1350 – 1357

0 062894 620009

06-28-94-62
(73.1)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 203

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"

по Механике и математическому моделированию

Геращенко Никиты Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+ 1 лист. [illegible]

Дата

«29» февраля 2020 года

Подпись участника

95 (Девяносто пять)

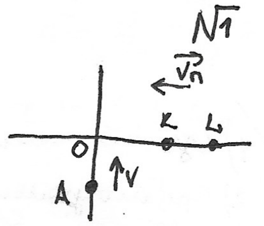
06-28-94-62
(73.1)

Чистовик

№1

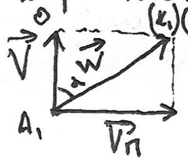
Дано:
$l = 150м = KL$
$V_п = 90км/ч$
$AO = 500м$
$OK = 750м$

V чтобы избежать встр
Б) min расстояние



1) Очевидно, что в условиях данной задачи Машина – материальная точка; Поезд – тело, обладающее реальными размерами.

2) Перейдем в систему отсчета, связанную с поездом; $\vec{V} = \vec{W} + \vec{V_п}$, где W – относительная скорость машины относительно поезда.



по теореме Пифагора $W = \sqrt{V^2 + V_п^2}$

3) т.к Поезд – не мат. точка ⇒ машина Машина может проехать „перед ним" или „за ним"

Если она проедет перед ним. $\triangle AOK \sim \triangle A_1OK_1 \Rightarrow \angle OA_1K_1 = \angle OAK \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha_1 = \frac{V_п}{V}$; $tg\alpha_1 = \frac{OK}{OA}$; $\frac{V_п}{V} = \frac{OK}{OA}$; $\frac{90}{V} = \frac{0,75}{0,5} \Rightarrow V = \frac{90 \cdot 100 \cdot 4}{2 \cdot 753} = 60$

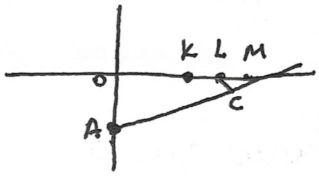
$\Rightarrow V > 60 км/ч$

Если она проедет За Ним. $\triangle AOL \sim \triangle A_1OL_1 \Rightarrow \angle OAL = \angle OA_1L_1$

$tg\alpha_2 = \frac{V_п}{V}$; $tg\alpha_2 = \frac{OL}{OA}$; $[OL = OK + KL = 0,9]$; $\frac{90}{V} = \frac{0,9}{0,5} \Rightarrow$

$V = \frac{90 \cdot 100}{2 \cdot 90} = 50 \Rightarrow V < 50 км/ч$

$\boxed{Б}$



$V = 45 км/ч \Rightarrow tg(\angle OAM) = \frac{90}{45} = 2$

$\frac{OM}{OA} = 2 \Rightarrow OM = 2 \cdot 0,5 = 1км$ (очевидно, что он проедет за поездом) ⇒

⇒ Кратчайшее расстояние – перпендикуляр опущенный из точки L на прямую AM ⇒ $LC \perp AM$

$\triangle AOM \sim \triangle LCM$ (по 2 углам) ($\angle OMC$ – общий); $\cos\beta = \frac{V_п}{W}$

$W = 45\sqrt{5} \Rightarrow \cos\beta = \frac{90}{45\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{5-4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

~~$\frac{LC}{LM} = \cos\beta \Rightarrow LC = LM \cdot \cos\beta = \frac{(1-0,9) \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{100 \cdot 2}{\sqrt{5}} = 40\sqrt{5}$ в километрах~~

