выход: 13^{02} — 13^{03}

Сдача работы: 14:34

0 333101 310007

33-31-01-31
(72.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 202

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов

по механике и математическому моделированию

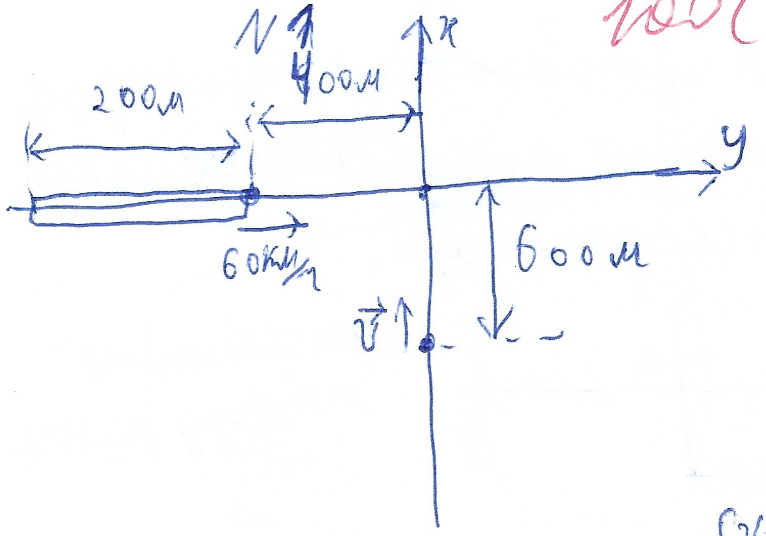
Бузина Алексея Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» февраля 2020 года

Подпись участника

чистовик

100(50)



(v - в км/ч)

а) не столкнётся с поездом, если проедет переездо до поезда или после:

если до поезда, то доедет до переезда быстрее, чем первый вагон $\Leftrightarrow \frac{400}{60} \geq \frac{600}{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow v \geq \frac{360}{4} = 90$ км/ч

если после поезда: доедет позже чем последний вагон $\Leftrightarrow \frac{600}{v} \geq \frac{200+400}{60} \Rightarrow v \leq 60$ км/ч

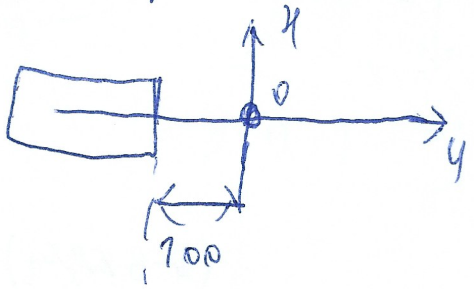
а) Ответ $v \in (-\infty; 60] \cup [90, +\infty)$

(если считать, что в границах 60 и 90 км/ч то есть касании столкновения нет)

б) автомобиль по пункту (а) проедет до поезда $\Rightarrow$ после прохождения первым вагоном переезда расстояние ~~между ними~~ (нужное) будет монотонно возрастать $\Rightarrow$ в момент, когда нужное расстояние минимально, ближайшая точка к авт. - передняя точка поезда.

черновик №1

до пересечения автомобилем переезда ~~нас~~ это расстояние монотонно убывает.
в момент пересечения авт.:



расстояние между ними 100 м

далее оно равно $\sqrt{x^2+y^2}$ (x - коорд. авт. y - начала поезда)

$$L=\sqrt{(120t)^2+(0{,}1-60t)^2}=\sqrt{10^{-2}-12\cdot10^{-0}\cdot t+3600t^2+120^2t^2}$$

(t - время с пер. авт.) (в км)

будет минимально при $t=\frac{12\cdot10^{-3}}{2(60^2+120^2)}$ т.к корень - монотонно возраст.

$$t=\frac{120\cdot10^{-3}}{2(6^2+12^2)}=\frac{60\cdot10^{-3}}{36+144}=\frac{60\cdot10^{-3}}{180}=\frac{10^{-3}}{3}\text{ ч}\Rightarrow$$

