МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Афанасьева Анастасия Сергеевна

Технический балл: 70

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

$$\text{Найдите сумму цифр числа } D, \text{ если } D = 2^{58} \cdot 4^{26} \cdot 5^{102} - 2^{16} \cdot 4^{46} \cdot 5^{101} - 1.$$

Результат: 15

Введенный ответ:

(1)

$$D = 2^{58}\cdot(2^2)^{26}\cdot 5^{102} - 2^{16}\cdot(2^2)^{46}\cdot 5^{101} - 1 =$$

$$= 2^{58+2\cdot 26}\cdot 5^{102} - 2^{16+2\cdot 46}\cdot 5^{101} - 1 =$$

$$= 2^{110}\cdot 5^{102} - 2^{108}\cdot 5^{101} - 1 =$$

$$= 2^2\cdot 5\cdot 2^{108}\cdot 5^{101} - 2^{108}\cdot 5^{101} - 1 =$$

$$= 2^{108}\cdot 5^{101}\cdot(4\cdot 5 - 1) - 1 =$$

$$= 10^{101}\cdot 2^7\cdot 19 - 1 = 2432\cdot 10^{101} - 1 =$$

$$= 2431999\ldots99$$

(101 цифра)

$2^7 = 128$

$128\cdot 19 = 2432$

Сумма цифр этого числа равна

$2+4+3+1 + 101\times 9 = 10 + 909 = 919$.

Ответ: 919.

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных фиксика, а всего существует 14 видов фиксиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки фиксиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному фиксику всех 14 видов?

Результат: 15

Введенный ответ:

2

~~Количество различных кинде-сюрпризов с различными наборами 3 из 14 фиксиков~~ $\cancel{C_{14}^{3} = \frac{14!}{3!\cdot 11!} = \frac{14\cdot 13\cdot \cancel{12}^{2}\cdot \cancel{11!}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot \cancel{11!}} =}$

$\cancel{= 14\cdot 13\cdot 2}$

Количество разл. ~~кин~~ наборов 3 из 13 фиксиков: $C_{13}^{3} = \frac{13!}{3!\cdot 10!} = \frac{13\cdot \cancel{12}^{2}\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot \cancel{10!}} =$

$= 13\cdot 2\cdot 11 = 26\cdot 11 = 286$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если взять 287 наборов обязательно найдутся все 14 фиксиков, а если взять меньше 287, то в них могут оказать набора только каких-то 13ти фиксиков. $\Rightarrow$ нужно взять 287 фиксиков.

Ответ: 287

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{tg}\arccos x \leqslant \sin \operatorname{arctg} x$.

Результат: 15

Введенный ответ:

(3). $\operatorname{tg}(\arccos x) \le \sin(\operatorname{arctg} x)$

$\arccos x = \varphi \in [0;\pi] \Rightarrow x = \cos\varphi$

$\operatorname{arctg} x = \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \operatorname{tg}\alpha$

$\left.\begin{array}{l} x = \cos\varphi \\ \varphi \in [0;\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow x \in [-1;1]$

$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{tg}\alpha \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (-\infty;+\infty)$

$\Rightarrow$

$\arccos x \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$

ОДЗ: $\Rightarrow x \in [-1;1] \setminus \{0\} \Rightarrow x \in [-1;0) \cup (0;1]$.

$x = \cos\varphi \quad 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{x^2}$

$x = \operatorname{tg}\alpha \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha \ge 0$

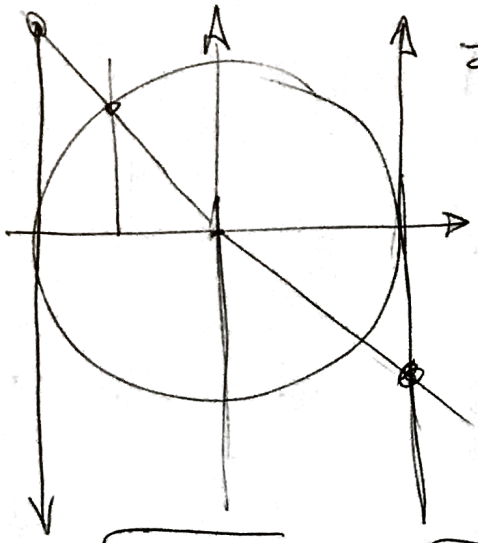
$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} =$

$= \frac{x^2}{x^2+1}$.