~~Ответ: А) $V < 50 км/ч$; $V > 60 км/ч$~~

~~Б)~~

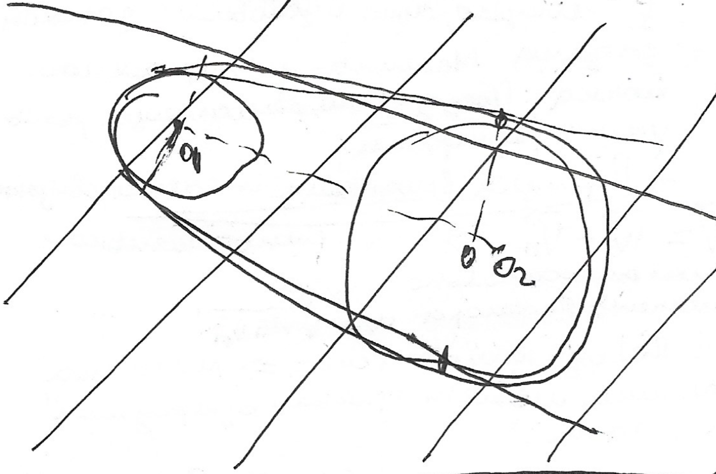
$\frac{LC}{LM} = \sin\beta \Rightarrow LC = LM \cdot \sin\beta = \frac{100}{\sqrt{5}} = \frac{\overset{20}{\cancel{100}}\sqrt{5}}{\cancel{5}} = 20\sqrt{5} \approx$

≈ 45 метров (прикидка в черновике)

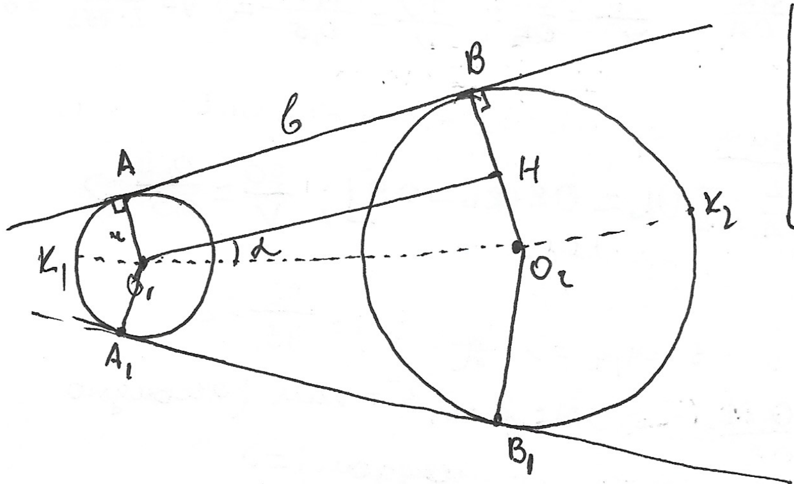
Ответ: А) $V < 50 км/ч$; $V > 60 км/ч$

Б) $20\sqrt{5}$, 45 метров.

Чистовик №2



~~1) Где-то искать касательные~~
~~2) прямоугольники~~
~~3) хорда~~
~~4) Комплементарные связи~~



Дано:
$O_1O_2 = 22$ см
$r = 4$ см
$R = 15$ см
$\ell = 111$ см

Сравнить длину ремня с длиной шнура.

Очевидно (исходя из симметрии), что длина половины кольца складывается из длины дуги K_1A и BK_2 и AB;

1) AB — часть ремня, „соединяющая" шкивы.
В этих точках происходит „первое касание" $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ AB — касательная к окружностям O_1 и O_2
т.к AB — касательная $\Rightarrow O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB \Rightarrow$
$\Rightarrow O_1A \parallel OB$

2) $\left.\begin{matrix} O_1A \parallel OB \\ AB \nparallel O_1O_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_1ABO_2$ — трапеция;
Опустим высоту OH.
$\left.\begin{matrix} \text{Т.к } O_2B = R \\ O_1A = r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{O_2B}{O_2O_1} = \cancel{\frac{BH + HO_2}{AO_1}} = \frac{BO_2 - \overset{AO_1 = r}{BH}}{O_2O_1} =$