~~$L=\sqrt{\left(\frac{120}{3}\right)^2+\left(100-\frac{60}{3}\right)^2}=\sqrt{40^2+80^2}=$~~
~~$=10\sqrt{16+64}\approx 90$~~

$$\Rightarrow L=\sqrt{\left(\frac{120}{3}\cdot10^{-3}\right)^2+\left(0{,}1-\frac{60\cdot10^{-3}}{3}\right)^2}=\sqrt{16\cdot10^{-4}+(0{,}08)^2}=$$

$$=10^{-2}\sqrt{0{,}16+64}\approx0{,}08\text{ км}$$: Ответ 80 м

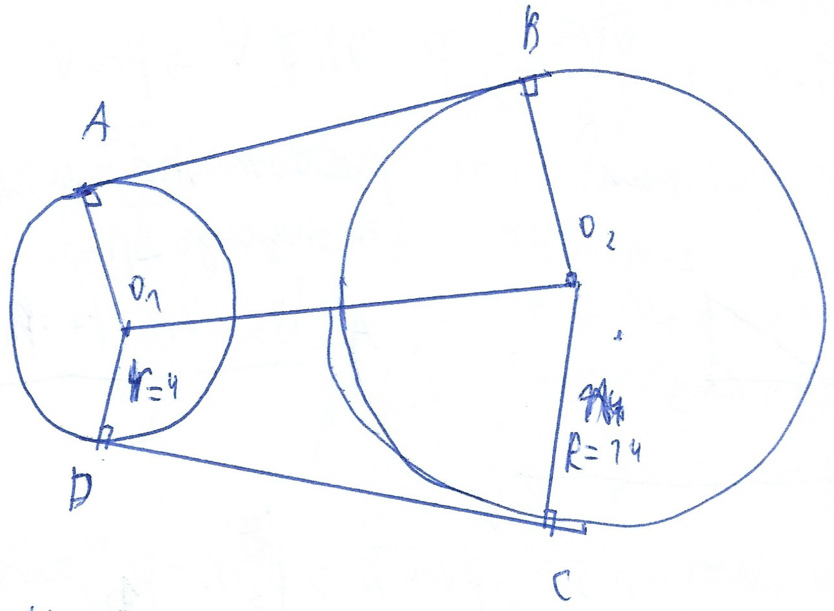
7.

здесь ~~ошибка~~

33-31-01-31
(72.2)

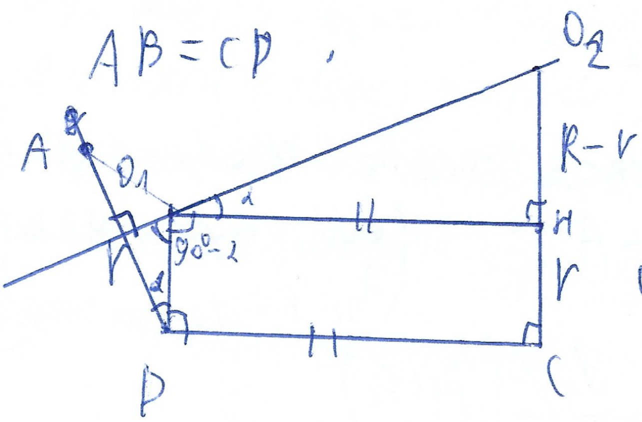
чистовик

N 2



есть 4 участка: отрезки AB и CD; меньш. ◡AD и больш ◡BD.

AB = CD.



$\Rightarrow$ по теореме пифагора: $O_1H = DC = \sqrt{O_1O_2^2 - (R-r)^2} =$

$= \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$ см

$\Delta AO_1D \sim \Delta BO_2C$ по 2 призн. $\angle O_2O_1H = \alpha$

$\sin\alpha = \frac{R-r}{O_1O_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \angle O_1DA = \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AO_1D = \pi - \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ (длина больш.) . $\Rightarrow$ ◡AD $= r \cdot \frac{2\pi}{3}$ (длина);

◡BC $= R\,\frac{4}{3}\pi$.

в итоге длина равна (в см) $2 \cdot DC +$ ◡AD $+$ ◡BC $=$

$= 20\sqrt{3} + 8\,\frac{\pi}{3} + 14 \cdot 4\,\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(64 + 20\sqrt{3}) > \frac{3{,}14}{3}(64 + 20 \cdot 1{,}7) =$

$= \frac{3{,}14}{3} \cdot 98 = 98 + \frac{0{,}14 \cdot 98}{3} = 98 + 0{,}04 \cdot 98 > 100$ см $\Rightarrow$ Ответ нет.