1) Рассмотрим $b \in [-1; 0)$

$x \in [-1; 0) \Rightarrow \arccos b \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow$



$\Rightarrow \operatorname{tg}(\arccos b) \in (-\infty; 0]$.

$x \in [-1; 0) \Rightarrow \operatorname{arctg} b \in \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\operatorname{arctg} b) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$.

$$-\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \leq -\sqrt{\frac{x^2}{b^2+1}}$$

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \geq \sqrt{\frac{x^2}{b^2+1}} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} \geq \frac{b^2}{b^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-b^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-b^2)(b^2+1)-b^4}{b^2(b^2+1)} \geq 0$$

$$\frac{1-b^4-b^4}{b^2(b^2+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2b^4}{b^2(b^2+1)} \geq 0$$

$b^2+1 > 0 \quad b^2 > 0 \Rightarrow \quad 1-2b^4 \geq 0$.

$1 \geq 2b^4 \Rightarrow b^4 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$. ~~С учетом~~ $\Rightarrow x \in [-1; 0) \Rightarrow$

~~ОДЗ~~ $\Rightarrow b \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 0\right)$.

2) Рассмотрим. $b \in (0;1]$.

$b \in (0;1] \Rightarrow \arccos b \in [0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(\arccos b) \in (0; +\infty)$.

$b \in (0;1] \Rightarrow \operatorname{arctg} b \in [0; \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\operatorname{arctg} b) \in [0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$$\sqrt{\frac{1-b^2}{b^2}} \le \sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}$$

$$\frac{1-b^2}{b^2} \le \frac{b^2}{b^2+1} \Leftrightarrow \frac{(1-b^2)(b^2+1)-b^4}{b^2(b^2+1)} \le 0.$$

$$\frac{1-2b^4}{b^2(b^2+1)} \le 0 \quad \begin{matrix} b^2>0 \\ b^2+1>0 \end{matrix} \Rightarrow 1-2b^4 \le 0.$$

$2b^4 \ge 1 \Rightarrow b^4 \ge \frac{1}{2} \Rightarrow x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}] \cup$

$\cup [\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1]$. С т.к. $x \in (0;1]$

$b \in [\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1]$.

Ответ: $x \in [-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 0) \cup [\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1]$.

Задание номер: 4

Хорды AB и AC одной окружности с центром O равны между собой, а центр другой окружности радиуса 8, описанной около треугольника ACO, удалён от точки B на расстояние 10. Найдите AC.

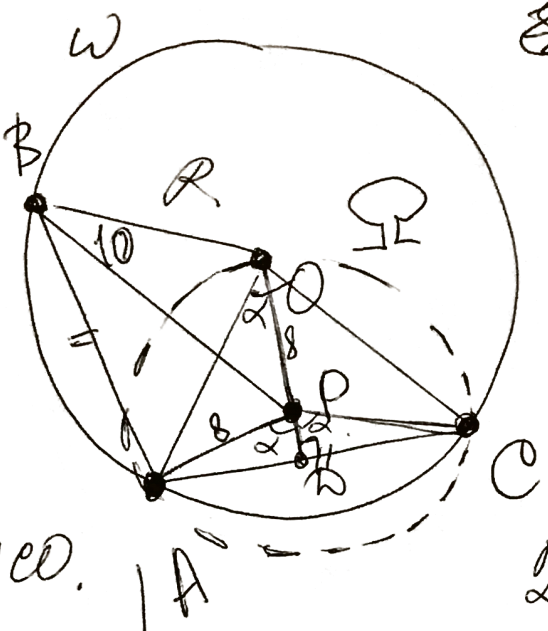
Результат: 0

Введенный ответ:

4.

окр ω
O - центр.
$AB = AC$ - хорды.
окр Ω описана ~~вокруг~~ около $\triangle ACO$.
P - центр.
r - радиус
$BP = 10$.
$r = 8$

AC - ?



$\triangle BOA = \triangle AOC$
$BO = R$.

$\triangle AOC$ - равнобедр.
$\angle AOC = \alpha$.
OD - биссектр., высота, медиана.

$AC = 2 \cdot 8 \cdot \sin\alpha$.

$2R \sin\frac{\alpha}{2} = AC$

$\angle BOP = \frac{3}{2}\alpha$.

