МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Ломоносов»

Профиль олимпиады: Математика

ФИО участника: Стариков Даниил Алексеевич

Технический балл: 70

Дата: 24 мая 2020 года

Задание номер: 1

Найдите сумму цифр числа C, если $C = 2^{70} \cdot 4^{21} \cdot 5^{105} - 2^{32} \cdot 4^{39} \cdot 5^{104} - 1$.

Результат: 15

Введенный ответ:

№1.

$C = 2^{70} \cdot 4^{21} \cdot 5^{105} - 2^{32} \cdot 4^{39} \cdot 5^{104} - 1 = 2^{112} \cdot 5^{105} - 2^{110} \cdot 5^{104} - 1 =$

$= 128 \cdot 10^{105} \overset{①}{-} 64 \cdot 10^{104} \overset{②}{-} 1$

1) $-\ 128\overbrace{000\ldots000}^{105\text{ нулей}}$

$64\,00\ldots000$

$1216\underbrace{00\ldots000}_{104\text{ нуля}}$

2) $-\ 1216\,00\ldots000$

$\phantom{1215\underbrace{99\ldots999}_{104\text{ девятки}}}\ 1$

$1215\underbrace{99\ldots999}_{104\text{ девятки}}$

Сумма цифр числа: $1+2+1+5+9\cdot104 = 9\cdot105 = 945$

Ответ: 945

Задание номер: 2

Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных фиксика, а всего существует 14 видов фиксиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки фиксиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному фиксику всех 14 видов?

Результат: 15

Введенный ответ:

№2.

Фиксиков - 14 штук;
в ~~пар~~ одном киндер-сюрпризе - 3 фиксика

Количество возможных комбинаций фиксиков:

$$C_{14}^{3} = \frac{14!}{3!\cdot 11!} = \frac{\cancel{12}^{2}\cdot 13\cdot 14}{\cancel{6}_{1}} = 28\cdot 13 = 364$$

Самая неблагоприятная ситуация - когда нам не попались все комбинации с каким-то определённым фиксиком, но попались все остальные возможные комбинации. Кол-во комбинаций, где точно есть один оставшийся фиксик: $C_{13}^{2} = \frac{13!}{11!\cdot 2} = \frac{12\cdot 13}{2} = 6\cdot 13 = 78$

Таким образом, после $364-78=286$ открытых киндер-сюрпризов в самом неблагоприятном для нас случае у нас не будет только одного фиксика. Тогда мы покупаем ещё один киндер-сюрприз и гарантированно получаем нужного фиксика. Таким образом, наименьшее кол-во киндер-сюрпризов, нужных для гарантированного получения всех фиксиков: $286+1=287$.

Ответ: 287.

Задание номер: 3

Решите неравенство $\operatorname{ctg} \arcsin x + \cos \operatorname{arctg} x > 0$.

Результат: 0

Введенный ответ:

$\operatorname{ctg}(\arcsin x) > \sin(\operatorname{arctg} x) \quad | x \in [-1; 1]$

1) Пусть $\arcsin x = \alpha$; $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$

$\sin\alpha = x$

Тогда: $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{x^2}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-x^2}{x^2}$, т.к. $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$

2) Пусть $\operatorname{arctg} x = \beta$; $\beta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$\operatorname{tg}\beta = x$

Тогда: $1 + \operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\cos^2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1}{1+x^2}$

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, т.к. $\beta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$\sin\beta = \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

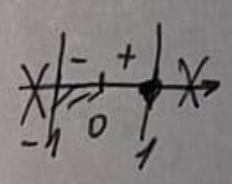
3) $\left(\operatorname{ctg}(\arcsin x) > \sin(\operatorname{arctg} x)\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1-x^2}{x^2} > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$; $x \in [-1; 1]$

$x \neq 0$, тогда $x^2 > 0$; $\sqrt{1+x^2} > 0$, поэтому домножим на них.

