МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Сафронов Алексей Викторович

Технический балл: 70

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

$\text{Найдите сумму цифр числа } A, \text{ если } A = 2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} - 1.$

Результат: 15

Введенный ответ:

21.

$$A = 2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} - 1 =$$

$$= 2^{113} \cdot 5^{106} - 2^{110} \cdot 5^{105} - 1 = 10^{105}(2^3 \cdot 5 - 2^5) = 1 =$$

$$= 32 \cdot 10^{105} \cdot (40-1) \Rightarrow 1 = 39 \cdot 32 \cdot 10^{105} - 1 = 1247 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{105} =$$

$$= 1+2+4+7+105 \cdot 9 = 14+105 \cdot 9 = 14+945 = \boxed{959}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 32 \\ \hline 78 \\ 117 \\ \hline 1248 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ 9 \\ \hline 945 \\ 14 \\ \hline 959 \end{array}$$

Answer: 959

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных фиксика, а всего существует 14 видов фиксиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки фиксиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному фиксику всех 14 видов?

Результат: 15

Введенный ответ:

$$A = 2^{63}\cdot 4^{25}\cdot 5^{106} - 2^{22}\cdot 4^{44}\cdot 5^{105} - 1 =$$

$$= 2^{113}\cdot 5^{106} - 2^{110}\cdot 5^{105} - 1 = 10^{105}(2^8\cdot 5 - 2^5) - 1 =$$

$$= 32\cdot 10^{105}\cdot(40-1) - 1 = 39\cdot 32\cdot 10^{105} - 1 = 1247\cdot \underbrace{99\ldots9}_{105} =$$

$$= 1+2+4+7+105\cdot 9 = 14+105\cdot 9 = 14+945 = \boxed{959}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 32 \\ \hline 78 \\ 117 \\ \hline 1248 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 105 \\ 9 \\ \hline 945 \\ 14 \\ \hline 959 \end{array}$$

Ответ: 959

№2. Рассмотрим наихудший случай.

Найдем макс. кол-во пиндеров, так чтобы в них не было одного вида факсипов. (например 14 вида). Таких возможных неповторяющихся троек: $C_{13}^3 = \frac{13!}{10!\,3!} = \frac{11\cdot \cancel{12}^{2}\cdot 13}{\cancel{2\cdot 3}} =$

$$= 22\cdot 13 = 286 \qquad \begin{array}{r} 22 \\ 13 \\ \hline 66 \\ 22 \\ \hline 286 \end{array}$$

2. Тогда в 14-ом пиндере нам должен достаться не достающий 14-ый вид: $N = C_{13}^3 + 1 = 287$

Ответ: 287.

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{ctg} \arcsin x + \cos \operatorname{arctg} x > 0.$

Результат: 15

Введенный ответ:

23. $ctg(\arcsin x) > \sin(arctg\, x)$

1) Найдем чему равен $\sin(arctg\, x)$.

$= 1 + \frac{1}{tg^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$ — из основного трин. $\Rightarrow \sin x = \pm \frac{tg\, x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$

Тогда $\sin(arctg\, x) = \frac{tg(arctg\, x)}{\sqrt{1+tg^2(arctg\, x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) $ctg(\arcsin x) = \frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)}$, где $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$,

$x \in [-1;1]$, тогда $ctg(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in [-1;1]\setminus\{0\}$

Тогда исходное нер-во прин. вид:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+x^2} - x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} > 0$$

$$\frac{\sqrt{1-x^4} - x^2}{x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{1-x^4} - x^2 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{1-x^4} - x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; +\infty) \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}) \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x \in [-1;1]\setminus\{0\}$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}) \\ x \in (0; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}) \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}) \cup (0; \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$

Задание номер: 4

Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O, если её центр удален от точки A на расстояние 10.

Результат: 0

Введенный ответ:

Ответ не был дан

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел $2^{x-2} - 3^{3-x} + a$ и $a + 8 - x^3 - x$ отрицательно.

