МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Павловский Тимофей Сергеевич

Технический балл: 70

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

Найдите сумму цифр числа B, если $B = 2^{66} \cdot 4^{23} \cdot 5^{104} - 2^{23} \cdot 4^{43} \cdot 5^{103} - 1$.

Результат: 15

Введенный ответ:

$B = 2^{66} \cdot 4^{23} \cdot 5^{104} - 2^{23} \cdot 4^{43} \cdot 5^{103} - 1$

$B = 2^{112} \cdot 5^{104} - 2^{109} \cdot 5^{103} - 1$

$B = 10^{103} \cdot \left(2^{9} \cdot 5 - 2^{6}\right) - 1 = 10^{103} \cdot 2496 - 1 = 2495\underbrace{99..99}_{103}$

$S(B) = 2+4+9+5+9 \cdot 103 = 947$

Odgovor: 947.

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных лунтика, а всего существует 13 видов лунтиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки лунтиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному лунтику всех 13 видов?

Результат: 15

Введенный ответ:

Пронумеруем виды мунтиков от 1 до 13. Предположим, что это подмножества чисел (речь идёт про киндер-сюрпризы).

Всего троек — C_{13}^{3}.

Количество троек, где нет, например, одного, первого, мунтика — C_{12}^{3}.

Т.к. количество троек не повторяется, то достаточно купить $\boxed{C_{12}^{3}+1}$

$$C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{6} = 220$$

$\Rightarrow C_{12}^{3}+1 = 220+1 = 221.$

Ответ: 221.

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{tg}\arccos x \leqslant \cos\operatorname{arctg} x$.

Результат: 0

Введенный ответ:

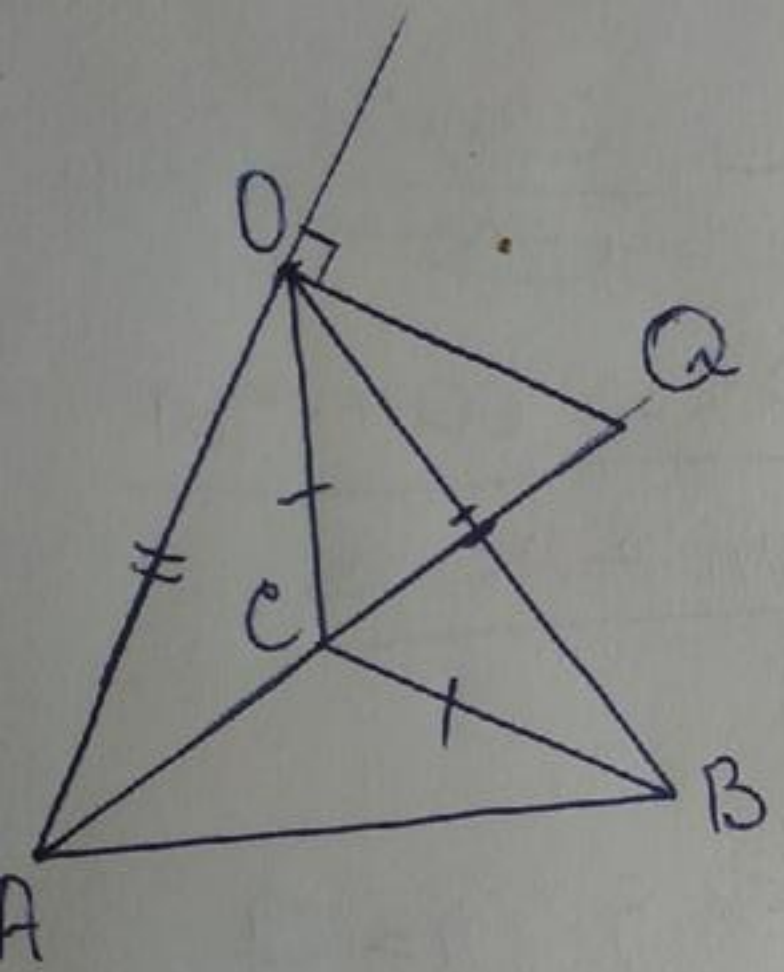
Ответ не был дан

Задание номер: 4

Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O, если её центр удален от точки A на расстояние 10.