$\underset{\triangle BOP}{\text{II cos}}: R^2 + 8^2 - 2 \cdot R \cdot 8 \cos\left(\frac{3}{2}\alpha\right) = 10^2$

$OD = 8 + 8\cos\alpha = 8(1 + \cos\alpha)$

$R\cos\alpha = 8(1 + \cos\alpha)$.

Поворот относительно т. O на α:

$\triangle BOA \to \triangle AOC$.

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел $x^3 + x + a - 7$ и $a + 2^{4-x} - 3^{x-2}$

Результат: 10

Введенный ответ:

(5). $x^3 + b + a - 7 = z$

$a + 2^{4-b} - 3^{b-2} = y$

Найти a: $\forall x$ наиб. из y, z положительно, то есть хотя бы одно из y, z положительно т.к. если одно полож., другое отриц., то наиб. положительно, и если оба полож., то неважно какое из них наиб., оно всё равно полож.

$x^3 + b - 7 \geq z - a$

$a + 2^4 \cdot \frac{1}{2^b} - 3^b \cdot \frac{1}{9} = y - a$

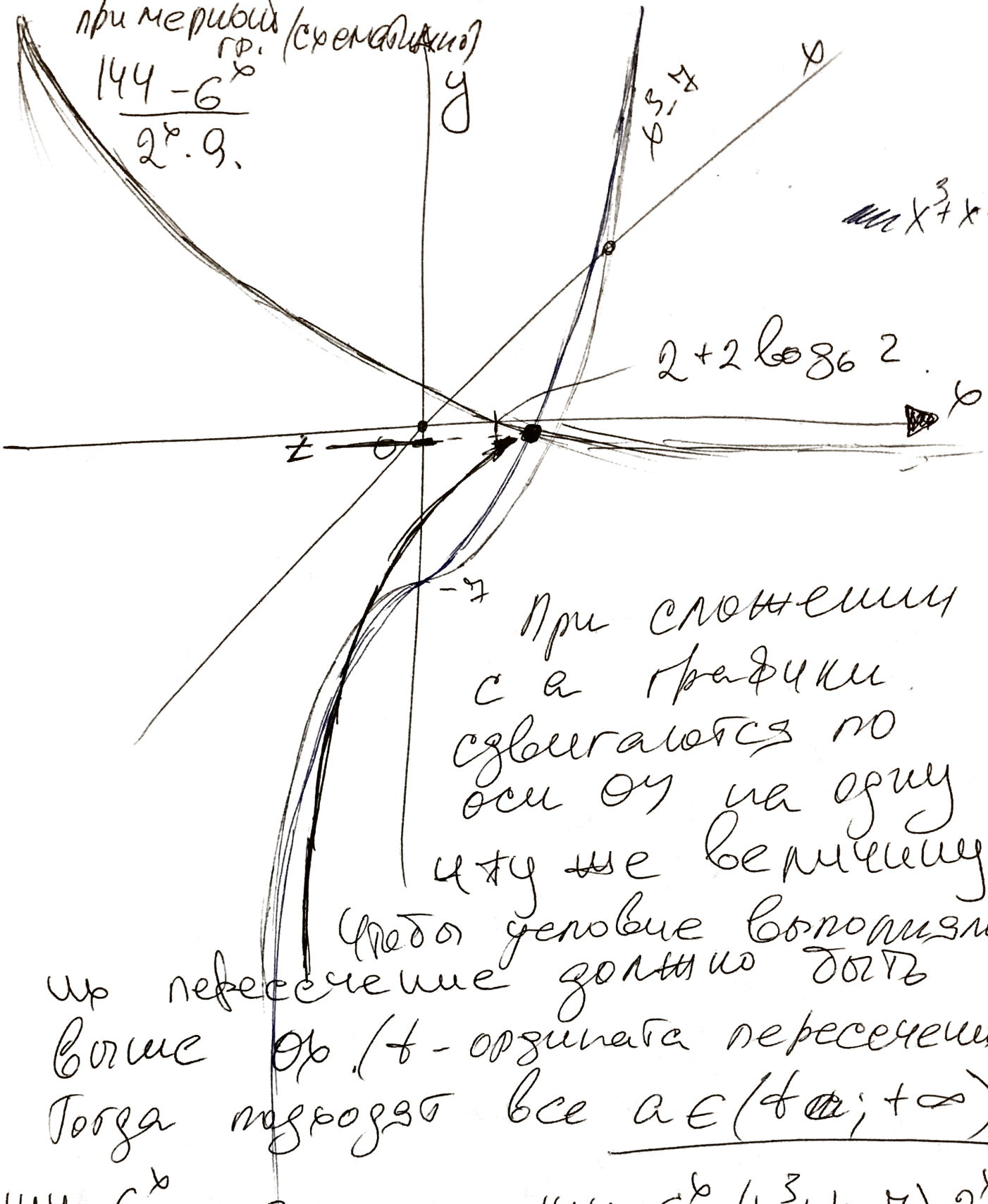
$\frac{16 \cdot 9 - 3^b \cdot 2^b}{2^b \cdot 9} = \frac{144 - 6^b}{2^b \cdot 9} = y - a.$

