МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Малый Павел Вадимович

Технический балл: 65

Из них по арелляции: 0.0

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

$$\text{Найдите сумму цифр числа } D, \text{ если } D = 2^{58} \cdot 4^{26} \cdot 5^{102} - 2^{16} \cdot 4^{46} \cdot 5^{101} - 1.$$

Результат: 15

Введенный ответ:

~1

$2^{58} \cdot 4^{26} \cdot 5^{-102} - 2^{16} \cdot 4^{46} \cdot 5^{101} - 1 =$

$= 2^{110} \cdot 5^{102} - 2^{108} \cdot 5^{101} - 1 = 2^{101} \cdot 5^{101} (2^3 \cdot 5 - 2^7 \cdot 1) - 1 =$

$= \underbrace{10000..00}_{101} \cdot (2560 - 128) - 1 =$

$2^3 = 512, \quad 2^3 \cdot 5 = 5120$

$2^7 = 128$

5120 | 2
4 | 2560
12
8
4
32

$= 2432 \underbrace{000..000}_{101} - 1 = 2431 \underbrace{99..99}_{101}$

Сумма цифр равна $2+4+3+1+101 \cdot 9 = 10 + 909 = 919$

Ответ: 919

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных фиксика, а всего существует 14 видов фиксиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки фиксиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному фиксику всех 14 видов?

Результат: 10

Введенный ответ:

№2

Пусть в коробке все виды киндеров, то есть сосчитаем все возможные тройки фиксиков. Тогда их $C_{13}^2 + C_{12}^2 + \ldots + C_2^2 = \frac{13!}{2\cdot 11!} + \frac{12!}{2\cdot 10!} + \ldots + \frac{2!}{2!\cdot 1} =$

$= 13\cdot 6 + 11\cdot 6 + 11\cdot 5 + 9\cdot 5 + 9\cdot 4 + 7\cdot 4 + 7\cdot 3 + 5\cdot 3 + 5\cdot 2 + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 +$

$+ 1\cdot 1 = 144 + 100 + 64 + 36 + 30 + 4 = 40 + 94 + 244 = 284 + 94 =$

$= 378$, и гарантированно есть все виды фиксиков, причем каждый из них суммарно в кол-ве $C_{13}^2 = 13\cdot 6 = 78$ штук $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если убрать 77 киндеров с конкретным типом фиксиков, то все еще гарантированно, что есть каждый тип, а если убрать 78, то возможно, одного типа не будет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при кол-ве $378 - 77 = 301$ гарантированно есть все типы

Ответ: 301

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{ctg} \arcsin x + \cos \operatorname{arctg} x > 0.$

Результат: 15

Введенный ответ:

№3

$ctg(\arcsin x) > \sin(\operatorname{arctg} x)$

1) $ctg(\arcsin x) - ?$

$\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$ctg(\arcsin x) = \dfrac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

2) $\sin(\operatorname{arctg} x) - ?$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x = \dfrac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\cos(\operatorname{arctg} x)}$ (1)

$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}$

$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (2)

Из (1) и (2): ~~1) arctg x~~

$\operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos(\operatorname{arctg} x) \geq 0$, $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$x = \dfrac{\sin(\operatorname{arctg} x) \cdot \sqrt{1+x^2}}{1}$, $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

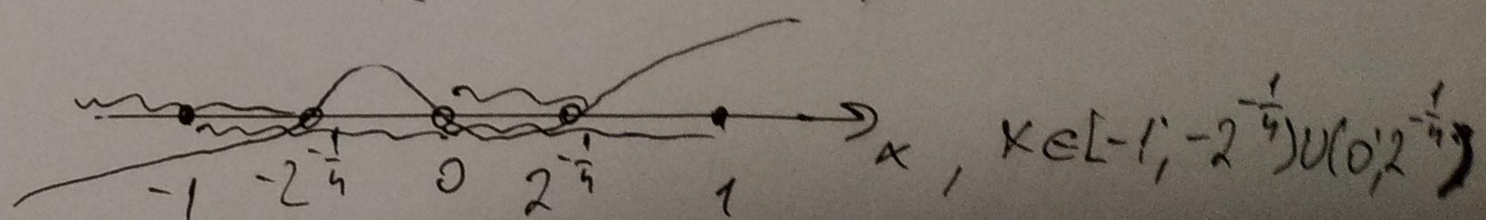
Вернемся к исходному неравенству

$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} > \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\dfrac{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+x^2} - x^2}{x\sqrt{1+x^2}} > 0$

ОДЗ: $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\dfrac{\sqrt{1-x^4} - x^2}{x} > 0$, $\dfrac{1-x^4-x^4}{x} > 0$, $\dfrac{x^4 - \frac{1}{2}}{x} < 0$,

$\dfrac{(x-2^{-\frac{1}{4}})(x+2^{-\frac{1}{4}})}{x} < 0$



$x \in [-1; -2^{-\frac{1}{4}}) \cup (0; 2^{-\frac{1}{4}})$

Ответ: $x \in [-1; -2^{-\frac{1}{4}}) \cup (0; 2^{-\frac{1}{4}})$

Задание номер: 4

Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Другая окружность с центром Q и радиусом 8 описана около треугольника ACO. Найдите BQ.

