МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Голубев Кирилл Алексеевич

Технический балл: 65

Из них по арелляции: 0.0

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

$$\text{Найдите сумму цифр числа } C, \text{ если } C = 2^{70} \cdot 4^{21} \cdot 5^{105} - 2^{32} \cdot 4^{39} \cdot 5^{104} - 1.$$

Результат: 15

Введенный ответ:

№1

$C = 2^{70} \cdot 4^{24} \cdot 5^{105} - 2^{32} \cdot 4^{39} \cdot 5^{104} - 1 = 2^{112} \cdot 5^{105} - 2^{110} \cdot 5^{104} =$

$= 2^{104} \cdot 5^{104}(5 \cdot 2^8 - 2^6) + 1 = 10^{104}(1280 - 64) - 1 =$

$= 10^{104} \cdot 1216 - 1 = 1216\underbrace{0000\ 0}_{104} - 1 = 1215\underbrace{9\ldots9}_{104}$

сумма цифр числа справа

$\underbrace{1+2+1+5}_{9} + 104 \cdot 9 = 105 \cdot 9 = 945$

Ответ: 945

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных лунтика, а всего существует 13 видов лунтиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки лунтиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному лунтику всех 13 видов?

Результат: 15

Введенный ответ:

№2

Обозначим различных мультиков как $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$. a_1 – первый мультик

a_{13} – 13-ый мультик

Тогда в любых двух к.с. различные тройки мультиков.

Если мы ~~возь~~ купим $C_{12}^3 = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 11\cdot \cancel{12}^2}{\cancel{6}_1} = 220$ киндеров, то нам может не хватить т.к. в них могут оказаться ~~все~~ наборы ни в одном из которых не будет a_1 мультика (220 – количество разл. ~~тройки~~ способов выбрать 3 эл из 12)

Докажем, что 221 ~~мультик~~ киндер подойдёт. Действительно, предположим противное и 221 ~~мульти~~ киндера не хватило, чтобы собрать 13 разл. мультика. Не умаляя общности будем считать, что у нас нет мультика a_1. Тогда в 221 киндере 221 различная тройка мультиков.

Но такого быть не может, т.к. все тройки различные. и из 12 (или меньшего кол-во) киндеров мы можем выбрать не более $C_{12}^3 = 220$ троек. значит.

~~Ни~~ 221 троек точно хватит

Ответ: 221 киндер

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{ctg} \arcsin x + \cos \operatorname{arctg} x > 0.$

Результат: 15

Введенный ответ:

№3

$ctg(\arcsin x) + \cos(\operatorname{arctg} x) > 0$

Пусть $\alpha = \arcsin x$ $\quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$b = \operatorname{arctg} x$ $\quad b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

~~и Н.Д.~~ ~~ст.~~ н.р. $\begin{cases} ctg\,\alpha + \cos b > 0 \\ \sin\alpha = x \\ tg\, b = x \end{cases}$

$\cos 2b = \frac{1-tg^2 b}{1+tg^2 b} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\quad 2\cos^2 b - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$2\cos^2 b = \frac{2}{1+x^2}$

$\cos^2 b = \frac{1}{1+x^2}$

т.к. $b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$\cos b \geq 0$

$\cos b = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$

$\sin\alpha = x$, т.к. $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\alpha \geq 0$

$\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2+1}} > 0 \\ x \in [-1; 1],\ x \neq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^4}+x}{\sqrt{x^2+1}\cdot x} > 0 \\ x \in [-1; 0) \cup (0; 1] \end{cases}$

$\sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^4}+x}{x} > 0 \\ x \in [-1; 0) \cup (0; 1] \end{cases}$;

I случай $\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{1-x^4} + x > 0 \\ x \in [-1; 0) \cup (0; 1] \end{cases}$ — верно для $x \in (0; 1]$

т.к. $\sqrt{1-x^4} > 0$ и $x > 0$

то $\sqrt{1-x^4} + x > 0$ и $x \leq 1$

II случай

$$\begin{cases} x<0 \\ \sqrt{1-x^4}+x<0 \\ x\in[-1;0)\cup(0;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \sqrt{1-x^4}<-x \\ x\in[-1;0)\cup(0;1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0 \\ 1-x^4<x^2 \\ x\in[-1;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+x^2-1>0 \ (1) \\ x<0 \ x\in[-1;0) \end{cases}$$

