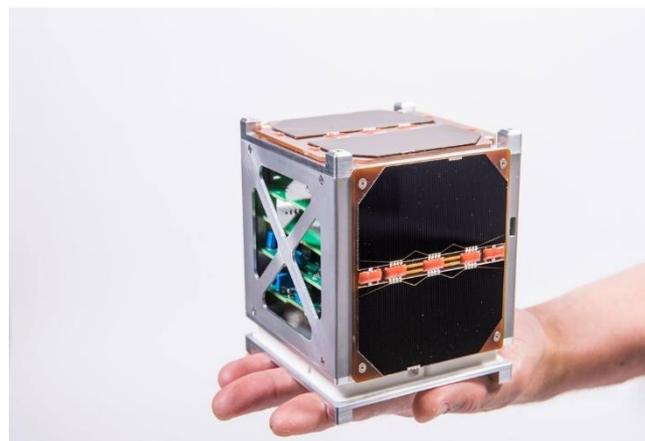


Рисунок 1



Рисунок 2