$= \frac{R - r}{O_1O_2} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $O_1H = AB = b$ (прямоугольник O_1ABH)
$\cos\alpha = \frac{O_1H}{O_1O_2} \Rightarrow O_1H = \frac{\sqrt{3} \cdot \overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{2}} = 11\sqrt{3}$

4) $\angle K_1O_1A = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\cup K_1A = r \cdot \angle K_1O_1A = r \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

5) $\angle BO_2K_2 = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \pi = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$\cup BK_2 = R \cdot \angle BO_2K_2 = \frac{R \cdot 2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 15\pi}{3} = \cancel{5\pi}\ 10\pi$

6) K_1ABK_2 - кривая; $K_1ABK_2 = 11\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi + \cancel{5\pi}\ 10\pi =$

$= 11\sqrt{3} + \frac{34\pi}{3}$

+

7) $l_1 = 2 \cdot K_1ABK_2 = 22\sqrt{3} + \frac{68}{3}\pi$

Округлим сверху $22 \cdot 1{,}8 + \frac{68 \cdot 3{,}15}{3} \approx 111$

$\Downarrow$

истина меньше $\Rightarrow l > l_1 \Rightarrow$ Хватит. Ответ

№4. чистовик

$\nu = 1$

1-2 $V\nearrow$; $T\nearrow$ $\quad T(V) = \gamma V^2$

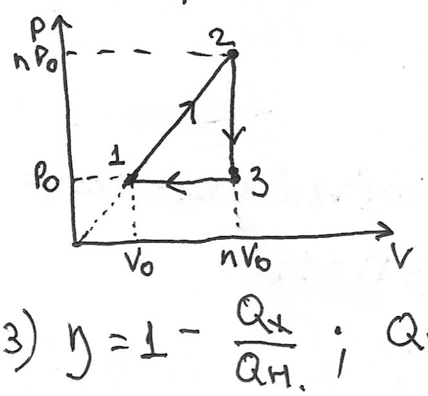
2-3 $V = const$; $\quad \frac{T_2}{T_3} = n \Rightarrow T\downarrow$

3-1 $P = const$ $\quad \frac{V_3}{V_1} = n$; $T\downarrow$

1) Проанализируем процесс 1-2; исходя из закона Менделеева-Клапейрона $PV = \nu RT \Rightarrow T = \frac{PV}{\nu R} = \frac{PV}{R}$

$T = \gamma V^2 \Rightarrow \frac{P\cancel{V}}{R} = \gamma V^{\cancel{2}} \Rightarrow P(V) = R\gamma V \Rightarrow$ зависимость $P(V)$ - линейная и в координатах P-V прямая пройдет через начало координат.

2) Изобразим процесс в координатах P-V



а) Пусть состоянию 1 соответствуют параметры $(V_0; P_0)$, тогда

т.к. $\frac{V_3}{V_1} = n \Rightarrow V_3 = nV_0$

б) т.к. 1-2 проц. линейный и проходит через начало координат, то $P_2 = nP_0$

3) $\eta = 1 - \frac{Q_x}{Q_H}$; $Q_H = Q_{1-2} = A_{1-2} + \Delta U_{1-2}$

A_{1-2} - площадь трапеции $\Rightarrow A_{1-2} = \frac{P_0 + nP_0}{2}(nV_0 - V_0) = \frac{P_0(n+1)V_0(n-1)}{2} =$

$= \frac{P_0V_0(n^2-1)}{2}$

$$Q_{1-2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} nP_0 \cdot nV_0 - \frac{3}{2} P_0 V_0 = \frac{3}{2} P_0 V_0 (n^2-1)$$

$$Q_н = \frac{3}{2} P_0 V_0 (n^2-1) + \frac{P_0 V_0 (n^2-1)}{2} = \frac{P_0 V_0 (n^2-1)}{2}(3+1) =$$

$$= 2 P_0 V_0 (n^2-1)$$

Работа газа за цикл – площадь $\Delta 123$

$$A = \frac{(nP_0 - P_0)\cdot(nV_0 - V_0)}{2} = \frac{P_0 V_0 (n-1)^2}{2}$$

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{\cancel{P_0 V_0} (n-1)^{\cancel{2}}}{2 \cdot 2 \cancel{P_0 V_0} \cancel{(n-1)}(n+1)} = \frac{n-1}{4(n+1)} = \frac{1}{4\cdot 3} = \frac{1}{12}$$

Ответ: $\eta = \frac{1}{12}$.