Результат: 10

Введенный ответ:



Пусть Q – центр окружности искомого радиуса, тогда $AQ=10$. Из условия понятно, эта окружность – окружность описанная вокруг $\triangle BCO$, треугольник, за счёт условия, равнобедренный, следовательно точки A, C и Q лежат на одной прямой $\Rightarrow$ окружность с центром Q вписана в угол $\angle OAB \Rightarrow R=OQ=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

Ответ: 8.

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел

$x^3 + x + a - 7$ и $a + 2^{4-x} - 3^{x-2}$

Результат: 15

Введенный ответ:

Обозначим:

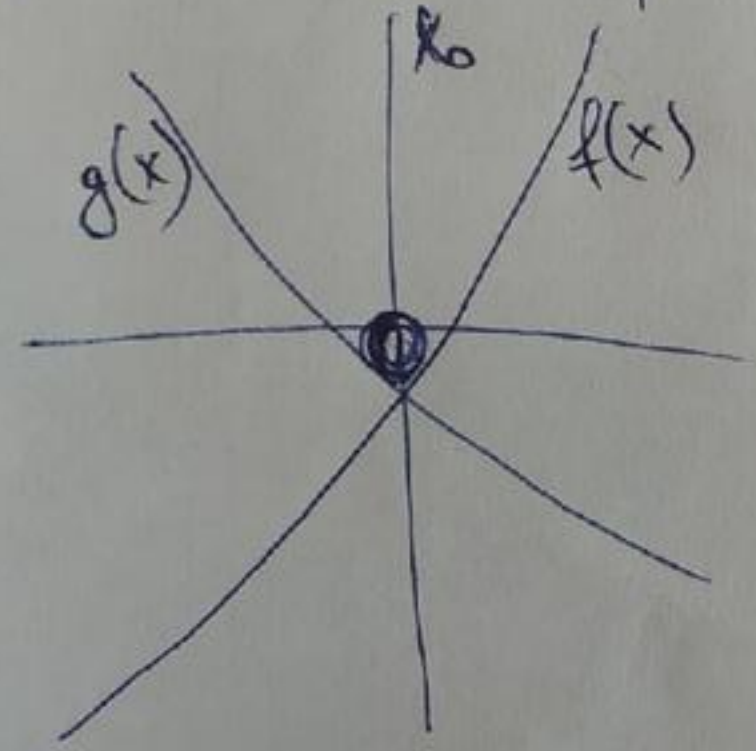
$x^3+x+a-7=f(x)$

$a+2^{4-x}-3^{x-2}=g(x)$

По условию:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{array}\right.$$

Заметим, что $f(x)\uparrow\uparrow$ $(f'(x)>0)$, а $g(x)\searrow\searrow$ $\Rightarrow$ необходимо найти x_0, которое выглядит так



угадыванием, определим, что $x_0=2$ $\Rightarrow$ эта „смена будет при $a=-3$ $\Rightarrow$

Ответ: $a\in(-3;+\infty)$.