$2^b > 0,$

$y - a = 0$ при $b = \log_6 144 = \log_6 36 + \log_6 4 = 2 + 2\log_6 2.$

$3. > 2 + 2\log_6 2 > 2$

$\frac{144 - 6^0}{2^0 \cdot 9} = \frac{144 - 1}{9} = \frac{143}{9}.$



При сложении с а графики сдвигаются по оси Oy на одну и ту же величину.

Чтобы условие выполнялось их пересечение должно быть выше Ob. (t - ордината пересечения)

Тогда подходят все $a \in (t; +\infty)$.

$\frac{144-6^b}{2^b \cdot 9} = b^3+b-7$ $\quad 144-6^b = (b^3+b-7)\cdot 2^b \cdot 9$.

$144-6^3$ $\quad 27+3-7\cdot 2^3 \cdot 9$.

Задание номер: 6

Автомобили Нива и Тойота едут по кольцевой трассе испытательного полигона, четверть которой проходит по грунтовой дороге, а оставшаяся часть - по асфальтовой.
Скорость Нивы на грунтовой дороге равна 80 км/ч, а на асфальтовой - 90 км/ч. Скорость Тойоты на грунтовой дороге равна 40 км/ч, а на асфальтовой - 120 км/ч. Автомобили одновременно стартуют в начале грунтовой части трассы и сначала едут по этой грунтовой части. На каком по счёту круге один из автомобилей впервые обгонит другой?

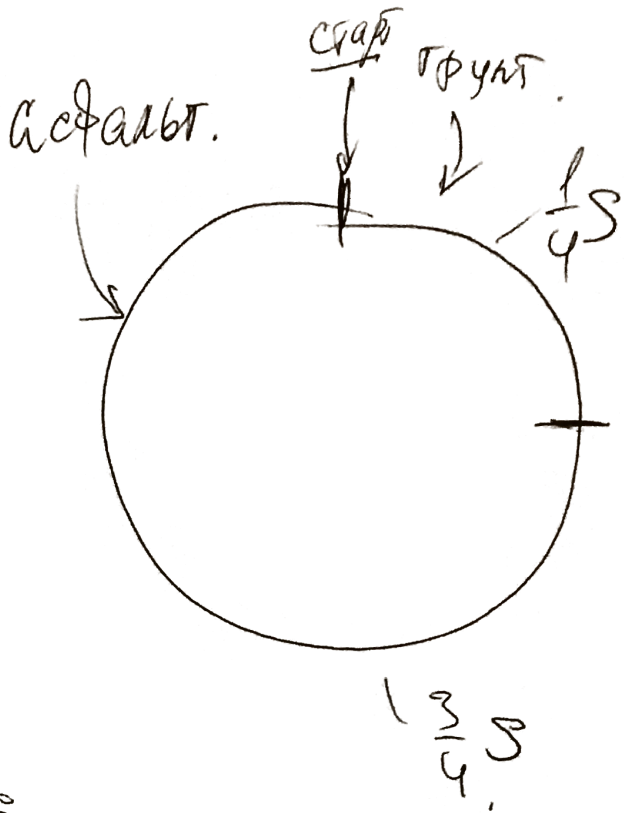
Результат: 0

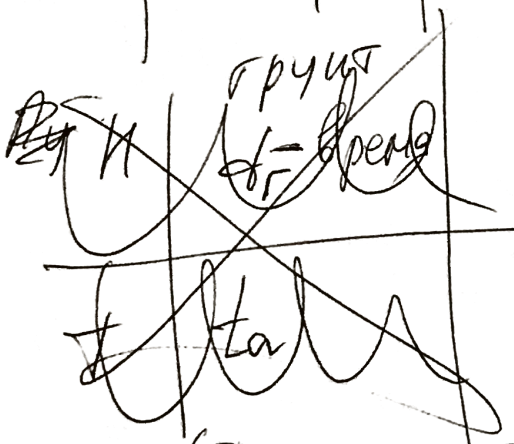
Введенный ответ:

(6) Нива – Н.