№5.

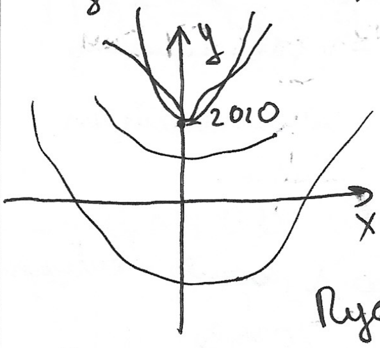
$y = x^4 + 2020$ (1)

(2) $y = 2n^2 - 458 - 25n + (n+101)x^2 \longrightarrow y = (n+101)x^2 + (2n^2 - 25n - 458)$

исходя из этого перед нами 2 функции

1 неподвижна, 2 рая перемещается по прямой OY,

изменяя коэффициент „a".



Логично предположить, что использовать графический способ бессмысленно.

Приравняем функции, найдем пересечения

$$x^4 + 2020 = (n+101)x^2 + (2n^2 - 25n - 458)$$

Пусть $x^2 = t$; $t \geq 0$

$$t^2 + 2020 = (n+101)t + (2n^2 - 25n - 458)$$

$$t^2 - (n+101)t - (2n^2 - 25n - 2478) = 0$$

$$D = (n+101)^2 + 4(2n^2 - 25n - 2478) = n^2 + 202n + 101^2 + 8n^2 - 100n - 2478\cdot 4 =$$

$$= 9n^2 + 102n + 289 = (3n)^2 + 2\cdot 3\cdot 17 + 17^2 = (3n+17)^2$$

$\Rightarrow D > 0$ ~~$\forall n \in \{1,2,3,$~~ $\forall n \in R$

$$t_{1,2} = \frac{n+101 \pm (3n+17)}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{4n+118}{2} = 2n+59 \\ \frac{-2n+84}{2} = 42-n \end{array} \right.$$

Рассмотрим различные случаи для t

а) $t_{1,2} < 0 \Rightarrow$ нет решений

б) $t_1 = t_2 = 0 \Rightarrow$ в терминах „X" 2 решения, а это противоречит условию

в) Одно из решений больше 0, другое $=0 \Rightarrow$ в терминах „X" 3 решения.

$$\begin{cases} 2n+59=0 \\ 42-n>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2n+59>0 \\ 42-n=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=-\frac{59}{2} \\ n<42 \end{cases} \text{ нет решений, т.к. } n \in N \qquad \begin{cases} n>-\frac{59}{2} \\ n=42 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1=0 \\ t_2 = 82+59=141 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 82 \\ +59 \\ \hline 141 \end{array}$$

$x_3=0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{141}$

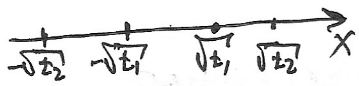
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ очевидна арифметическая прогрессия $d=\sqrt{141}$

$\Rightarrow$ ~~бо~~ частица $n=42$ перекрасится в красный.

г) $t_{1,2} > 0 \Rightarrow$ в терминах „X" будет 4 решения ~~и~~ и, чтобы соблюдалась арифмет. прогрессия они должны располагаться следующим образом

$$\Rightarrow \sqrt{t_2}-\sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1})$$



$$\sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2 = 9t_1 \Rightarrow$$

$2n+59 = 9(42-n)$

$2n+59 = 9\cdot 42 - 9n$

$11n = 9\cdot 42 - 59$

$n=29$

$42-n = 9(2n+59)$

$42-n = 18n + 9\cdot 59$

$\frac{42-9\cdot 59}{19} = n \Rightarrow n \notin N$

Ответ ~~было~~ частицы с номерами 42 и 29 перекрасятся.

