МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Беляев Артём Русланович

Технический балл: 75

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

$$\text{Найдите сумму цифр числа } C, \text{ если } C = 2^{70} \cdot 4^{21} \cdot 5^{105} - 2^{32} \cdot 4^{39} \cdot 5^{104} - 1.$$

Результат: 15

Введенный ответ:

№1

$C = 2^{70} \cdot 2^{42} \cdot 5^{105} - 2^{32} \cdot 2^{78} \cdot 5^{104} - 1 =$

$= 2^{112} \cdot 5^{105} - 2^{110} \cdot 5^{104} - 1 =$

$= 10^{105} \cdot 2^7 - 10^{104} \cdot 2^6 - 1 =$

$= 10^{104} (1280 - 64) - 1 =$

$= 10^{104} \cdot 1216 - 1 =$

$= 1216\underbrace{0 \ldots 0}_{104} - 1 =$

$= 1215\underbrace{9 \ldots 9}_{104}$

Σ цифр: $1 + 2 + 1 + 5 + 9 \cdot 104 =$

$= 9 \cdot 105 = 936 + 9 = 945$

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных лунтика, а всего существует 13 видов лунтиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки лунтиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному лунтику всех 13 видов?

Результат: 15

Введенный ответ:

~~12~~ 12

Ответ: ~~[illegible]~~ 221

Оценка: 12 лужников можно распределить по тройкам $C_{12}^3 = 220$ способами. т.е. ~~[illegible]~~

13 лужник может лежать в 221 коробке.

Д-во, почему 221 хватит: допустим ~~х~~ нет хотя бы 1 лужника, т.е. среди 221 ниндера не более 12 лужников, но из 12-ти лужников можно составить не более $C_{12}^3 = 220$ наборов.

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{tg}\arccos x \leqslant \sin \operatorname{arctg} x$.

Результат: 15

Введенный ответ:

№3 Решим задачу, используя алгоритм

1. $-1 \le x \le 1$

2. решим основ. ур-ие

$$tg(\arccos x) = \sin(\operatorname{arctg} x)$$

$$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1; \quad \neq$$

$$\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

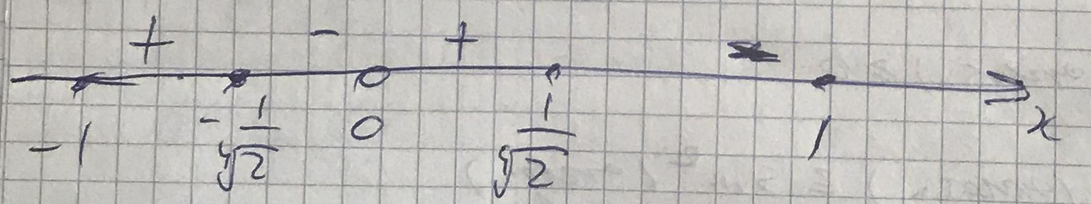
$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sqrt{1-x^2} = x^2$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

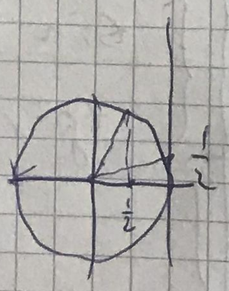
3. Заметим, что $\arccos x \neq \frac{\pi}{2}$, т.е. $x \neq 0$

4. $f(x) = tg(\arccos x) - \sin(\operatorname{arctg} x)$



$$f(1) = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - \sin(\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}) > 0$$ ч.т.



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - \sin(\operatorname{arctg} -\tfrac{1}{2}) < 0$$

$$f(-1) = 0 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$$

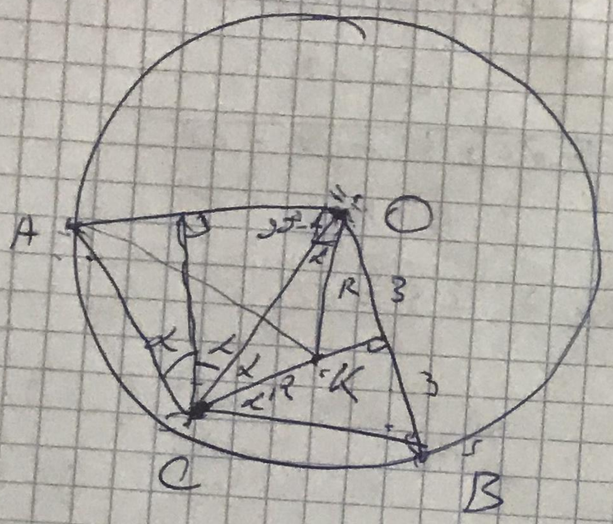
Задание номер: 4

Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O, если её центр удален от точки A на расстояние 10.