$(1-x^2) \cdot \sqrt{1+x^2} > x^3$; убедимся, что $x = -1$ - решение; $x = 1$ - нет, а при остальных доступных x $1-x^2 > 0$ и разделим на него

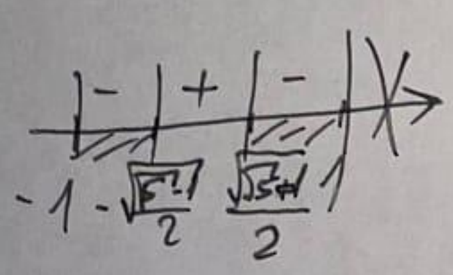
$\sqrt{1+x^2} > \frac{x^3}{1-x^2}$

$$\left[\begin{array}{l} 1+x^2 > \frac{x^6}{x^4-2x^2+1} \\ \frac{x^3}{1-x^2} < 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{\cancel{x^6} - x^4 + 2x^2 - 1 - \cancel{x^6} + 2x^4 - x^2}{(x^2-1)^2} < 0 \ (1) \\ x \in (-1; 0) \end{array}\right.$$



1: $\frac{x^4 + x^2 - 1}{(x^2-1)^2} < 0$ $\quad D = 1 + 4 = 5$

$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$



Объединив, полученные промежутки, получим, что

$x \in [-1; 0) \cup \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}; 1\right)$

Ответ: $x \in [-1; 0) \cup \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}; 1\right)$

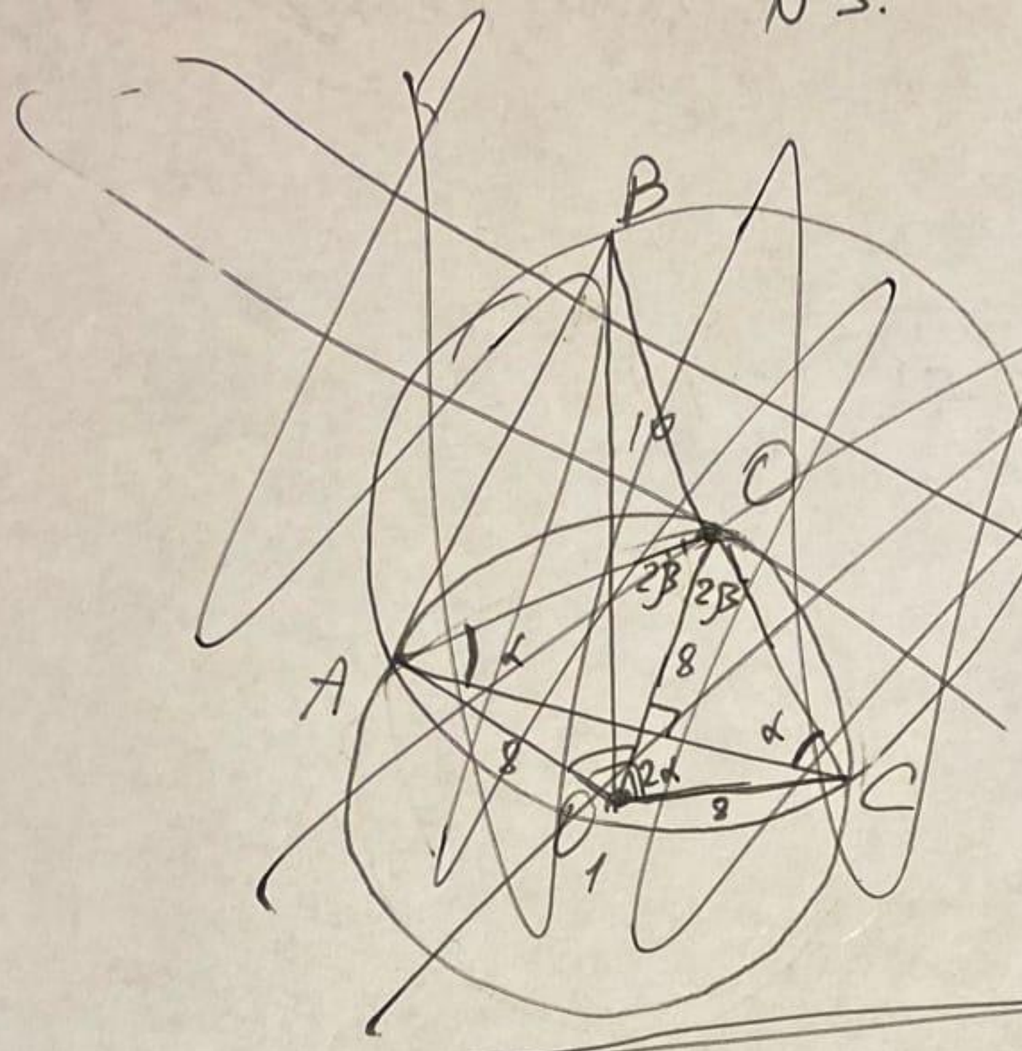
Задание номер: 4

Хорды AB и AC одной окружности с центром O равны между собой, а центр другой окружности радиуса 8, описанной около треугольника ACO, удалён от точки B на расстояние 10. Найдите AC.

