МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Атакишиев Давид Вугарович

Технический балл: 90

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

$\text{Найдите сумму цифр числа } A, \text{ если } A = 2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} - 1.$

Результат: 15

Введенный ответ:

N1

$A = 2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} - 1$

$A = 2^{63} \cdot 2^{50} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 2^{88} \cdot 5^{105} - 1$

$A = 2^{113} \cdot 5^{106} - 2^{110} \cdot 5^{105} - 1$

$A = 2^{105} \cdot 5^{105} (2^8 \cdot 5 - 2^5) - 1$

$A = 10^{105} (1280 - 32) - 1$

$A = 1248 \cdot 10^{105} - 1$

$1248 \cdot 10^{105} = 1248\underbrace{00\ldots0}_{105-a}$

$1248 \cdot 10^{105} - 1 = 1247\underbrace{99\ldots9}_{105-9}$

Тогда $A = 1247\underbrace{99\ldots9}_{105}$

Сумма цифр $A = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 105 =$

$14 + 9 \cdot 105 = 14 + 945 = 959$

Ответ: 959

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных фиксика, а всего существует 14 видов фиксиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки фиксиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному фиксику всех 14 видов?

Результат: 15

Введенный ответ:

№2

Пусть k - кол-во конфет - сюрпризов.

При $k \leq C_{13}^3$ т.е $k \leq \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6}$ $k \leq 286$

может быть такое, что задействовано не более 13 фантиков т.к количество различных троек из 13 - $C_{13}^3 \geq k$

$\Rightarrow k > 286 \Rightarrow k$ хотя бы 287 (натуральных)

при k=287 будут фантики всех 14 видов т.к количество различных троек из 13 видов $< k$ (видов задействовано хотя бы 14)

Ответ: 287

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{ctg} \arcsin x + \cos \operatorname{arctg} x > 0.$

Результат: 15

Введенный ответ:

№3

$\operatorname{ctg}(\arcsin x) > \sin(\operatorname{arctg} x)$

$x \in [-1;1]$ область опред arcsin и arccos

$x \neq 0$ у ctg и $\sin x \neq 0$

$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \frac{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)} - x^2}{x\sqrt{1+x^2}} > 0$

1) $x > 0$

$x\sqrt{1+x^2} > 0$ т.к $\sqrt{1+x^2} > 0 \Rightarrow (\sqrt{1-x^4} - x^2 > 0$

$\sqrt{1-x^4} > x^2$ в квадрат обе части (обе >0 $x \neq 0$)

$1 - x^4 > x^4$

$x^4 < \frac{1}{2}$ $\qquad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$ $x > 0 \Rightarrow$

$x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

2) $x < 0$

$x\sqrt{1+x^2} < 0$ т.к $\sqrt{1+x^2} > 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^4} - x^2 < 0$

$\sqrt{1-x^4} < x^2$ в квадрат обе части (обе >0)

$1 - x^4 < x^4$

$x^4 > \frac{1}{2}$ $\qquad x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; +\infty\right)$ $-1 \leq x < 0 \Rightarrow$

$x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

$\left[\begin{array}{l} x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \\ x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \end{array}\right.$