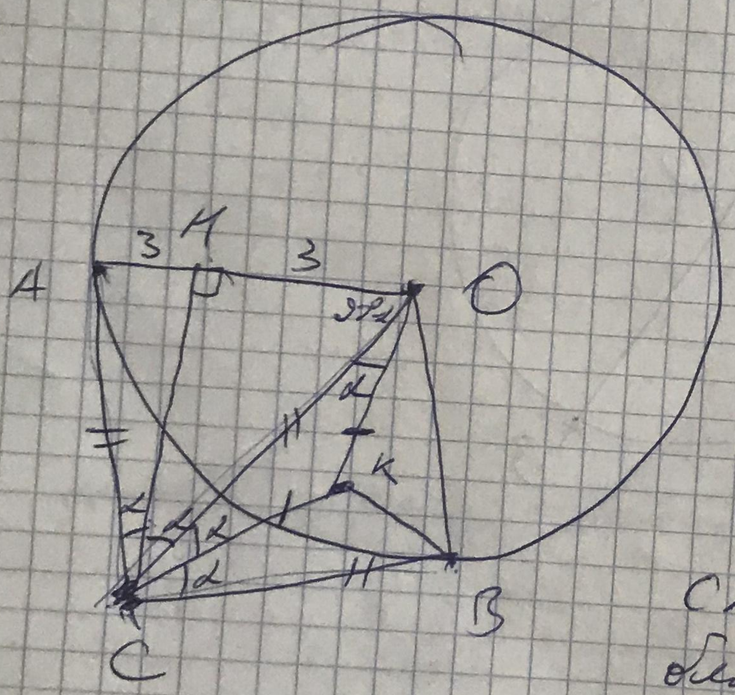
Результат: 10

Введенный ответ:

№4



№4



$\angle ACO = \alpha = \angle OCB$

$\triangle ACO$ - р/б

$CH \perp AO \Rightarrow HC$ - бис.

$\triangle AOB$ - р/б

$AC = CO = CB$

K - ц. оп. окр. $\triangle COB$

~~$CK \perp OB$~~ $\triangle OCB$ - р/б

CK - сер. пер. к $OB \Rightarrow$ бис.

$\angle HCO = \alpha \Rightarrow \angle COH = 90° - \alpha$

~~$\angle ACO$~~

$CK = KO \Rightarrow \angle KCO = \angle COK = \alpha$

т.е. $\angle HOK = 90° - \alpha + \alpha = 90°$

$\Rightarrow OK^2 = AK^2 - HO^2 =$

$= 100 - 36 = 64$

$OK = 8$

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел $2^{x-1} - 3^{4-x} + a$ и $a + 5 - x^3 - 2x$ отрицательно.

Результат: 15

Введенный ответ:

№5 ~~[illegible]~~ найдем, ~~когда~~ ~~[illegible]~~ при каких значениях x первое больше

для этого достаточно решить:

$$f(x) = 2^{x-1} - 3^{4-x} > 5 - x^3 - 2x = g(x)$$

заметим, что $f(x) \uparrow$, а $g(x) \downarrow$ $\Rightarrow$

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ у ур-ия $f(x) = g(x)$ не более 1 корня

заметим, что $f(2) = g(2)$

действительно, $2^1 - 3^2 = -7 = 5 - 8 - 4$

$\Rightarrow$ при x $(-\infty; 2)$ ~~[illegible]~~ первое ~~больше~~ меньше второго