Результат: 0

Введенный ответ:

Ответ не был дан

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел $x^3 + 3x + a - 9$ и $a + 2^{5-x} - 3^{x-1}$ положительно.

Результат: 15

Введенный ответ:

~5

a!

$\max(x^3+3x+a-9,\ a+2^{5-x}-3^{x-1})>0 <=>$

$<=> \begin{cases} x^3+3x+a-9>0 \\ a+2^{5-x}-3^{x-1}>0 \end{cases}, \begin{cases} a>-x^3-3x+9 \\ a>3^{x-1}-2^{5-x} \end{cases}$

Рассм $F(x)=-x^3-3x+9$

$F'(x)=-3x^2-3$, найдем т. экстремума:

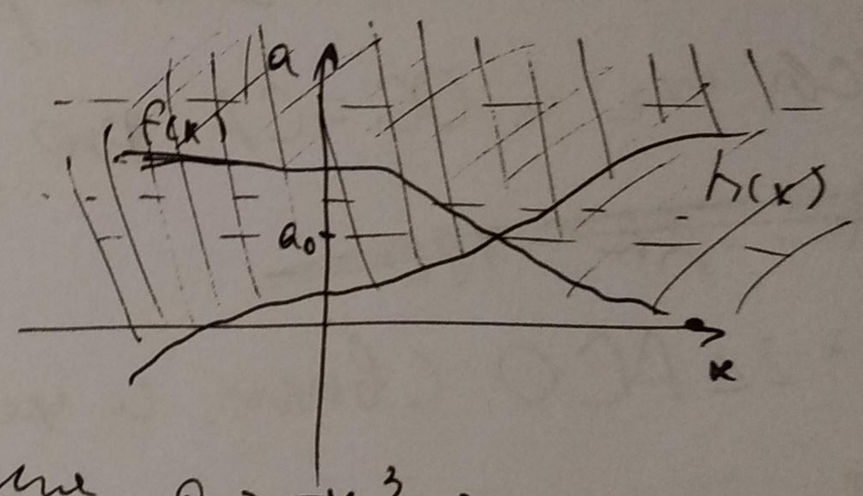
$F'(x)=0$, $x^2=-1$ - реш. нет $=>y=f(x)$ монотонна и невозрастает (т.к. коэф. при x^3 меньше нуля)

Рассм $h(x)=3^{x-1}-2^{5-x}$

$h'(x)=3^{x-1}\ln 3+2^{5-x}\ln 2$, $h'(x)>0$ т.к. $3^{x-1}\ln 3>0$ и $2^{5-x}\ln 2>0 \Rightarrow$

$=> y=h(x)$ монотонно возр. на $D(h)$.

Чтобы совокупность выполнялась, нужно чтобы а было чем a_0, если точка пересечения в x_0 равна (x_0, a_0) (т.е. точка пересеч. из того, что $a=h(x)$ возр, $a=f(x)$ невозрастает)



$h(x)=F(x)$, $x^3+3x-9=2^{5-x}-3^{x-1}$

$x_0=1$: $-5\neq 15$, $x_0=2$: $8-9=-1$

Итак, при $x_0=2$: $h(x)=f(x)$, $a_0=h(x_0)=3^1-2^3=-5$,

$a\geq a_0$, $a\geq -5$

Ответ: $a\geq -5$

Задание номер: 6

Саша едет на самокате, а Галя - на гироскутере. В горку Саша едет на самокате со скоростью 8 км/ч, а под горку - со скоростью 24 км/ч. Галя на гироскутере едет в горку со скоростью 16 км/ч, а под горку - со скоростью 18 км/ч. Саша и Галя соревнуются на кольцевом треке, четверть которого составляет подъём, а остальную часть - спуск. Они одновременно трогаются вверх в начале подъёма. Кто из них первым обгонит другого, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Результат: 0

Введенный ответ:

Ответ не был дан

Задание номер: 7

Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ освещается
цилиндрическим лучом света
радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.)
Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:

Ответ не был дан

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 5m + n$.

Результат: 10

Введенный ответ:

№

$m, n, k \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $n > 1$, $k > 1$

$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}$, $m^{\log_m k \sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}$,

$\log_m k = \sqrt{\frac{\log_n k}{\log_m n}}$, $\log_m k = \sqrt{\frac{\log_m m}{\log_k n}}$, $\log_m^2 k = \frac{\log_n m}{\log_k n}$

$\log_m k \cdot \log_m n = \log_n m$, $\log_m k = \log_n^2 m$

$\log_m k \cdot \log_m^2 n = 1$

$\log_m k = \frac{1}{\log_m^2 n}$, но $\log_m^2 n \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log_m k \in \mathbb{Q}$

Перебором находим решение $\min(k+5m+n) =$

$= 256 + 4 \cdot 5 + 2 = 278$ при $m = 4, k = 256, n = 2$

Ответ: 278

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников «Ломоносов» ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему ученика 11 класса ГБОУ «Губернаторский спортивно-профильный лицей-интернат для одаренных детей Оренбуржья» г. Оренбурга Малого Павла Васильевича

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленное технические баллы (65) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что баллы за некоторые задачи, в которых я совершил арифметические ошибки, были занижены, а задача №7, большая по время тура на почту (от pavel.mald@gmail.com), возможно, не была проверена.

31.05.2020