МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Колтаков Михаил Алексеевич

Технический балл: 70

Из них по арелляции: 0.0

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

$\text{Найдите сумму цифр числа } B, \text{ если } B = 2^{66} \cdot 4^{23} \cdot 5^{104} - 2^{23} \cdot 4^{43} \cdot 5^{103} - 1.$

Результат: 15

Введенный ответ:

Задача 1.

$2^{66} \cdot 4^{23} \cdot 5^{104} - 2^{23} \cdot 4^{43} \cdot 5^{103} - 1 =$

$= 2^{(66+46)} \cdot 5^{104} - 2^{(23+86)} \cdot 5^{103} - 1 = 2^{112} \cdot 5^{104} - 2^{109} \cdot 5^{103} - 1 =$

$= 2^8 \cdot 10^{104} - 2^6 \cdot 10^{103} - 1 = 2560 \cdot 10^{103} - 64 \cdot 10^{103} - 1 =$

$= 2496 \cdot 10^{103} - 1 = 2495 \underbrace{999 \ldots 999}_{103 \times 9}$

Значит, сумма цифр этого числа $2+4+9+5+103 \cdot 9 = 927+20 = 947$.

Ответ: 947.

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных смурфика, а всего существует 11 видов смурфиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки смурфиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному смурфику всех 11 видов?

Результат: 15

Введенный ответ:

Задача 2.

Чтобы узнать, сколько К-С нужно купить, нужно понять, сколько неодинаковых троек можно составить из 10 смурфиков, т.к. если хоть где-то встретится ~~один~~ 11 смурфик, то ~~это будет~~ мы уже соберём полную коллекцию. Это число $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$. Значит, чтобы гарантированно собрать полную коллекцию из 11 смурфиков, нам надо купить $C_{10}^{3} + 1$ К-С. $C_{10}^{3} + 1 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} + 1 =$

$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} + 1 = 4 \cdot 3 \cdot 10 + 1 = 121.$

Ответ: надо купить 121 киндер-сюрприз.

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{ctg} \arcsin x + \cos \operatorname{arctg} x > 0.$

Результат: 15

Введенный ответ:

Задача 3.

$ctg(\arcsin x) > \sin(\operatorname{arctg} x)$ $D(x): x \neq 0$.

$\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} > \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \cdot \cos(\operatorname{arctg} x)$ $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$

$\frac{\cos(\arcsin x)}{x} > x \cdot \cos(\operatorname{arctg} x)$

$\frac{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}{x} > x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}}$

$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0.$

$\frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+x^2} - x^2}{x\sqrt{1+x^2}} > 0.$ $\frac{\sqrt{1-x^4} - x^2}{x\sqrt{1+x^2}} > 0.$

$\sqrt{1+x^2} > 0$ при $x \in \mathbb{R}$

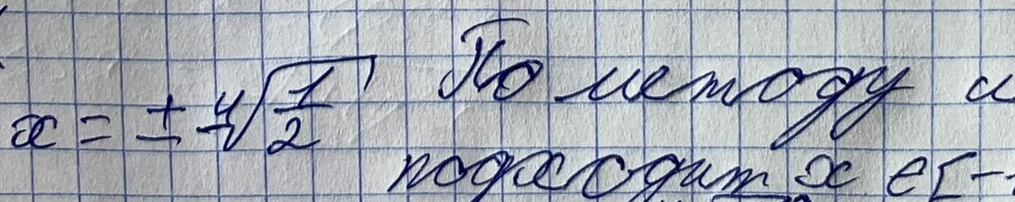
$\frac{\sqrt{1-x^4} - x^2}{x} > 0.$

$\sqrt{1-x^4} - x^2 = 0.$

$1 - x^4 = x^4.$

$1 = 2x^4.$

$x^4 = \frac{1}{2}.$ $x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$



По методу инт. нам подходят $x \in [-1; -\sqrt[4]{\frac{1}{2}}) \cup (0; \sqrt[4]{\frac{1}{2}})$