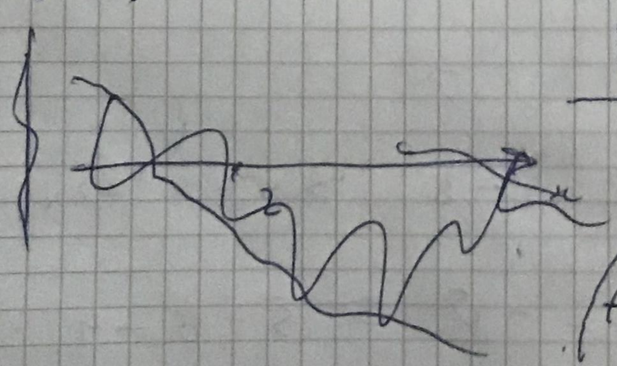
~~[illegible]~~ для того

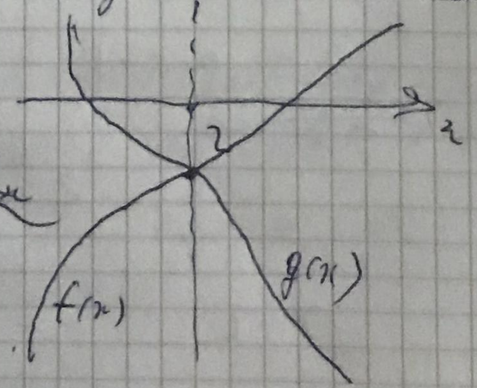
заметим, что достаточно и необходимо, чтобы наименьшее из двух выражений было отрицательно это то, что при ~~[illegible]~~ $x = 2$ оба выражения были отрицательны

т.к. $f(x) + a \uparrow$ и $g(x) + a \downarrow$ на R

~~[illegible]~~ a при $x = 2$ они меняются местами, т.е. то, которое было большим становится меньшим. ~~т.е. если меньшее до $x = 2$ было~~

~~[illegible]~~





$\Rightarrow$ $-7 + a < 0$

$a < 7$ Ответ: $a < 7$

Задание номер: 6

Снегоход и квадроцикл соревнуются на зимней кольцевой трассе, четверть которой покрыта рыхлым снегом, а остальная часть - плотным снегом. Снегоход едет по рыхлому снегу со скоростью 32 км/ч, а по плотному - со скоростью 36 км/ч. Квадроцикл едет по рыхлому снегу со скоростью 16 км/ч, а по плотному - со скоростью 48 км/ч. Снегоход и квадроцикл начинают движение одновременно в начале части трассы, покрытой рыхлым снегом, и сначала едут по этой части. Какое из транспортных средств первым обгонит другое, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Результат: 0

Введенный ответ:

квадрацию доедет до плотного снега.

$\frac{3}{4} - \frac{9}{32} = \frac{15}{32}$ останется снегоходу до рыхлого снега

$\frac{15}{32} \cdot \frac{15}{32 \cdot 36} \cdot 48 = \frac{5}{8}$ проедет квадрацию,

когда снегоход доедет до рыхлого снега.

т.е. кв. отстанет за 1 круг на $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

часть.

№6 средняя угловая скорость снегохода:

$$\omega_{ст} = \frac{1}{4} \cdot 32 + \frac{3}{4} \cdot 36 = 35$$

$$\omega_{кв.} = \frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{3}{4} \cdot 48 = 40$$

$\omega_{кв} > \omega_{ст} \Rightarrow$ он обгонит первым

$\frac{\omega_{кв}}{\omega_{ст}} = \frac{40}{35} = \frac{8}{7}$ т.е. через НОК(8;7) = 56 круг 8 ягу снегоходом и кв. будет ровно кругу, т.е. один обгонит другого.

Ответ: кв. обгонит снегоход на 56 круге

Задание номер: 7

Куб с ребром $a = 1$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.) Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:

Ответ не был дан

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $2k + m + 2n$.

Результат: 5

Введенный ответ:

№8 $\log_m n = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

$n = m^{\frac{a}{b}} \Rightarrow m = n^{\frac{b}{a}}$

$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \log_n k = \sqrt{\log_n k} \cdot \log_n n^{\frac{b}{a}}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\log_n k} = \frac{b}{a}$

$\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} \cdot \sqrt{\log_n k} = 1$

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \log_n k = 1$

$\log_n k = \left(\frac{b}{a}\right)^3$, но ~~$\log_n m = \frac{b}{a}$~~

$\log_n m = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow k = m^{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$k = m^{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ ~~min (2k + m + 2n) будет при~~

$n = m^{\frac{a}{b}}$ ~~min m~~ $\Rightarrow m = 2$

$m = m$ ~~$m, k, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$~~

~~т.к. $m \neq n$, но $\frac{a}{b} > 1$~~, т.е. $\frac{a}{b} = 2$

~~$k = 8$, $n = 2^2 \Rightarrow$~~

~~$2k + m + 2n = 2 \cdot 8 + 2 + 2 \cdot 4 = 26$~~

~~Ответ: 26~~ $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^{\left(\frac{b}{a}\right)^2} \in \mathbb{N}$ и $m^{\frac{a}{b}} \in \mathbb{N}$

~~min~~ $\Rightarrow$ m должно быть числом вида g^t

где $g, t \in \mathbb{N} \Rightarrow$ min m будет 4

тогда min $k = 16$, min $n = 2$

Ответ: 40