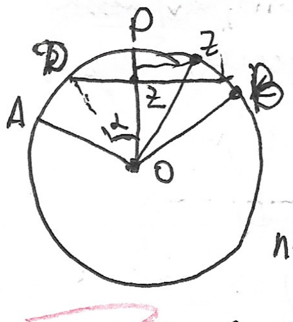
Задача 3.

1) Медведи завершили поход за ~~3...~~ 3 приема ⇒ ближе к экватору это сделать нельзя, иначе они не вернутся в точку старта ⇒ Действие происходило на полюсе, т.к. там ни запад, ни восток не определены.

2) Возможность ~~т.~~ локации на Южном полюсе исключена условием задачи.

3) Предположительно 1) медведи стартовали ниже расстояний 5 ч 2 от Северного полюса.
2) Ходили вокруг полюса в поиске запада (востока)
3) Пошли на Юг.

4) Изобразим.



Дойдя до точки D начал описывать окружность вокруг полюса радиусом r

$r = DZ$

$\sin\alpha = \frac{DZ}{DO} = \frac{DZ}{R} = \frac{r}{R}$

$n \cdot 2\pi r = 5$, где n — кол-во кругов вокруг полюса

$r = \frac{5}{2\pi n} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{2\pi n \cdot R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{5}{2\pi n R}$

$\cup DP = R \cdot \alpha = \cancel{r}$

Рассуждая похожим образом

$\cancel{r}\ \sin\beta = \frac{1}{2\pi R \cdot K}$, где K — кол-во кругов второго медведя.

$\cup PZ = R \cdot \beta = R \cdot \arcsin\frac{1}{2\pi R \cdot K}$ Ошибка

Очевидно, что наибольшее расстояние возможно, если медведи находятся по разные стороны от прямой OP =>

$l = \cup AD + \cup DP + \cup PZ + \cup ZB = 5 + R \cdot \arcsin\frac{5}{2\pi n R} + 2$
$+ R \cdot \arcsin\frac{1}{2\pi R \cdot k} = 7 + R\left(\arcsin\frac{5}{2\pi n R} + \arcsin\frac{1}{2\pi R k}\right)$

Очевидно, что наибольшее расстояние возможно, при $n = k = 1$

$l = 7 + 6370\left(\arcsin\frac{1}{2548\pi} + \arcsin\frac{1}{12740\pi}\right)$

Т.к путь пройденный медведями

$5 << R \Rightarrow \sin\alpha \approx \alpha$

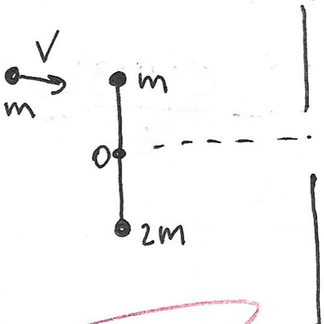
$l = 7 + 6370\left(\frac{5}{2\pi R} + \frac{1}{2\pi R}\right) = 7 + \frac{6370 \cdot 6}{2\pi R} =$

$= 7 + \frac{3}{\pi} \approx 8$ км.

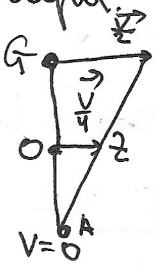
Ответы обведены.

~~Черновик~~ Чистовик

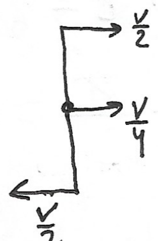
Задача 6.