(1) $x^4+x^2-1>0$ ВНП. $t=x^2$, $t>0$, $t\in(0;1]$

$$\begin{cases} t^2+t-1>0 \\ t\in(0;1] \end{cases}$$

$t^2+t-1=0$

$D=1+4=5$, $D>0$

$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$t\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$

$t\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \vee\ 1 \Leftrightarrow -1+\sqrt{5}\ \vee\ 2 \quad \sqrt{5}\ \vee\ 3$

$t\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right] \Rightarrow x\in\left[-1;-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$

I сл. + II сл. $\Rightarrow x\in\left[-1;-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\cup(0;1]$

Ответ: $\left[-1;-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\cup(0;1]$

УР 2

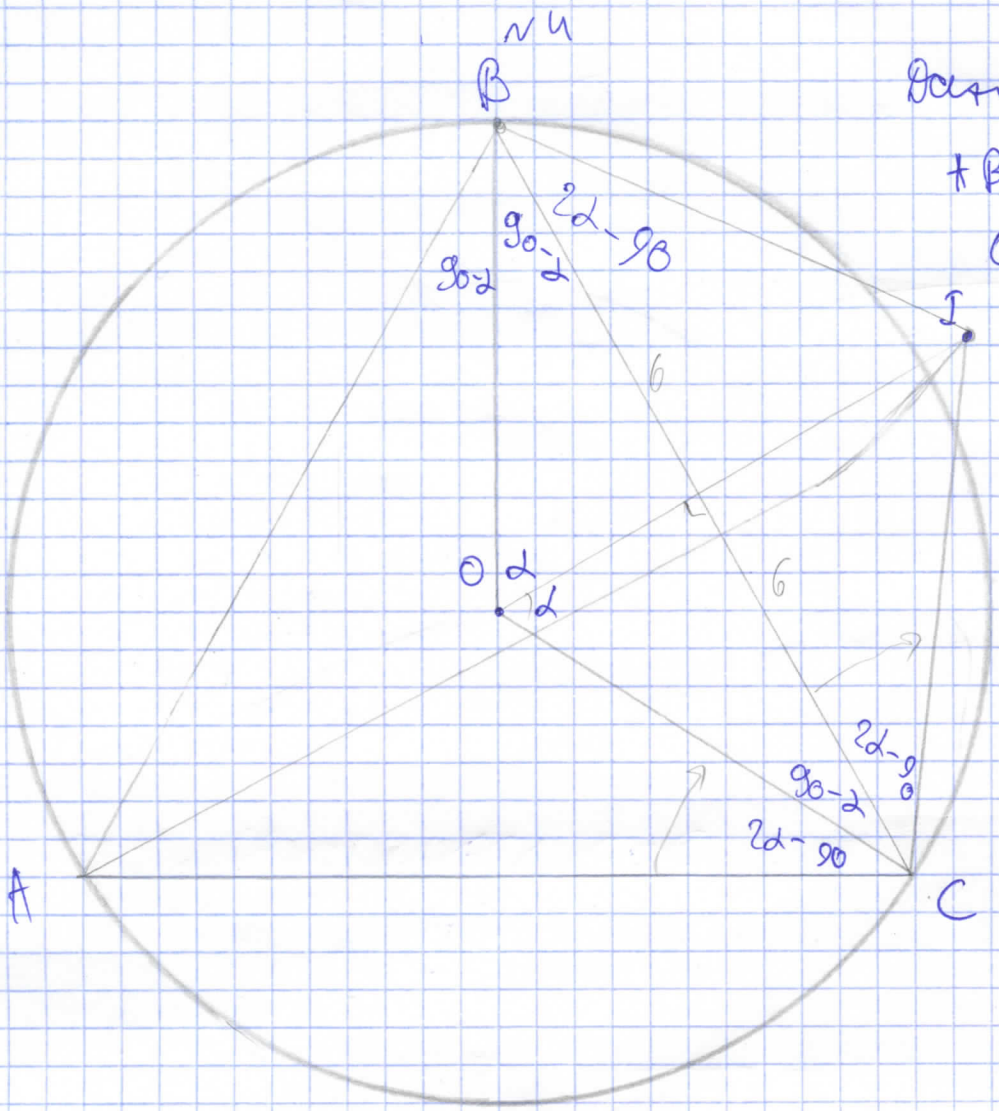
Задание номер: 4

Хорды AB и BC одной окружности с центром O равны по 12, а центр другой окружности, проходящей через точки B, C и O, удалён от точки A на расстояние 15. Найдите радиус второй окружности.