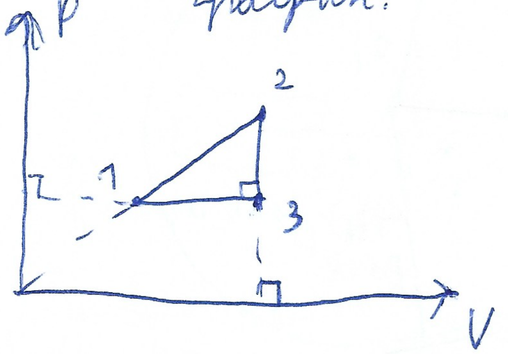
+

чистовик № 4

$pV = \nu RT$ $\quad \nu = 1$ моль

$T = \gamma V^2 = \frac{pV}{\nu R} \Rightarrow p = \nu R \gamma V \Rightarrow p \sim V$

график.



работа газа цикла — площадь Δ123 в pV коорд.

$$A = \frac{(V_3 - V_1)(p_2 - p_1)}{2}$$

т.к в 2-3 $V = const$; $pV \sim T \Rightarrow p_3 \cdot n = p_2$; аналогично для 1-3 и $V \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 \cdot n = V_3$. $\quad A = \frac{p_1 V_1 (n-1)(n-1)}{2}$ $\cancel{p_1V_1(n-1)(1-\frac{1}{n})}$

т.к в 1-2 $p \sim V$: $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$.

тепло Q к газу подводится только в процессе 1-2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по з.т.д.: $Q = \Delta U_{12} + A_{12} =$ (ΔU_{12} — измен. вн.эн. газа 1-2; A_{12} — работа газа на 1-2)

$$= \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{(V_2 - V_1)(p_1 + p_2)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(3p_2V_2 - 3p_1V_1 + V_2 p_1 - V_1 p_2 - p_1V_1 + p_2V_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(2p_2V_2 - 2p_1V_1) \quad \left(\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{1}{4} \cdot \frac{p_1V_1(n-1)^2}{p_2V_2 - p_1V_1} = \frac{1}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2-1} = \quad (p_2V_2 = n^2 p_1V_1)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}5}{\cancel{2}\ 2{,}5} = \cancel{\frac{1}{16}}\ \frac{1}{20}$$ — ответ

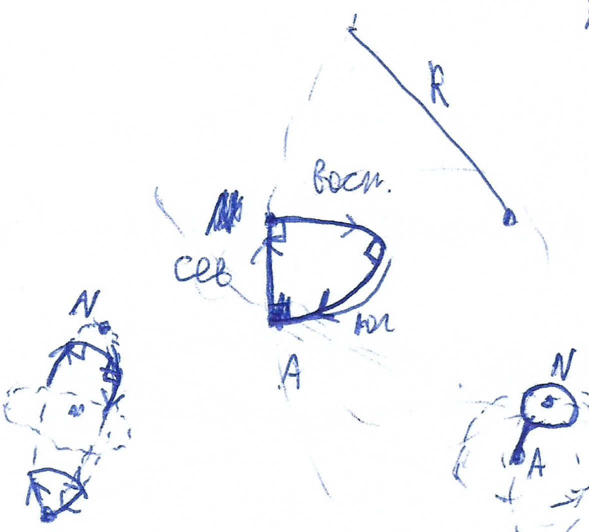
+.

33-31-01-31
(72.2)

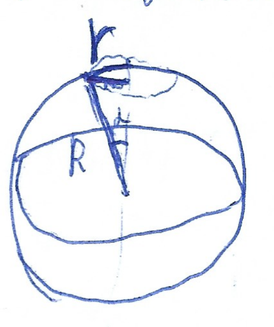
чистовик

N 3

~~т.К оба этих сфер~~



так как A и B севернее экватора: направление на север и на юг ⊥ сек. плоскости в которых движутся на восток или запад и т.к отрезки путей на север и на юг если не совпадают, то должны пересекаться в южном полюсе т.к 2 больших круга на сфере имеют 2 прот. общих точки (в этом случае сев и южн. полюс), но последнее движение в сторону юга ⇒ т.К они севернее экватора отрезки путей на север и на юг совпадают ⇒ за путь на восток и запад они проходят полный круг.



~~т.к $\alpha \ll 1$: $\sin\alpha \approx tg\,\alpha \approx \frac{r}{R}$~~

~~$\alpha_1 = \frac{2}{R}$; α~~

(r_1; r_2 - радиусы окр. которые они прош. A - 1; B - 2)

$r_1 \cdot 2\pi = 2$ км

$r_2 \cdot 2\pi = 3$ км

$\alpha \ll 1 \Rightarrow \alpha \approx tg\,\alpha \Rightarrow \alpha \approx \frac{r}{R} \Rightarrow \alpha_1 \approx \frac{1\text{ км}}{\pi R}$; $\alpha_2 \approx \frac{3\text{ км}}{2\pi R} \Rightarrow$