Ответ: $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

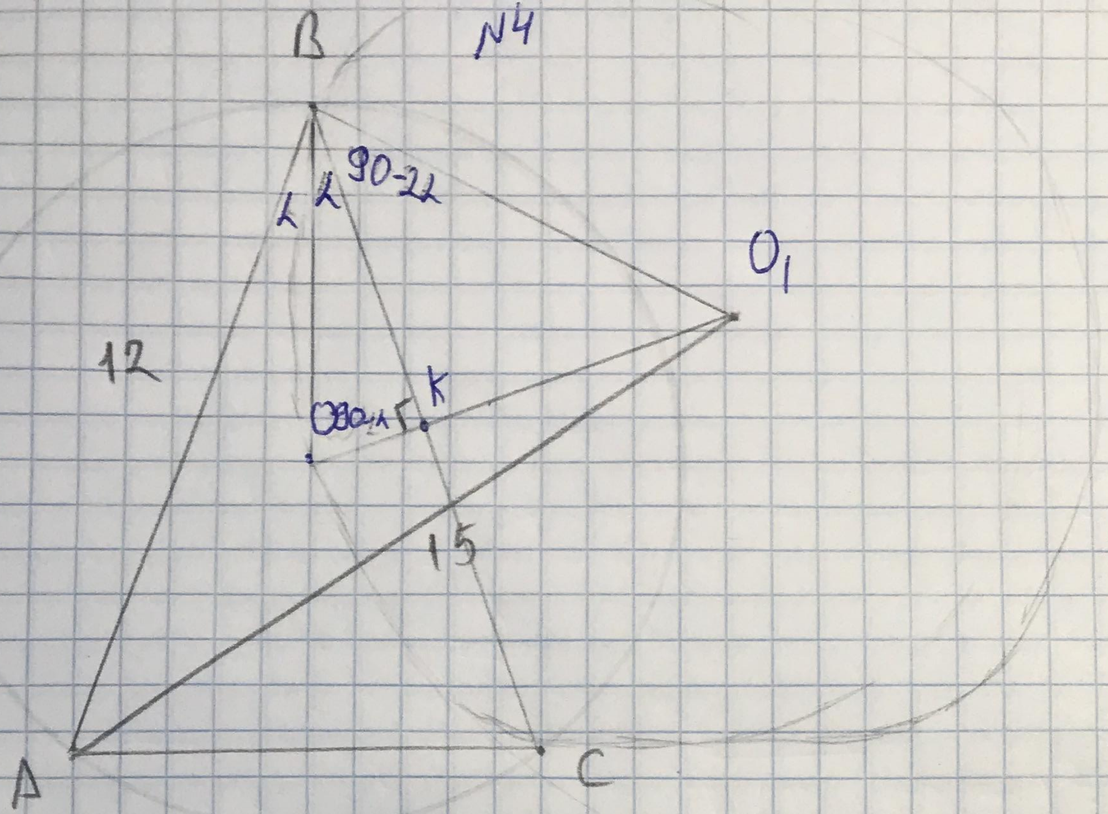
Задание номер: 4

Хорды AB и BC одной окружности с центром O равны по 12, а центр другой окружности, проходящей через точки B, C и O, удалён от точки A на расстояние 15. Найдите радиус второй окружности.

Результат: 15

Введенный ответ:

№4



Пусть центр второй окружности O_1 $AO_1=15$

Пусть $\angle OBC=\alpha$ $O_1O\perp BC$ т.к. O - лежит на серединном перпенд к BC (центр опис $\triangle ABC$) и O_1 на серединном перпенд к BC (центр описанной $\triangle OBC$) $\Rightarrow \angle OKB=90°$ (K - точка пересеч OO_1 и BC)

$\Rightarrow \angle BO_1K=90-\alpha$

Т.к $\triangle ABC$ равнобед с основанием AC BO - бисс, медиана и высота $\Rightarrow$ $\angle OBK=\angle OBA=\alpha$

В $\triangle OO_1B$ $OO_1=O_1B$ - радиусы окружности $\Rightarrow$

$\angle O_1OB=\angle OBO_1=90-\alpha \Rightarrow \angle KBO_1=\angle BBO_1-\angle KBO_1=90-\alpha-\alpha=90-2\alpha$

$\angle ABO_1=\angle ABC+\angle KBO_1=2\alpha+90-2\alpha=90°$

По теореме Пифагора в $\triangle AO_1B$

$BO_1=\sqrt{AO_1^2-AB^2}=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9$

BO_1 = радиусу второй окружности

Ответ: 9

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел $x^3 + 3x + a - 9$ и $a + 2^{5-x} - 3^{x-1}$ положительно.

Результат: 15

Введенный ответ:

№5

Наиб из чисел

$x^3+3x+a-9$ и $a+2^{5-x}-3^{x-1}$ всегда положительно

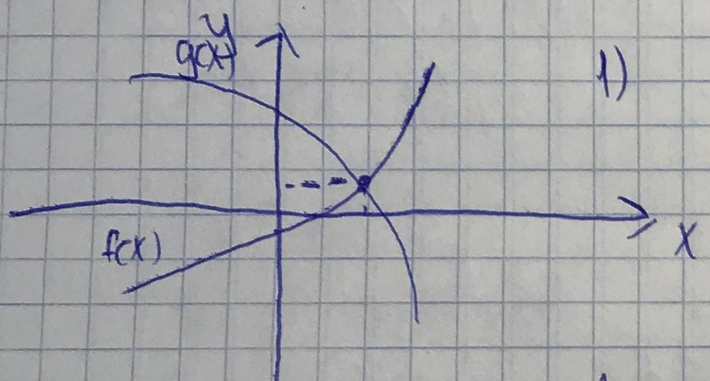
$$\left[\begin{array}{l} x^3+3x+a-9>0 \\ a+2^{5-x}-3^{x-1}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in R$$ (хотя бы одно всегда выполняется)