Тойота – Т.

	грунт	асфальт.
Н	$80\frac{км}{ч}$	$90\frac{км}{ч}$
Т	$40\frac{км}{ч}$	$120\frac{км}{ч}$





Через круг

$$\frac{S}{4\cdot 80}\cdot(80-40)+$$

$$+\left(\frac{S}{4\cdot 40}-\frac{S}{4\cdot 80}\right)\cdot(90-40)+$$

$$+\left(\frac{3S}{4\cdot 90}-\frac{S}{4\cdot 40}+\frac{S}{4\cdot 80}\right)\cdot(120-90)+$$

$$+\left(\frac{3S}{4\cdot 120}-\frac{3S}{4\cdot 90}+\frac{S}{4\cdot 40}-\frac{S}{4\cdot 80}\right)\cdot(120-80)$$

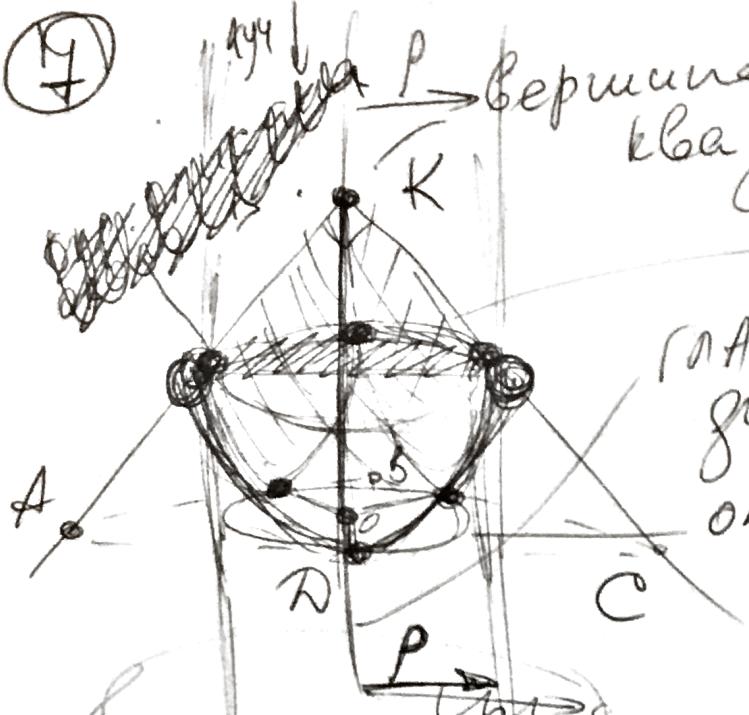
Задание номер: 7

Куб с ребром $a = 1$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.) Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:

(17)