⇒ расстояния до сев. полюса медведей A и B соотв. равны $2 + r_1$ и $3 + r_2$; максимальное расстояние между A и B равно их сумме: $3 + r_2 + 2 + r_1 =$

$= 5 + \frac{5\text{ км}}{2\pi} = 5\left(1 + \frac{1}{2\pi}\right)\text{км} = 5 \cdot \frac{2\pi + 1}{2\pi} \approx 5 \cdot \frac{7,28}{6,28} \approx \frac{36,5}{6,3}\text{ км} \Rightarrow$

Чистовик №3

$$
\begin{array}{r|l}
36{,}5 & 6{,}3 \\
\hline
-31{,}5 & 5{,}8 \\
\hline
-5\,5 & \\
5{,}4 & \\
\hline
0{,}1\,0 &
\end{array}
$$

Ответ ≈ 5,8 км

чистовик № 5

рассмотрим чёрную частицу:

$$\begin{cases} y = 2020 - x^4 \\ y = 73n - 2n^2 + 3970 - (n+89)x^2 \end{cases}$$

$x^4 - (n+89)x^2 + 1890 + 73n - 2n^2 = 0$ – чётное для x ~~симм.~~

имеет не менее 3 решений ⇒

~~$-2n^2 + 73n + 1981 \,|\, n+89$~~
~~$-2n^2 - 89n$~~
~~$162n + 1981$~~ ~~$-2n$~~

⇒ если $x = 0$ подходит, ~~то~~ то ∃ 2 других решения и они симм. относительно ~~xx~~ 0:

$1890 + 73n - 2n^2 = 0 \Rightarrow n = \frac{-73 \pm \sqrt{73^2 + 8 \cdot 1890}}{-4}$

$73 \cdot 73 = 219 + 511\ldots = 5329$; $1890 \cdot 8 = 15120$

~~$\Leftrightarrow 8 \cdot 1890 \Rightarrow n \in \varnothing$ в этом случае~~

$D = 20449$

$20449 : 11 = 1859$ (11, 94, 88, 64, 55, 99)

$1859 : 11 = 169$ (11, 75, 66, 9) ⇒

$\Rightarrow n = \frac{-73 \pm 11 \cdot 13}{-4} =$

$= \frac{73 \pm 143}{4} = \frac{216}{4}; \frac{70}{4} \Leftrightarrow n = 54$ $(n \in \mathbb{Z})$

при $n = 54$:

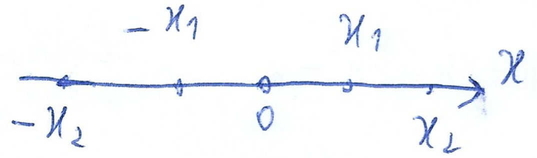
$x^2(x^2 - 89 - 54) = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{143} \end{array}\right.$ ($x = 0$ рассмотрено) симм. относ. 0

⇒ только $n = 54$ подходит в этом случае.

чистовик N 5

если $\exists$ 4 решения: $x_1; -x_1; x_2; -x_2$:

б.о.о. $0 < x_1 < x_2$.



т.к. они образуют ар. прогресс.!

$\Rightarrow x_2 - x_1 = x_1 - (-x_1) = -x_1 - (-x_2) = 2x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_2^2 = 9x_1^2$

$$\begin{cases} x_1^4 - (89+n)x_1^2 + 1890 + 73n - 2n^2 = 0 \\ \underbrace{x_2^4}_{81x_1^4} - (89+n)\underbrace{x_2^2}_{9x_1^2} + 1890 + 73n - 2n^2 = 0 \end{cases}$$

вычтем из 2 первое:

$80x_1^4 - (89+n)\, 8x_1^2 = 0$ $(x_1 > 0)$

$10x_1^2 - (89+n) = 0$ подставим x_1^2 в первое:

$x_1^2 = +\frac{(n+89)}{10}$ ~~$x_1 \in \varnothing \Rightarrow n \in \varnothing$ в этом случае~~

~~$\frac{(n+89)^2}{100} - \frac{(n+89)^2}{10}$~~

$(n+89)^2\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{10}\right) +$

$+ 1890 + 73n - 2n^2 = 0$

~~Ответ: $n = 54$~~

$0{,}09(n^2 + 178n + 89^2) + 1890 + 73n - 2n^2 = 0$

~~$n = \frac{(178 \cdot 0{,}09 + 73) \pm \sqrt{(178 \cdot 0{,}09}}{2 \cdot 1{,}81}$~~