Результат: 15

Введенный ответ:

25. Сравнить $2^{x-2}-3^{3-x}+a$ и $a+8-x^3-x$

$f(x)=2^{x-2}-3^{3-x}+x^3+x-8$

$y_1=2^{x-2}-3^{3-x}$

$y_1'=2^{x-2}\ln 2+3^{3-x}\ln 3 > 0$ $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

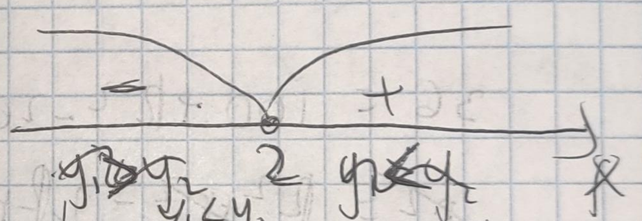
$y_1\uparrow \forall x\in\mathbb{R}$

$y_2=-x^3+x+8$; $y_2'=-3x^2+1<0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$y_2\downarrow \forall x\in\mathbb{R}$

Значит у уравнения $y_1=y_2$ max. один корень,

$x=2$: $1-3+8+2-8=0$ (в)



1) $a+y_2$ при $x\in(-\infty;2]$ должно быть <0

$a+y_2\uparrow$ ф-ция $\Rightarrow$ если $a+y_2(+2)<0$, то и при всех остальных x $a+y_2<0$:

$-2+a<0\Leftrightarrow a<2$

2) $a+y_2$ при $x\in[2;+\infty)<0$.

$a+y_2\downarrow$ ф-ция $\Rightarrow$ достаточно чтобы выполнялось

$a+y_2(2)<0$; $a-2<0\Leftrightarrow a<2$

Т.о при $a<2$ усл-ие задачи выполнено.

Ответ: $a\in(-\infty;2)$

Задание номер: 6

Снегоход и квадроцикл соревнуются на зимней кольцевой трассе, четверть которой покрыта рыхлым снегом, а остальная часть - плотным снегом. Снегоход едет по рыхлому снегу со скоростью 32 км/ч, а по плотному - со скоростью 36 км/ч. Квадроцикл едет по рыхлому снегу со скоростью 16 км/ч, а по плотному - со скоростью 48 км/ч. Снегоход и квадроцикл начинают движение одновременно в начале части трассы, покрытой рыхлым снегом, и сначала едут по этой части. Какое из транспортных средств первым обгонит другое, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Результат: 0

Введенный ответ:

Ответ не был дан

Задание номер: 7

Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ освещается
цилиндрическим лучом света
радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.)
Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:

Ответ не был дан

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 3m + n$.

Результат: 10

Введенный ответ:

№8. $K^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n K}}$ $K+3m+n \to \min$

Прологарифм. обе ч:

$\log_m K^{\sqrt{\log_m n}} = \log_m m^{\sqrt{\log_n K}}$

$\sqrt{\log_m n} \cdot \log_m K = \sqrt{\log_n K}$

$\sqrt{\log_m n} \cdot \log_m K = \sqrt{\frac{\log_m K}{\log_m n}} \Rightarrow$

$\sqrt{\log_K m} = \log_m n$, т.к $\log_m n \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\sqrt{\log_K m} \in \mathbb{Q}$

Т.к в сумме $m \cdot 3$, то m должно быть мин

если $m=2$, то наим. K при к-ом $\sqrt{\log_K m} \in \mathbb{Q}$ –

– $K=16$, но тогда $\log_2 n = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow n \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ невоз.

Если $m=4$, то наим $K=256$,

тогда $\log_2 n = \pm 1 \Rightarrow n=2$ – подходит.

Значит, мин. сумма $\Sigma = 256+3\cdot4+2 = 270$

Ответ: 270.

P.S. Если $m=3$, то $K_{наим}=81$ и ~~$n=\log$~~

$\log_3 n = \pm\frac{1}{2}$ – невозможно