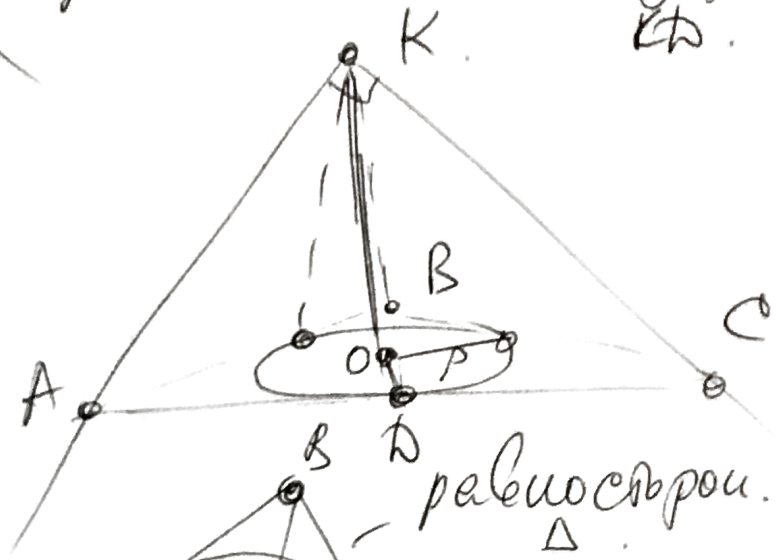


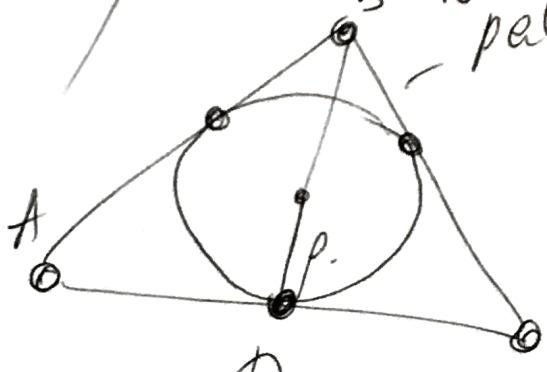
P → вершина квадрата

заштрихованная область – освещенная т.е. $\frac{3}{4}$ окружности с радиусом KD.

главная диагональ

окр. вписана





– равносторон. △.

$BD = 3\rho$. $AB = \frac{BD}{\sqrt{3}/2} = BD$

$AB = \frac{2BD}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3\rho}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\rho$.

$KD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB = \frac{2\sqrt{3}}{2}\rho = \sqrt{3}\rho$.

$\frac{3}{4}\pi (KD)^2 = \frac{3}{4}\pi (\sqrt{3}\rho)^2 = \frac{3}{4}\pi \cdot 3\rho^2 = \frac{9}{4}\pi (2-\sqrt{2})$

Ответ: $\frac{9}{4}\pi (2-\sqrt{2})$

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 3m + n$.

Результат: 15

Введенный ответ:

(8). $m, n, k \in \mathbb{N}$, $m, n, k > 1$.

m, n, k - различные.

$\log_m n$ - рационально.

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

$\min(k + 3m + n)$ - ?

$$k^{\log_m^{1/2} n} = m^{\log_n^{1/2} k}$$

ОДЗ

$$\begin{cases} \log_m n \geq 0 \\ \log_n k \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \log_n m = \frac{1}{\log_m n} \geq 0$$

$$\log_m k = \frac{\log_n k}{\log_m n} \geq 0.$$

n, m, k - целые

$\log_m n$ рационально $\Rightarrow$ ~~или конечная дробь~~

$\Rightarrow$ ~~$\log_m n$ целое~~, ~~иначе~~

~~[illegible] иррационален~~.

$\Rightarrow n$ степень m.

$$k^{\sqrt{\log_n m}} = m^{\sqrt{\log_n k}}$$

$$\sqrt{\log_n k} = \log_m k \cdot \sqrt{\log_m n}$$

$$\frac{\sqrt{\log_n k}}{\sqrt{\log_m k}} = \sqrt{\log_m k} \cdot \sqrt{\log_m n}$$

$$\sqrt{\log_n k \cdot \log_k m} = \sqrt{\log_k k \cdot \log_n m} =$$

$$= \sqrt{\log_m k} \cdot \sqrt{\log_m n}$$

$$\frac{\sqrt{\log_n m}}{\sqrt{\log_m k}} = \sqrt{\log_n m \cdot \log_n m} = \sqrt{\log_m k}$$

$$\log_n m = \sqrt{\log_m k}$$

$$\log_n^2 m = \log_m k.$$

$$\log_n m = t \qquad n = m$$

$$\log_m k = t^2 \qquad m^{t^2} = k = n^{t^3}$$

$$\log_n k + 3m + n = n^{t^3} + 3n^t + n = f(t)$$

$$f'(t) = n^{t^3} \ln n \cdot 3t^2 + 3n^t \cdot \ln n > 0.$$

$f(t)$ возрастает.

$f'(u) = t^3 \cdot u^{(t^3-1)} + 3t \cdot u^{(t-1)} + 1$,

при $t > 0$ возрастает

при $t < 0$ убывает.

t близко к 0. $t \neq 1; 0$.

u близко к 2

$u = \sqrt[256]{16}$ $u = 16$. $u = 2$

$2 + 3 \cdot 16 + 256 =$