$-181n^2 + n(\underbrace{7300 - 9\cdot 178}_{5698}) + (\underbrace{189 \cdot 10^3 + 9 \cdot 89^2}_{260289}) = 0$

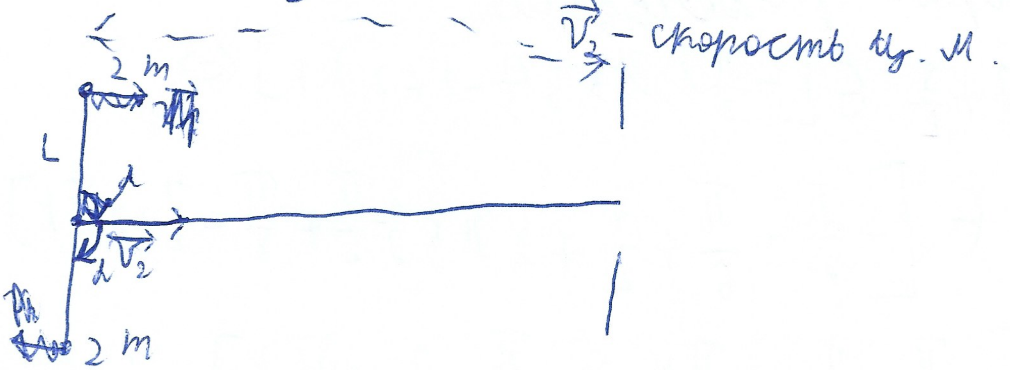
не имеет решений в $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Ответ $n = 54$

~~$n \in \varnothing$ при в этом случае~~

рассмотрели не все случаи

Чистовик №6

$S = L$

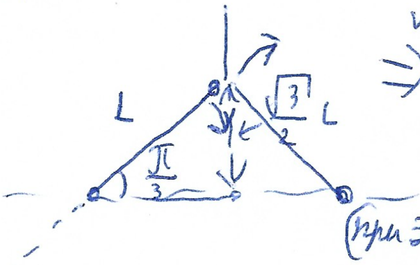


Сразу после удара: по З. С. И: $mv = 4mv_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_2 = \frac{v}{4}$. по З. С. М. И для ц. м.:

$mv \cdot L = 4m w L^2$ $\left(w = \frac{d\alpha}{dt}\right) \Rightarrow w = \frac{v}{4L}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + wt$.



может быть без удара $\Rightarrow$ вкатится только если $\sin\alpha \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, когда ц. м. на расстоянии $\frac{L}{2}$ от ворот. (при этом $tg\,\alpha < 0$)

За время прохождения через ворота он повернётся меньше чем на $\frac{\pi}{2}$ и в конце $\sin\alpha \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ за время $\frac{L}{v_2}$ он повернётся на угол $\le \frac{2\pi}{3}$.

за время $\frac{L}{v_2}$ повернётся на угол $\frac{L}{v_2} \cdot w = \frac{L}{\frac{v}{4}} \cdot \frac{v}{4L} = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в момент, когда ц. м. будет на расстоянии $\frac{L}{2}$ от ворот. $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} - 1 + 2\pi k\right]$ $k \in Z$ –

– критерий прохождения без удара,

а в этот момент: $\alpha = \frac{\pi}{2} + w\left(\frac{S - \frac{L}{2}}{v_2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{v}{4L} \cdot \frac{S - \frac{L}{2}}{\frac{v}{4}} =$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{S}{L} - \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

чистовик N6 $k \in Z$

$\Rightarrow$ критерий прохождения:

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{S}{L} \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} - 1 + 2\pi k\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{S}{L} \in \left[-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} + 2\pi k\right]$

$\frac{S}{L} \in \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} + 2\pi k\right]$

$S_{[м]} \in \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} + 2\pi k\right] \quad k \in Z$

Ответ: - критерий того, что не заденет

черновик 1 2 4 5 6

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times\ 77 \\ \hline 179 \\ 2\,8\,9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times\ 89 \\ \hline 901 \end{array}$$

3

8100

(89)

$(90-1)^2 =$

$= 8100 - 2 \cdot 90 + 1 =$

$= 7921$

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times\ 72 \\ \hline 178 \\ 623 \\ \hline 6408 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ 178 \\ \times\ 9 \\ \hline 1602 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 7921 \\ \times\ 9 \\ \hline 71289 \\ 880 \\ 189 \\ \hline 260289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5698 & 181 \\ \cline{2-2} 543 & 31 \\ \hline 268 & \end{array}$$