Результат: 5

Введенный ответ:

№4



Дано:

$AB = BC = 12$

O центр. оп. окр ABC

I центр. второй окр. проходящей через BOC

$AI = 15$

BI - ?

Решение

1) I - лежит на сер. пер. к BC

2) Т.к. $BO = OC$ - как радиус и OI сер пер. к BC BOC - равноб и $\angle BOI = \angle IOC$

Пусть $\angle IOC = \alpha$, тогда т.к. $BI = IO = IC$ - как радиусы, то $\angle IBO = \angle ICO = \alpha$

3) BO - сер пер к AC и ABC - равноб и OI сер пер к BC $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCO = \angle OBC = 90 - \alpha = \angle AOB$;

4) $\angle AOC = 2\angle ABC = 360 - 4\alpha \Rightarrow \angle OCA = 2\alpha - 90$

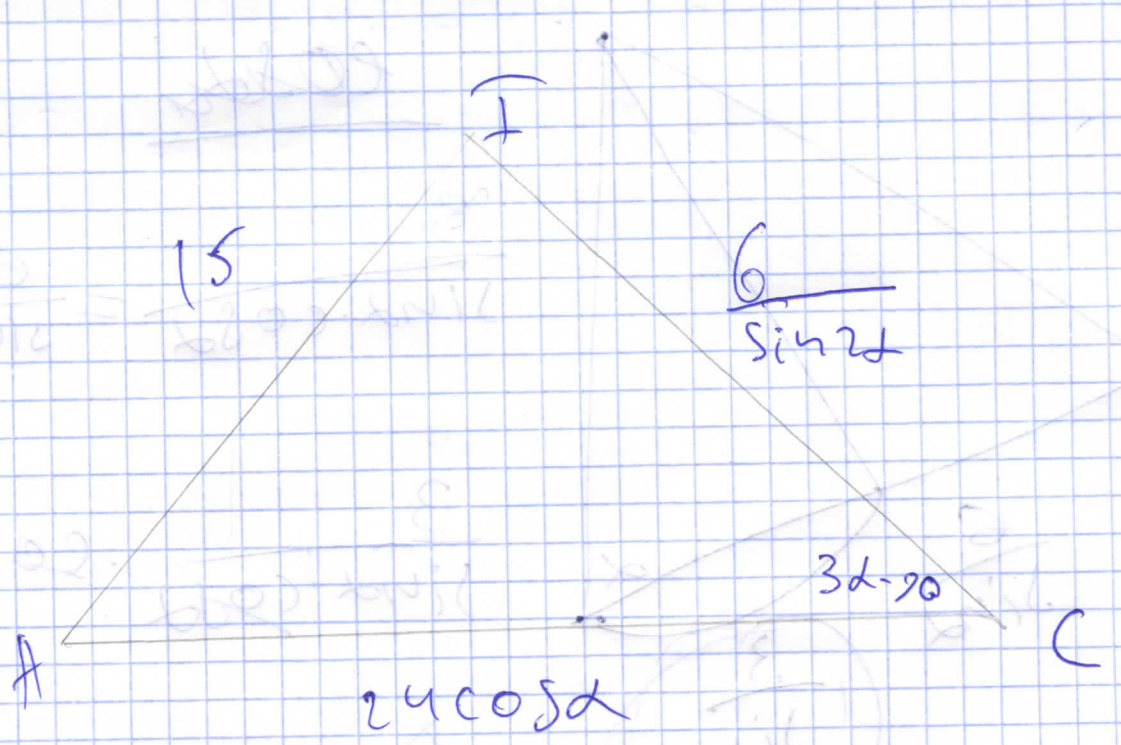
$\Rightarrow \angle ACI = 4\alpha - 180 + 90 - \alpha = 3\alpha - 90$

5) $OC = \frac{6}{\sin\alpha}$ из $\triangle OIC$ $IC = \frac{3}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{6}{\sin 2\alpha}$