1) Исходя из ЗСИ:
$mV = 2mU \Rightarrow U = \frac{V}{2} \Rightarrow$ Сразу после попадания верхний шар поедет со скоростью $\frac{V}{2}$; Изобразим, то, что происходит с другими точками гири. ~~Исходя из подобия треугольн~~

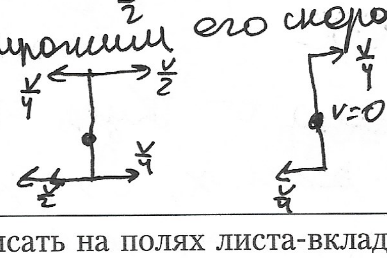


Т.к $OZ \rightarrow$ средняя линия $\triangle OGK \Rightarrow OZ = \frac{1}{2} GK \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Скорость середины равна $\frac{V}{2} \cdot \frac{1}{2} =$
$= \frac{V}{4}$

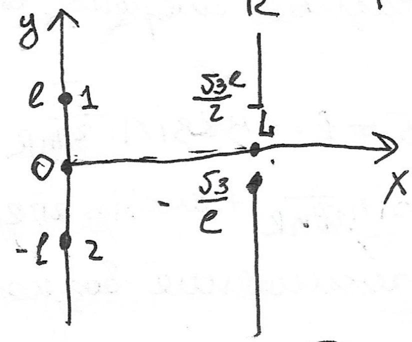


3) а) Рассмотрим вращение

б) Остановим центр $\Rightarrow$ приложим его скорость, но в обратном направлении



Т.к. $\omega = \frac{V}{R} = \frac{V}{4l}$



4) Введем прямоугольную систему координат. в центре — середина палки. Напишем закон движения для точки 1 и 2 t_2.

~~$x_1 = \frac{V}{4} \cdot t + \sin(\omega t) l \cos(\omega t)$~~

~~$x_1 = \frac{V}{4} \cdot t + l \sin(\omega t)$ $y_1 = l \sin(\omega t)$~~

$$x_1 = \frac{V}{4} \cdot t + \sin(\omega t) \cdot l; \quad y_1 = l \cdot \cos(\omega t)$$

$$x_2 = \frac{V}{4} \cdot t - \sin(\omega t) l; \quad y_2 = -l \cdot \cos(\omega t)$$

~~1)~~ Пусть шарик 1 окажется на уровне $\frac{\sqrt{3}l}{2}$

$$\frac{\sqrt{3}l}{2} = l \cdot \cos(\omega t); \quad \cos(\omega t) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6 \cdot \omega} = \frac{\pi \cdot 4l}{6 \cdot V} = \frac{2\pi l}{3V}$$

$$x_1 = \frac{V \cdot 2\pi l}{24 \cdot 3V} + \frac{1}{2} l = \frac{\pi l}{6} + \frac{l}{2} = \frac{\pi l + 3l}{6} = \frac{l(\pi + 3)}{6} \approx$$

$$\approx l$$

~~x_2~~ Аналогично для второй

$$\frac{\sqrt{3}l}{2} = -l \cdot \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega t = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow t = \frac{5\pi}{6\omega} = \frac{5\pi \cdot 4l}{36 V} = \frac{10\pi l}{3V}$$

$$x_2 = \frac{V \cdot 10\pi l}{3V} - \frac{l}{2} = l\left(\frac{10\pi}{3} - \frac{1}{2}\right) = l\left(\frac{20\pi - 3}{6}\right) \approx$$

$$\approx 200l$$

Я не знаю от куда брать L, но учитывая порядок данных, я думаю, что не заденет.

не может зависеть от L

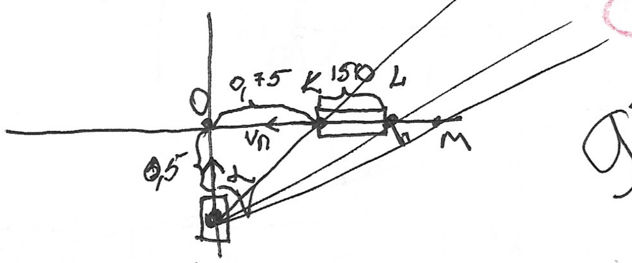
±

Черновик.