Результат: 15

Введенный ответ:

№ 3.



Дано:

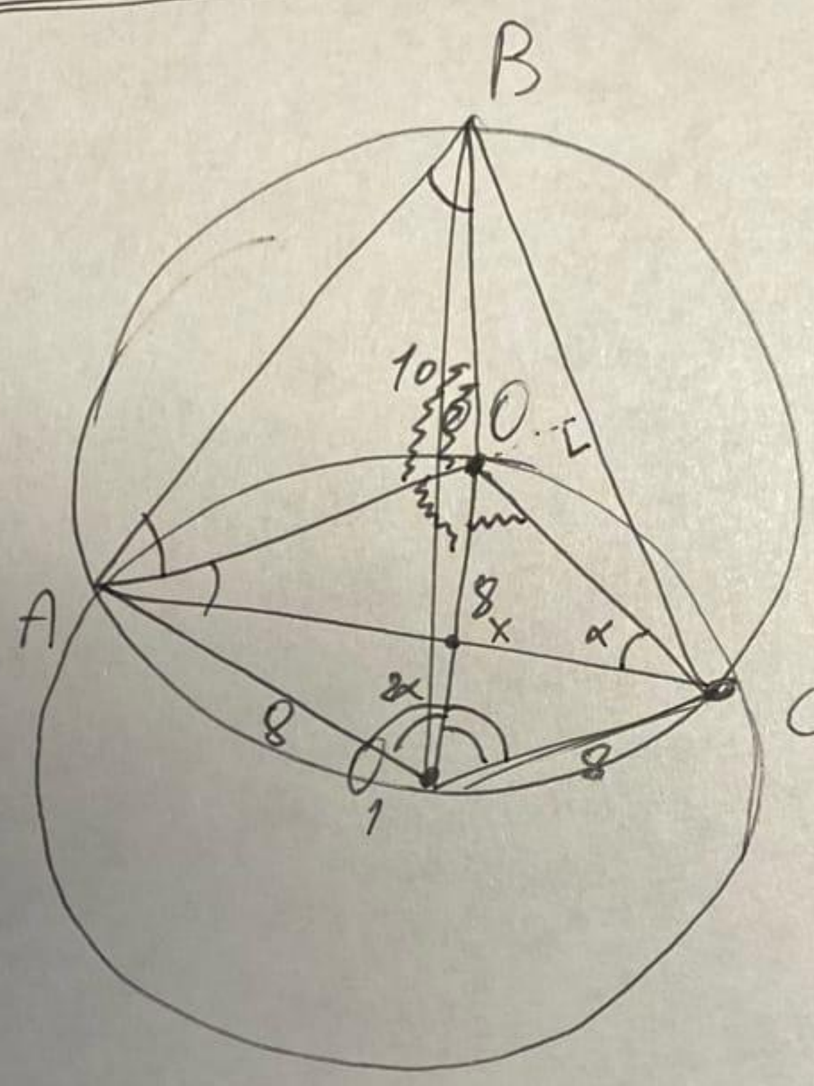
$O_1O = O_1A = O_1C = 8$

$O_1B = 10$

$AC - ?$

Решение:

1) Пусть $\angle O_1AC = \alpha$



Дано:

$O_1O = O_1A = O_1C = 8$

$O_1B = 10$

$AC - ?$

Решение:

1) Пусть $\angle O_1AC = \alpha$
2) тогда $\angle OCA = \alpha$, т.к. $OA = OC \Rightarrow$ Δ-к - р/б
3) $\Delta ABO = \Delta ACO$ - по 3 пр. (AO - общ.; $OC = OB$ - рад.; $AB = AC$ - по усл.)
4) Тогда $\angle ABO = \angle BAO = \alpha$
5) $\angle AO_1O = \angle CO_1O = 2\alpha$, т.к. $\angle ACO = \angle OAC = \alpha$
6) Тогда в ΔAO_1C O_1O - бисс., а ΔAO_1C - р/б ($AO_1 = O_1C$ - рад.)
Значит, $O_1O \perp AC$
Пусть $AC \perp O_1O = X$
Тогда $\angle AXO_1 = 90^\circ$
7) Значит, $\angle XAO_1 = 90^\circ - 2\alpha$
8) $\angle BAO_1 = 90^\circ - 2\alpha + \alpha + \alpha = 90^\circ$
9) Значит, $AB = O_1B^2 - AO_1^2 = 6$
10) $AC = AB = \underline{\underline{6}}$

Ответ: 6

Задание номер: 5

Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел

$2^{x-1} - 3^{4-x} + a$ и $a + 5 - x^3 - 2x$

отрицательно.