($\triangle BOC$)

$AC =$

6)



По т. косинусов в $\triangle AIC$

$$AI^2 = AC^2 + CI^2 - 2\cos(3\alpha - 90) \cdot AC \cdot CI$$

$$225 = 24^2 \cdot \cos^2 2\alpha + \frac{36}{\sin^2 2\alpha} - 2\sin 3\alpha \cdot \frac{24 \cdot 3}{\sin 2\alpha}$$

$$225 = 24^2 \cdot \cos^2 2\alpha + \frac{36}{\sin^2 2\alpha} - 6 \cdot 24 \cdot \frac{(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

$$225 = 24\cos^2 2\alpha + \frac{36}{\sin^2 2\alpha} - 6 \cdot 24(3 - 4\sin^2\alpha)$$

$$225 = 24\cos^2 2\alpha + \frac{36}{\sin^2 2\alpha} - 432 + 4\sin^2 2\alpha$$

$\sin^2 2\alpha = t$

$$225 = 24(1-t) + \frac{36}{2t(1-t)} - 432 + 4t$$

$$657 = 24 - 24t + 4t + \frac{18}{t(1-t)}$$

$$633 = -20t + \frac{18}{t(1-t)}$$

$$633 = \frac{-20t^2 + 20t + 18}{t - t^2}$$

ОДЗ

$$633t - 633t^2 = -20t^3 + 20t^3 + 18$$

$$20t^3 - 633t^2 + 613t^2 - 633t + 18 = 0$$

$t = \frac{1}{2}$

$\sin^2 x = 1$

$IC = 6$

Ответ: 6

СФР 3

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел $x^3 + x + a - 7$ и $a + 2^{4-x} - 3^{x-2}$

Результат: 0

Введенный ответ:

№5

Заметим, что нам не удовлетворяют те a, при которых сущ. x, что оба числа (не полож.) отрицательны (или одно <0, а другое $=0$) действительно, если когда оба >0, наибольшее число положительно, когда одно большее нуля, то оно наибольшее и полож..

Найдём те a, для которых сущ. x, что оба числа ≤ 0 и возьмем оставшиеся a.

Заметим, что первое число $(x^3+x+a-7)$ принимает отр. значения т.к. при ~~очень ма~~ $x \to -\infty$ $x^3+x+a-7 \to -\infty$

$$\begin{cases} x^3+x+a-7 \leq 0 \\ a+2^{4-x}-3^{x-2} \leq 0 \end{cases}$$ – система должна иметь хотя бы 1 корень

$g(x) = a+2^{4-x}-3^{x-2}$

$g(2) = a+3$

$g(3) = a+2-3 = a-1$

$f(x) = x^3+x+a-7 \leq 0$

$f(2) = a+2$

~~$f(3)=1$~~

При $x=a$ и $x=-a$

$x=a^2$ и $x=-a^2$

~~система имеет~~ должна иметь хотя бы

① $x=-a^2$

$$\begin{cases} -a^6-a^2+a-7\le 0 \\ a+2^{4+a^2}-3^{-a^2-2}\le 0 \end{cases}$$

<0

→ при всех $a<0$

$a<0$ - не подходят.

При $a\ge 0$ хотя бы одно из чисел положительно при любом x

Ответ: $a\ge 0$

Вар 2.

Задание номер: 6

Саша едет на самокате, а Галя - на гироскутере. В горку Саша едет на самокате со скоростью 8 км/ч, а под горку - со скоростью 24 км/ч. Галя на гироскутере едет в горку со скоростью 16 км/ч, а под горку - со скоростью 18 км/ч. Саша и Галя соревнуются на кольцевом треке, четверть которого составляет подъём, а остальную часть - спуск. Они одновременно трогаются вверх в начале подъёма. Кто из них первым обгонит другого, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Результат: 10

Введенный ответ:

№6

S - длина трека. Тогда Саша проезжает 1 круг за $\frac{S}{4 \cdot 8} + \frac{3S}{4 \cdot 24} = \frac{S}{32} + \frac{S}{32} = \frac{S}{16}$

А Даша за $\frac{S}{4 \cdot 16} + \frac{3S}{4 \cdot 18} = \frac{S}{64} + \frac{S}{24} = \frac{(24+64)S}{24 \cdot 64} =$

$\frac{S}{6} \pm \frac{(6+16)S}{16 \cdot 24} = \frac{(3+8)S}{12 \cdot 16} = \frac{11S}{192}$

$\frac{S}{16} \vee \frac{11S}{192} \; ; \; \frac{1}{16} \vee \frac{11}{192} \; ; \; | \overset{?}{\vee} \frac{11}{12}$

=) Даша проедет круг быстрее Саши, а значит в какой-то момент его обгонит.