1. „Товарный поезд"

$l = 150$м.
$V_п = 90$ км/ч
$V = ?$
750м - поезду
500м - авто

при каких
а) V не столкнется
б) минимальное расстояние



92М
$40\sqrt{5}$

$W = \sqrt{V^2 + V_п^2}$

$\frac{V_п}{V} = \frac{0,75}{0,5}$; $\frac{90}{V} = \frac{0,75}{0,5}$

$\cancel{V = \frac{90 \cdot 75 \cdot 3}{2 \cdot 100 \cdot 4} = \frac{45}{4}}$ $V = \frac{90 \cdot 100 \cdot 4^2}{2 \cdot 75 \cdot 3} = 60$ км/ч

$V > 60$ км/ч

$\frac{V_п}{V} = \frac{0,9}{0,5} \Rightarrow V = \frac{90 \cdot 100}{2 \cdot 90} = 50$ –

$V < 50$ км/ч

2,3·40
23·4
23 × 4 = 92

2) $\frac{90}{45} = 2$; $tg\,\alpha = 2$; $\Rightarrow \frac{OM}{0,5} = 2$; $OM = 1$ км. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ машина проедет за хвостом поезда

$\cos\beta = \frac{V_п}{W}$ $\frac{40 \cdot 23}{10}$ ×23 40 $\frac{23}{10}$ $\frac{100 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{5}$

$W = \sqrt{90^2 + 45^2} = \sqrt{4 \cdot 45^2 + 45^2} = \sqrt{45^2(4+1)} = 45\sqrt{5}$

$\cos\beta = \frac{90}{45\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} =$ $\frac{100 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{100} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{\cancel{5}} = 40\sqrt{5}$

$\frac{LC}{LM} = \cos\beta \Rightarrow LM = \frac{LC}{\cos\beta} = \frac{0,1\sqrt{5}}{2} = \frac{1\sqrt{5}}{10 \cdot 2} = \frac{\sqrt{5}}{20}$

$\frac{\cancel{100} \cdot \sqrt{5}}{\cancel{2}} = 50\sqrt{5}$ м

$LC = \frac{2 \cdot 50}{\sqrt{5}} = \frac{100}{\sqrt{5}} \approx 48$

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$

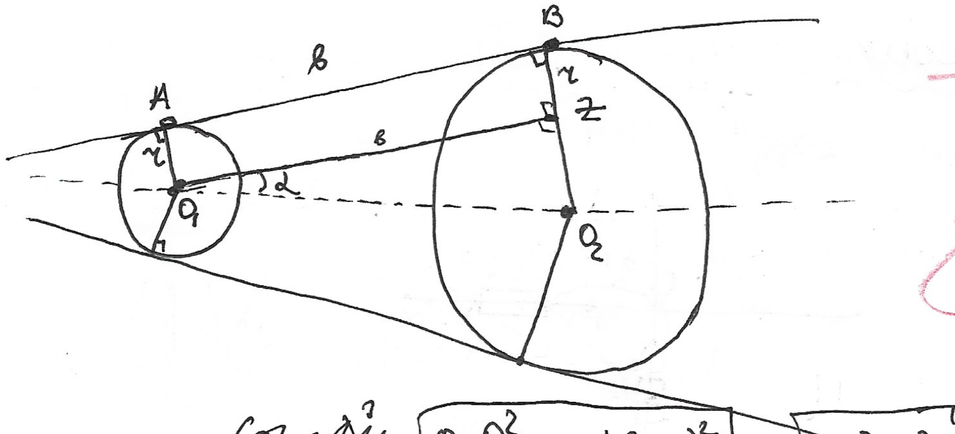
$\sqrt{4,41} < \sqrt{5} <$ $\sqrt{4,84} < \sqrt{5} < \sqrt{5,29}$