Заметим что $f(x)=x^3+3x+a$ монотонно возрастает т.к $a-9$ - константа, а x^3 и $3x$ нечетной степени с положит коэфф

Те при $y>x$ $y^3>x^3$ и $3y>3x$

Также заметим, что $g(x)=a+2^{5-x}-3^{x-1}$ монотонно убывает т.к a-константа, а 2^{5-x} и -3^{x-1} монотонно убыв.

Вывод



1)

найдем корень уравнения $x^3+3x+a-9=a+2^{5-x}-3^{x-1}$

$x^3+3x-9=2^{5-x}-3^{x-1}$

Подставим $x=2$ $8+6-9=8-3$ $\Rightarrow x=2$ корень т.к

$x^3+3x+a-9$ - возрастает, а $a+2^{5-x}-3^{x-1}$ убывает корней уравнения $>$ или

Тогда $f(2)$ должно быть >0 т.к иначе 1

(иначе оба значения ≤ 0, при остальных значениях ($x<2$ $g(x)>f(x)>0$
$x>2$ $f(x)>g(x)>0$)

$f(2)=8+6+a-9$

$a+5>0$ $a>-5$

Ответ: $a>-5$

Задание номер: 6

Снегоход и квадроцикл соревнуются на зимней кольцевой трассе, четверть которой покрыта рыхлым снегом, а остальная часть - плотным снегом. Снегоход едет по рыхлому снегу со скоростью 32 км/ч, а по плотному - со скоростью 36 км/ч. Квадроцикл едет по рыхлому снегу со скоростью 16 км/ч, а по плотному - со скоростью 48 км/ч. Снегоход и квадроцикл начинают движение одновременно в начале части трассы, покрытой рыхлым снегом, и сначала едут по этой части. Какое из транспортных средств первым обгонит другое, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Результат: 5

Введенный ответ:

№ 6

Пусть S – длина четверти трассы, соответственно $3S$ – длина оставшихся $\frac{3}{4}$ трассы

Тогда время за которое первый проезжает один круг (снегоход)

$$T_c = \frac{S}{32} + \frac{3S}{36} = \frac{S}{32} + \frac{S}{12} \quad (\text{часов})$$

$$T_c \cdot 96 = 3S + 8S = 11S$$

$$T_{квад} = \frac{S}{16} + \frac{3S}{48} = \frac{S}{16} + \frac{S}{16} = \frac{S}{8}$$

$$T_{квад} \cdot 96 = 12S$$

$T_c \cdot 96 < T_{кв} \cdot 96 \Rightarrow T_c < T_{кв} \Rightarrow$ время за которое снегоход проходит 1 круг меньше чем у квадрицикла т.е он будет обгонят

Тогда за один ~~количество кругов снегоход должен~~ время снегоход хотя бы на 1 больше =