Задание номер: 6

Саша едет на самокате, а Галя - на гироскутере. В горку Саша едет на самокате со скоростью 8 км/ч, а под горку - со скоростью 24 км/ч. Галя на гироскутере едет в горку со скоростью 16 км/ч, а под горку - со скоростью 18 км/ч. Саша и Галя соревнуются на кольцевом треке, четверть которого составляет подъём, а остальную часть - спуск. Они одновременно трогаются вверх в начале подъёма. Кто из них первым обгонит другого, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Результат: 10

Введенный ответ:

Пусть длина круга равна $4S$ км, тогда один круг проезжает

1) Саша за: $\frac{S}{8}+\frac{3S}{24}=\frac{S}{4}$ ч

2) Паля за: $\frac{S}{16}+\frac{3S}{18}=\frac{11S}{48}$ ч

$\frac{S}{4} \vee \frac{11S}{48}$

$1 \vee \frac{11}{12}$ $\quad 1>\frac{11}{12} \Rightarrow \frac{S}{4}>\frac{11S}{48}\ (S>0) \Rightarrow$ Паля едет быстрее.

Пусть n кругов проехал Саша, в то время $n+1$ кругов проехала Паля, следовательно:

$$\frac{S}{4}\cdot n=\frac{11S}{48}\cdot(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{11n}{12}+\frac{11}{12} \Rightarrow n=11$$

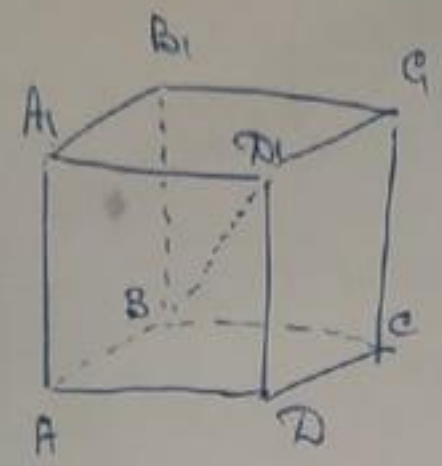
Ответ: когда Саша проедет 11 кругов, Паля проедет 12 кругов.

Задание номер: 7

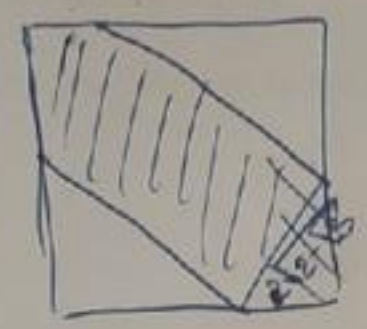
Куб с ребром $a = 1/\sqrt{2}$ освещается цилиндрическим лучом
света радиуса $\rho = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$,
направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.)
Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:



Заметим, что для каждой поверхности куба фигура от света будет одинаковой. Разберёмся на одной поверхности:



Найдём площадь закрашенной фигуры $S_{з.ф.}$:

$$S_{з.ф.} = S_{\square} - 2 \cdot S_{\triangle} =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2 \cdot (2-\sqrt{3})}\right)^2}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2 \cdot (2-\sqrt{3})}\right)^2 = x^2 = 4 \cdot (2-\sqrt{3})$$

$$x^2 = 2 \cdot (2-\sqrt{3})$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$S_{\square} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$S_{з.ф.} = S_{\square} - 2S_{\triangle} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2(2-\sqrt{3})}\right)^2}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2(2-\sqrt{3})}\right)^2 = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} - 2\sqrt{2(2-\sqrt{3})} + 2 \cdot (2-\sqrt{3})}{2} =$$

$$2 \cdot (2-\sqrt{3}) - 2\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{3}}}_{a} + \frac{1}{2}$$

$$4 - 4 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 0$$

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $2k + m + 2n$.

Результат: 5

Введенный ответ:

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}$$

Пусть $\log_m n = r \quad r \in \mathbb{Q} \Rightarrow m^r = n$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_m n} = \sqrt{\log_n k} \cdot \log_k m$$

$$\Leftrightarrow \log_m n = \log_n k \cdot \log_k^2 m$$

$$\Leftrightarrow \log_m n = \log_n m \cdot \log_k m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = k^{r^2} \\ n = k^{r^3} \end{cases} \qquad 2k + m + 2n = \underbrace{2k + k^{r^2} + 2k^{r^3}}_{\substack{\parallel \\ f(k)\,M}}$$