Ответ: $x \in [-1; -\sqrt[4]{\frac{1}{2}}) \cup (0; \sqrt[4]{\frac{1}{2}})$

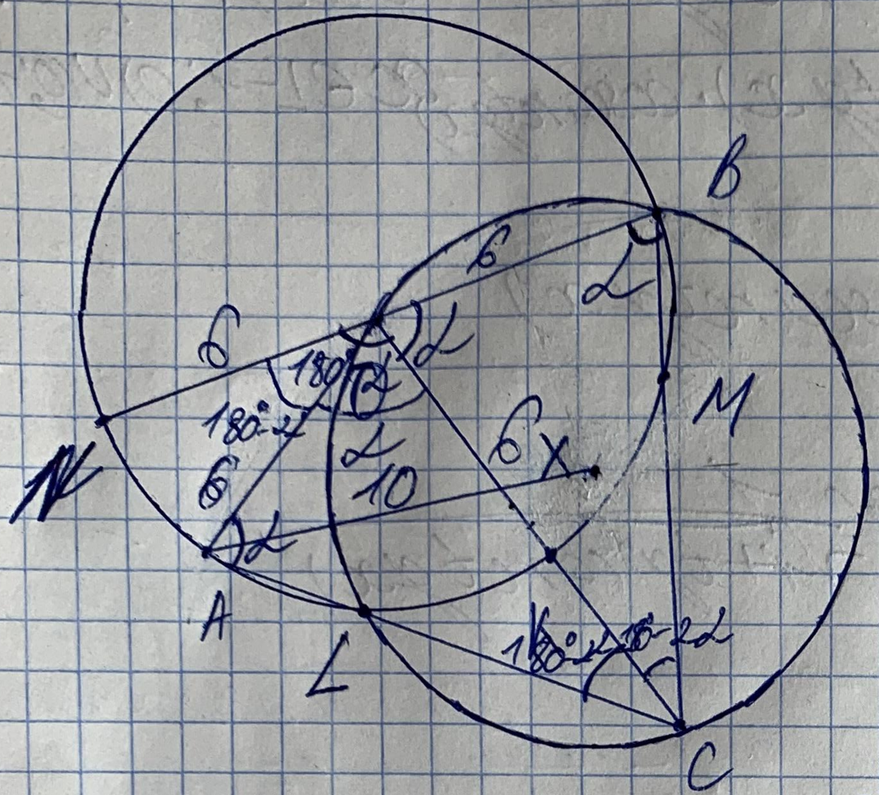
Задание номер: 4

Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O, если её центр удален от точки A на расстояние 10.

Результат: 0

Введенный ответ:

Задача 4.



Дано: окр.^{a}(O,6),
$A, B \in \omega$. $AC = BC = OC$
$B, C, O \in \Omega$. X – центр Ω. $XA = 10$.
Найти R_Ω
Решение:
$\angle COB = \angle OBC$ – в равноб. $\triangle OCB$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \smile NM = 2 \smile KB$.
По т. синусов $R_\Omega = \frac{6}{2 \cdot \sin 2\alpha}$ в $\triangle OBC$
$R_\Omega = \frac{3}{\sin 2\alpha}$

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел $2^{x-2} - 3^{3-x} + a$ и $a + 8 - x^3 - x$ отрицательно.

Результат: 0

Введенный ответ:

Ответ не был дан

Задание номер: 6

Саша едет на самокате, а Галя - на гироскутере. В горку Саша едет на самокате со скоростью 8 км/ч, а под горку - со скоростью 24 км/ч. Галя на гироскутере едет в горку со скоростью 16 км/ч, а под горку - со скоростью 18 км/ч. Саша и Галя соревнуются на кольцевом треке, четверть которого составляет подъём, а остальную часть - спуск. Они одновременно трогаются вверх в начале подъёма. Кто из них первым обгонит другого, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Результат: 10

Введенный ответ:

Задача 6.

$t_c = \frac{S}{4\cdot 8} + \frac{3S}{4\cdot 24}$ $\quad t_г = \frac{S}{4\cdot 16} + \frac{3S}{4\cdot 18}$

$t_c = \frac{S}{4}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{S}{16}$. $\quad t_г = \frac{S}{4}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\right) = \frac{S}{4}\left(\frac{11}{48}\right) = \frac{11S}{192}$.