Результат: 15

Введенный ответ:

№5.

$2^{x-1}-3^{4-x}+a$ и $a+5-x^3-2x$

Пусть. $f(x)=2^{x-1}-3^{4-x}+a$

$(f'(x)>0) \Rightarrow (f(x) \nearrow (-\infty;+\infty))$

Пусть $g(x)=a+5-x^3-2x$

$(g'(x)=-3x^2-2<0) \Rightarrow (g(x) \searrow (-\infty;+\infty))$

Таким образом, $g(x)$ и $f(x)$ пересекаются только в одной точке. При этом, эта точка является точкой максимума функции $h(x)=\min(f(x);g(x))$.

Т.к. сначала $f(x)<g(x)$ и $h(x)$ возрастает, а затем (после пересечения) $g(x)<f(h)$ и $h(x)$ убывает.

Пересечение $f(x)$ и $g(x)$ происходит при $x=2$:

$f(2)=2^{2-1}-3^{4-2}+a=2-9+a=a-7$

$g(2)=a+5-2^3-2\cdot 2=a+5-8-4=a-7$

Т.к. это точка max функции $h(x)$, а $h(x)$ должна быть <0 при всех x, то $a-7<0$

$a<7$

$a\in(-\infty;7)$

Ответ: $a\in(-\infty;7)$

Задание номер: 6

Автомобили Нива и Тойота едут по кольцевой трассе испытательного полигона, четверть которой проходит по грунтовой дороге, а оставшаяся часть - по асфальтовой.
Скорость Нивы на грунтовой дороге равна 80 км/ч, а на асфальтовой - 90 км/ч. Скорость Тойоты на грунтовой дороге равна 40 км/ч, а на асфальтовой - 120 км/ч. Автомобили одновременно стартуют в начале грунтовой части трассы и сначала едут по этой грунтовой части. На каком по счёту круге один из автомобилей впервые обгонит другой?

Результат: 10

Введенный ответ:

№6.

Пусть длина 1 круга - l км. Тогда $\frac{l}{4}$ км - длина грунтового участка
$\frac{3l}{4}$ - длина асфальтового участка.

Тойота проходит один круг за время:

$$t_1 = \frac{l}{4\cdot 40} + \frac{\cancel{3}^{1}l}{4\cdot \cancel{120}_{40}} = \frac{2l}{4\cdot 40} = \frac{l}{80}$$

Значит, её средняя скорость на круге: $V_1 = \frac{l}{\frac{l}{80}} = 80$ км/ч

Нива проходит круг за время:

$$t_2 = \frac{l}{4\cdot 80} + \frac{\cancel{3}^{1}l}{4\cdot \cancel{90}_{30}} = \frac{(3+8)l}{40\cdot 3\cdot 8} = \frac{11l}{12\cdot 80}$$

Значит, её средняя скорость на круге: $V_2 = \frac{l\cdot 12\cdot 80}{11l} = \frac{12}{11}\cdot 80$ км/ч

Значит, средняя скорость сближения автомобилей: $\left(\frac{12}{11}-1\right)\cdot 80 = \frac{80}{11}$ км/ч, приближается Нива. На первом круге встреча произойти не могла, т.к. на грунтовом участке ~~[illegible]~~ Нива быстрее, а он идёт в самом начале. Поэтому встреча случилась, когда нива прошла на 1 круг больше Тойоты.