$T_c(x+1) \leq x T_{кс}$ т.е $(x+1) T_c \cdot 96 \leq x \cdot T_{кв} 96$

$(x+1) 11S \leq x \cdot 12S$

$xS \geq 11S \Rightarrow x \geq 11 \Rightarrow$ на 11-ом круге

Ответ: на 11-ом круге снегоход

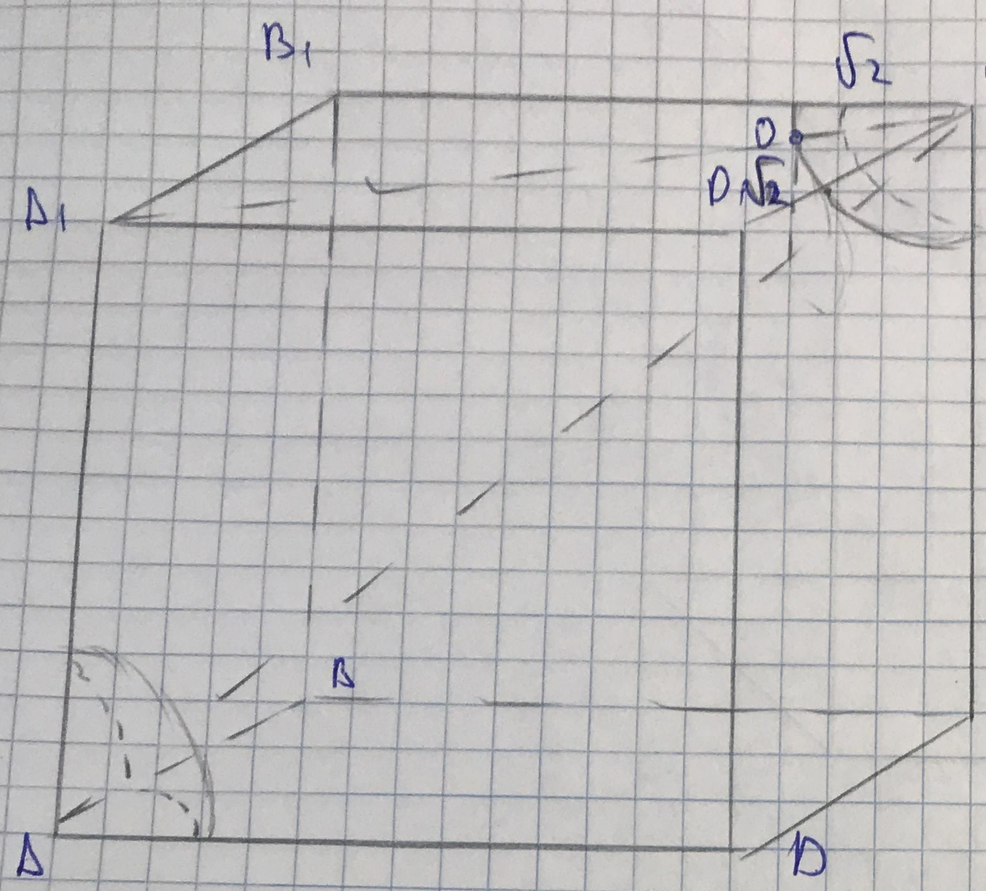
Задание номер: 7

Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ освещается
цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2}$,
направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.)
Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:

N 7



(т.к ребро куба > r шарика)

Т.к куб на каждой грани вырежет по $\frac{1}{8}$ окружности радиуса $\sqrt{2}$. Первая точка O будет на расстоянии $\sqrt{2}$ до A_1C_1 и $\sqrt{2}$ до C_1 (т.к куб расстояние пропорционально уменьшается т.к $O \in A_1C_1$)

Тогда на каждой из 6 граней по $\frac{1}{8} \cdot \pi r^2 =$

$\frac{6}{8} \cdot \pi (\sqrt{2})^2 = 3\pi$

Ответ: 3π

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $3k + m + 3n$.

Результат: 10

Введенный ответ:

№8

$\log_m n$ - рац $\Rightarrow$ $n = m^x$ - где x - рациональное и >0 (все числа >1)

$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}$

$\log_m n = x$ $\quad \log_n k = \log_{m^x} k = \frac{1}{x}\log_m k$

$k^{\sqrt{k}} = m^{\sqrt{\frac{1}{x}\log_m k}}$

$\sqrt{x} = \log_k(\sqrt[m]{\frac{1}{x}\log_m k})$

$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{x}\log_m k} \cdot \log_k m \quad / \cdot \sqrt{x} > 0$

$x = \sqrt{\log_m k} \cdot \log_k m$

$x = \sqrt{\log_m k} \cdot \sqrt{\log_k m} \cdot \sqrt{\log_k m}$

$x = 1 \cdot \sqrt{\log_k m}$ (в квадрат обе части, обе >0)

$x^2 = \log_k m \Rightarrow m = k^{x^2}$

$n = m^x = (k^{x^2})^x = k^{x^3}$

$3k + m + 3n = 3k + k^{x^2} + 3k^{x^3}$ (минимальное число)

k-натуральное x-рац, >0

мин при $k=2, x=2$ $\quad 3\cdot 2 + 2^4 + 3\cdot 256 = 768 + 16 + 6 = 790$

Ответ: 790