$\frac{t_c}{t_г} = \frac{\left(\frac{1}{16}\right)}{\left(\frac{11}{192}\right)} = \frac{192}{11\cdot 16} = \frac{192}{176}$. => Галя проходит один круг быстрее Сани.

Так как на первом круге Саша не успеет догнать Галю, то дальше разрыв только будет увеличиваться, и Галя обгонит Сашу на круг в каком-то моменте, давайте посчитаем

Средняя скорость Саши за круг ~~16~~ 16 км/ч, а средняя скорость Гали $\frac{192}{11}$ км/ч. $\frac{v_c}{v_г} = \frac{176}{192} \Rightarrow \frac{v_г}{v_c} = \frac{192}{176} = \frac{96}{88} = \frac{48}{44} = \frac{12}{11}$. То есть, когда Саша пройдёт 11 кругов, Галя пройдёт 12. Тогда Саша догонит Галю, значит, до этого Галя могла обогнать его. На 11 круге для Пети Галя обгонит его. ~~$\frac{2}{11}\cdot\frac{S}{4}$~~

~~$\frac{2}{11}\cdot\frac{S}{4} + \frac{S}{16} \vee \frac{S}{8}$~~

$\frac{2S}{11} \quad \frac{2S}{198} + \frac{S}{64} \vee \frac{S}{32}$.

10 круг	$\frac{S}{99} + \frac{S}{64} < \frac{S}{32}$.
~~9 круг~~	$\frac{3S}{198} + \frac{S}{64} \vee \frac{S}{32}$.
9 круг	$\frac{S}{63} + \frac{S}{64} > \frac{S}{32}$. — на обг.

Ответ: на 10 круге для Саши и на 11 круге для Гали Галя впервые обгонит Сашу.

Задание номер: 7

Куб с ребром $a = 1/\sqrt{2}$ освещается цилиндрическим лучом
света радиуса $\rho = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$,
направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.)
Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:

Задача 7.

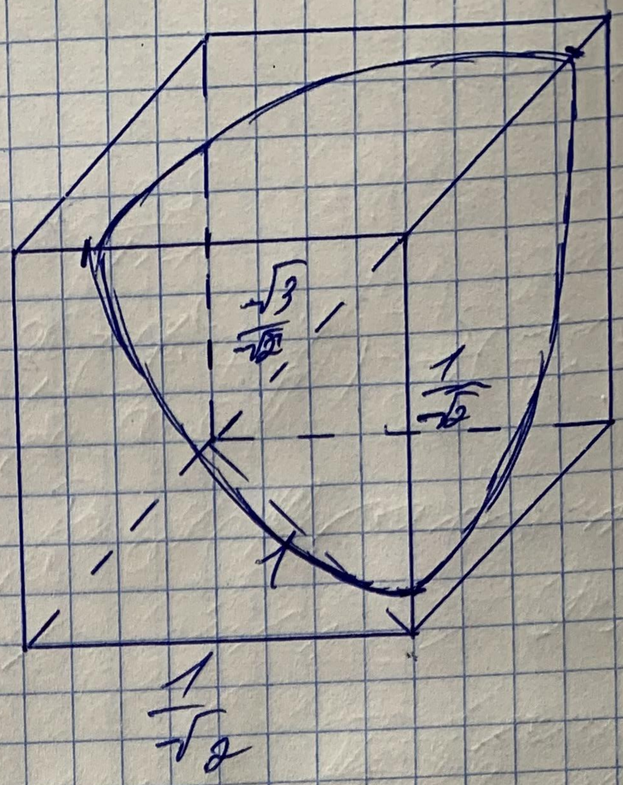
$\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \sqrt{2-\sqrt{3}}$