Условие встречи: $\frac{l}{\cancel{4}0}\cdot(n-1) = \frac{11}{12}\cdot\frac{l}{\cancel{4}0}\cdot n$, n - номер круга встречи

$$\frac{1}{12}n = 1$$

$n = \underline{\underline{12}}$ (Нива пройдёт 12 кругов, Тойота - 11 кругов)

Ответ: на 12 круге (для Нивы)

Задание номер: 7

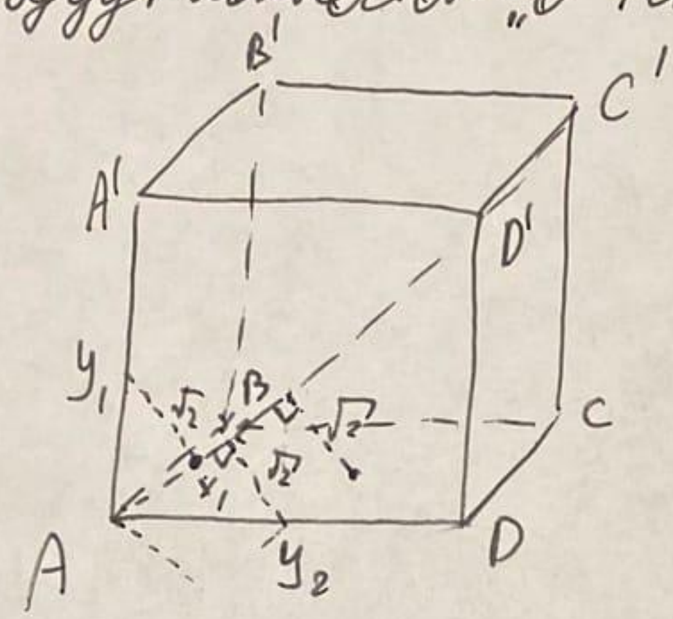
Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ освещается
цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2}$,
направленным вдоль главной диагонали куба. (Ось луча содержит главную диагональ.)
Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

Результат: 0

Введенный ответ:

№ 7.

Будут освещены те точки, которые удалены не более, чем на $\sqrt{2}$ от главной диагонали куба и лежат на поверхности 3 граней куба, наиболее близких к источнику света. Другие грани будут полностью „в тени".



Найдём крайние освещённые точки на рёбрах.

1) На ребре AA': из подобия $\triangle AA'C'$ и $\triangle AX_1Y_1$ (по 2 углам: $\angle AX_1Y_1 = \angle AA'C' = 90°$; $\angle A'AC'$ - общий)

$$\Downarrow$$

$$\frac{AY_1}{AC'} = \frac{Y_1X_1}{A'C'}$$

$$AY_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{AC'}{A'C'} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

2) На ребре AD: из подобия $\triangle AX_2Y_2$ и $\triangle ADC'$ (аналогично)

$$\frac{AY_2}{AC'} = \frac{Y_2X_2}{DD_1}$$

$$AY_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{AC'}{DC'} = \sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

3) На ребре AB: аналогично:

$AY_3 = \sqrt{3}$

4) Получается, что на каждой освещённой грани будет освещена четверть круга с $r = \sqrt{3}$

Значит, всего: $S = 3 \cdot \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{3 \cdot 3}{4}\pi = \frac{9}{4}\pi$

Ответ: $\frac{9}{4}\pi$.

Задание номер: 8

Известно, что m, n, k -- различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$

Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 3m + n$.

Результат: 0

Введенный ответ:

№ 8.

m, n, k - натуральные

$((\log_m n)$ - рац.$) \Rightarrow (n = m^a, a \in \mathbb{Z})$

$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}$$

$\min(k+3m+n)$ - ?

$m \geq 2$, т.к. $m>0; m \neq 1; m \in N$

$n \geq 2$, т.к. $n>0; n \neq 1; n \in N$

1) Допустим, что $m=2$, тогда $\min(n)=4$, чтобы $\log_m n$ являлось рациональным.

Минимальное возможное $k = 1$

Проверим:

$$1^{\sqrt{\log_2 4}} = 2^{\sqrt{\log_4 1}}$$

$m \in N; n \in N; k \in N; m \neq n; n \neq k; m \neq k$

$$1^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{0}}$$

Таким образом, данная комбинация m, n и k удовлетворяет всем условиям задачи. $k+3m+n = 1+3\cdot 2+4=11$

$$1 = 1$$

2) Докажем, что 11 - минимальная сумма.

Если мы берём $m \neq 2$, то $k+3m+n \geq k+9+n \geq 1+9+2=12>11$

т.к. числа - различные

Значит, в минимальной сумме $m=2$.

Тогда $\min(n)=4$, а $\min(k)=1$

Значит, в первом пункте мы получим минимальную возможную сумму - 11

Ответ: 11.