Пусть t_4 - время через которое они впервые встретятся, тогда

~~$\frac{S}{16} t + \frac{11S}{192} t = S$~~ (~~Даша проедет на круг больше Саши~~)

~~$\frac{S}{192}$~~

Тогда Даша проедет на 1 круг больше Саши. Причём она сделала это поднимаясь в гору т.к. в гору её скорость больше

Пусть x — кол-во целых кругов сами до встречи ~~кол~~, y — остаток.

$$\cancel{\frac{8x}{16} + \frac{35x}{}} \quad \cancel{\frac{11S}{192} \cdot x + \frac{y}{8} = \frac{y}{16} +}$$

$$\frac{S}{16} \cdot x + \frac{y}{8} = \frac{y}{16} + \frac{S11}{192}(x+1)$$

$$\frac{y}{16} = \frac{S11}{192}x - \frac{Sx}{16} + \frac{S11}{192}$$

$$\frac{y}{16} = \frac{Sx \cdot 11 - Sx \cdot 12}{192} + \frac{S11}{192} = -\frac{Sx}{192} + \frac{S11}{192}$$

$$\frac{y}{16} = \frac{S(11-x)}{192} \qquad y = \frac{S(11-x)}{12}$$

$$0 \le y \le \frac{S}{4} \quad x \in Z$$

$$0 \le \frac{S(11-x)}{12} \le \frac{S}{4}$$

$$0 \le \frac{11-x}{12} \le \frac{1}{4}$$

$$0 \le 11 - x \le 3$$

$$-11 \le -x \le -8$$

$$11 \ge x \ge 8$$

$x = 8 \rightarrow$ 9 круг сами $\rightarrow$ 10 Гами

Ответ: Гамя обложит сами на 10 своём круге

стр 2

Задание номер: 7

Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ освещается
цилиндрическим лучом света
радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.)
Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:

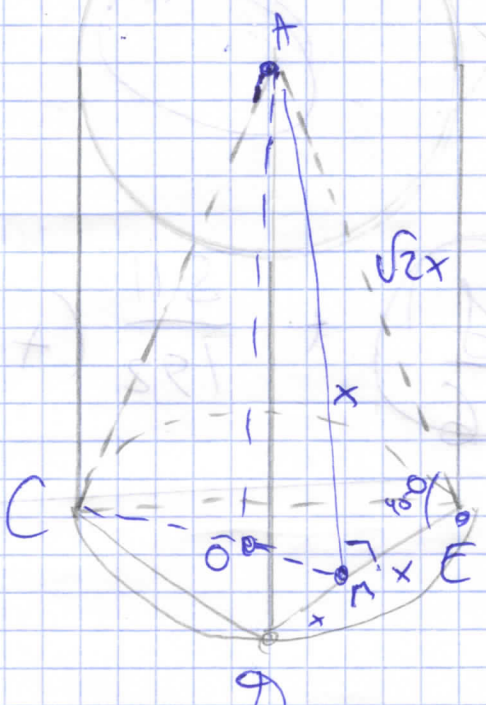
№7

Площадь освещённой части совпадает с площадью части куба находящейся внутри цилиндра, рассмотрим эту часть. Тогда каждое ребро будет пересекать цилиндр в центре верхней грани (вершина куба) и в точке на другом основании цилиндра. Остальная часть цилиндра будет внутри куба. ~~(считая до сечения делящего на куб пополам)~~

→ А потом (снаружи (но (д.ст.) куба)

А - вершина совпадающая с центром основания цилиндра

C, D, E - точки на рёбрах с пересечением цилиндра



стр 1

~~Нужно найти $S_{ACD} + S_{ACE} + S_{ADE}$ и умножить на 2 т.к. цилиндр пересекает ещё куб с другой вершины~~

стр. 1

~~Т.к. ребро куба не больше~~
~~не нем.~~

O – основание (оси) на другого основания

в силу симметрии $S_{ACD} = S_{ADE} = S_{ACE}$

и $AC = AE = AD$; $CD = DE = CE$ (т.е. $\triangle ACD = \triangle ADE = \triangle ACE$

$\triangle CDE$ равносторонний

Пусть $AE = x \cdot \sqrt{2}$; $\triangle ADE$ – равноб и прямоуг.