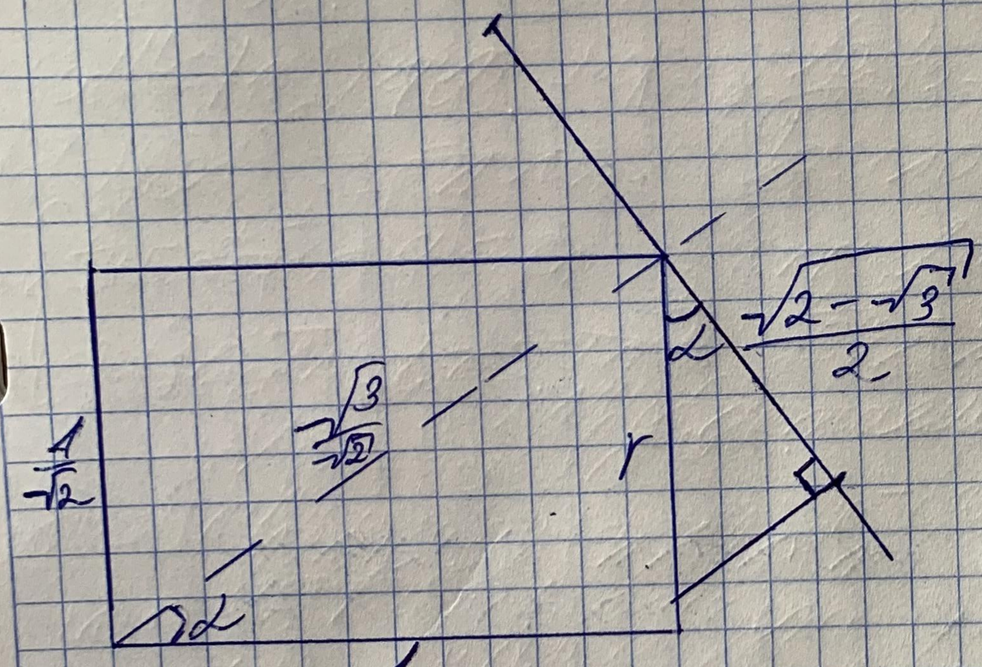
$\frac{1}{2} \vee 2-\sqrt{3}$.

$\sqrt{3} \vee \frac{3}{2}$.

$\sqrt{3} > \frac{3}{2}$

$\approx 1{,}7$ $\quad \approx 1{,}5$.





$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2\sqrt{2}}$. $\Rightarrow$ радиус каждой из 3 ~~по~~ четверт. окр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{осв.} = \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{(2\sqrt{3}-3)}{8} = \frac{3\pi}{32}(2\sqrt{3}-3)$.

Ответ: освещённая площадь равна $\frac{3\pi}{32}(2\sqrt{3}-3)$

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 5m + n$.

Результат: 15

Введенный ответ:

Задача 8.

Чтобы k получалось натуральным, m должно быть больше n. А чтобы $\log_m n$ был рациональным, n должно быть рад. степенью m. наименьшие такие числа — это 4 и 2.

Решим ур-ние для k.

$$k^{\sqrt{\log_4 2}} = 4^{\sqrt{\log_2 k}}.$$

$$k^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{2\sqrt{\log_2 k}} \quad | \log_2$$

$$\frac{\log_2 k}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{\log_2 k}$$

$$\sqrt{\log_2 k} = 2\sqrt{2}.$$

$$\log_2 k = 8.$$

$k = 256$. Таким образом, $n = 2$, $m = 4$ и $k = 256$. Тогда такая сумма будет $256 + 20 + 2 = 278$.

Ответ: такая сумма 278.

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Ломоносов" Ректору МГУ имени М. В. Ломоносова академику В. А. Садовничему ученика 11 „Г" класса МБОУ гимназии им. академика Н. Г. Басова г. Воронежа Михаила Алексеевича Колтакова

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (70) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что первая задача была решена правильно, за неё должно стоять 15 баллов, вторая задача была решена правильно, за неё тоже должно быть 15 баллов, третья задача была решена правильно, за неё должно стоять 15 баллов, четвёртая задача была решена неправильно, за неё должно стоять 0 баллов, в задаче 5 были приведены правильные выкладки по поводу монотонности функций, положения точки пересечения их графиков. Я написал, что точка бы сдвигалась в соответствии с числом a. ~~За~~ Поэтому ~~за~~ решение заслуживает 7 или 5 баллов. Задача 6 была решена правильно и заслуживает 15 баллов.

Задача 7 была решена неправильно и заслуживает 0 баллов, задача 8 была решена правильно, но присутствовали недочёты, поэтому задача заслуживает ±, т. е. 10 баллов.
В сумме получается 75 баллов.

01.08.2020 М. Кошта (М. Кошта)