$AM \perp DE$ (M – сер DE) ($CM \perp DE$)

от CM O – центр. $\omega(CDE)$

$\Rightarrow ME = AM = x$; $DE = 2x$

$CM = CD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2x \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x$

$OM = \frac{1}{3} CM = \frac{\sqrt{3}}{3} x$

$CO = \frac{2}{3} CM = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} x$

$\frac{2}{3} \sqrt{3} x = \sqrt{2}$

$x = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow AE = \sqrt{3}$

$\sqrt{3} \overset{<}{\vee} \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$3 \overset{<}{\vee} 2+\sqrt{3}$

$1 \overset{<}{\vee} \sqrt{3}$ $\Rightarrow AE <$ ребра куба

$\Rightarrow S_{\text{осв части}} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AE^2\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3\right) = \frac{9}{2}$ Ответ: 4,5

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $2k + m + 2n$.

Результат: 5

Введенный ответ:

№8

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}$$

$$k^{\log_m n} = m^{\sqrt{\log_n k \cdot \log_m n}}$$

$$k^{\log_m n} = m^{\sqrt{\log_m k}}$$

$$k^{\log_m n \sqrt{\log_m k}} = m^{\log_m k} = k$$

$$\log_m n \sqrt{\log_m k} = 1$$

$$\log_m^2 n \cdot \log_m k = 1$$, пусть $\frac{a}{b} = \log_m n$, где a и $b \in \mathbb{Z}$ т.к. $\log_m n$ – рац.

$$\log_m k = \frac{b^2}{a^2}$$ – рац. число

$$\frac{\log_m n}{\log_m k} = \log_k n = \frac{a \cdot a^2}{b \cdot b^2} = \frac{a^3}{b^3}$$ – рац. число

$\frac{a}{b} = t$ – $t \in$ рац. число.

$$\log_m n = t$$
$$\log_k n = t^3$$
$$\log_k m = t^{-2}$$

$\Rightarrow$ $n = m^t$ $\Rightarrow$ пусть p – простое число и $m : p$

p^t – рационально т.к. $n \in \mathbb{N}$ и p – входит в n в целой неотрицательной

$$p^t = p^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{p^a} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a : b$ кратен $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ т.к. $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow t \in \mathbb{N}$

$\log_m \Rightarrow n : m \ (n = m^t)$; $n = k^{t^3} \Rightarrow (n ; k)$

$m = k^{t^2} \Rightarrow (m ; k)$

Т.к. m, n, k – различные, то $t \neq 1$

Ч.т.д.

стр 1

$2k+m+2n = 2k + k^{t^2} + 2\cdot k^{t^3} \geq$

$\geq 2k + k^4 + 2k^8$ $(k \geq 2,\ k \in N)$ $k \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k + k^4 + 2k^8 \geq 4 + 16 + 512 = 532$

Докажем, что 532 достигается действительно, если $k=2$, $m=16$, $n=256$)

$\log_m n = \log_{16} 256 = 2$ – рац. число. ч

$2^{\sqrt{\log_{16} 16^2}} = 16^{\sqrt{\log_{256} 2}}$

$2^{\sqrt{2}} = 2^{4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}}$

$2^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{4}{2\sqrt{2}}}$

$2^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{2}{\sqrt{2}}}$

$2^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$ – верно

Ответ: 532.

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Ломоносов" сектору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему
ученика 9 „Б" класса МБОУ „Лицей №22" г. Иванова Кирилла Алексеевича Голубева

апелляция

Прошу пересмотреть выставленное техническое баллы (65 баллов) за свою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что за некоторые задачи, на мой взгляд, выставлено недостаточное количество баллов. Знаю, что были допущены вычислительные ошибки при верном ходе решения (напри-мер, в задаче №4).

31.05.2020г.

Голубев