2,1 2,2 2,3

2,1 × 2,1 = 4,41
2,2 × 2,2 = 4,84
2,3 × 2,3 = 5,29

1000 : 23 = 43

23 × 4 = 92



$O_1Z = \cancel{(R-r)^2} \sqrt{\underset{22}{O_1O_2^2} - (\underset{11}{R-r})^2} = \sqrt{22^2 - 11^2} = \sqrt{11^2(4-1)} =$

$= 11\sqrt{3}.$

$\sin\alpha = \frac{R-r}{O_1O_2} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}$

$\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - 2\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

$r \cdot \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}; \quad \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$11\sqrt{3} + \left(\frac{r\cdot\pi}{3} + \frac{R\cdot 2\pi}{3}\right) = 11\sqrt{3} + \frac{4\cdot\pi}{3} + \frac{15\cdot 2\pi}{3} =$

$= 11\sqrt{3} + \frac{34\pi}{3}$

$22\sqrt{3} + \frac{68\pi}{3} = 22\cdot 1{,}8 + \frac{68\cdot 3{,}15}{3}$

$\begin{array}{r} \times\ 22 \\ 1{,}8 \\ \hline 176 \\ 22\ \ \\ \hline 39{,}6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 315 \\ 68 \\ \hline 2520 \\ 1890\ \ \\ \hline 214{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 214{,}2 & 30 \\ -210\ \ & 71{,}4 \\ \hline 42 & \\ -30 & \\ \hline 120 & \end{array}$

$\begin{array}{r} +\ 71{,}4 \\ 39{,}6 \\ \hline 111{,}0 \end{array}$

Хватит.

06-28-94-62
(73.1)

черновик Задача 6

$L = \frac{v}{4} \cdot t + \sin(w \cdot t) \cdot l$

$L = \frac{v}{4} \cdot t + \sin\left(\frac{v \cdot t}{4l}\right) \cdot l$

$\frac{v}{4} t = y$

$L = y + \sin\left(\frac{y}{l}\right) \cdot l$

$L = \frac{v}{4} \cdot t$

$t = \frac{4L}{v}$

$L + \sin\left(\frac{w \cdot 4L}{v}\right) \cdot l =$

$= L + \sin\left(\frac{v \cdot 4L}{4l \cdot v}\right) \cdot l = L + \sin\left(\frac{L}{e}\right) \cdot l$

$y_1 = l \cdot \cos\left(\frac{v \cdot 4L}{4l \cdot v}\right) = l \cdot \cos\left(\frac{L}{l}\right)$

1200 - 3

1 200

~~$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 9 \\ \hline 468 \end{array}$~~ ~~$\begin{array}{r} 468 \\ -\ 59 \\ \hline 409 \end{array}$~~

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 9 \\ \hline 378 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 378 \\ -\ 59 \\ \hline 319 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 319 & 11 \\ \cline{2-2} -22 & 29 \\ \cline{1-1} 99 & \end{array}$$

$2\pi R \cdot \alpha$

$6370 \cdot 2 = 12740$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{12} = \frac{4}{12}\pi =$

$118 : 2 = 59$ $\quad 319 : 11$ $\quad 12740 : 5 = 2548$

$\frac{6\pi + 2\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$

$42 \cdot 9 = 378$ $\quad 378 - 59 = 319$

$P_0(n-1) \cdot V_0(n-1) = \frac{P_0 V_0 (n-1)^2}{2}$

$101 - 18 = 83$ $\quad 101 - 17 = 84$

$Q_н = A + \Delta U$

$1 - \frac{\cancel{P_0}\cancel{V_0}(n-1)^2}{2 \cdot 2 \cancel{P_0}\cancel{V_0}(n^2-1)} = 1 - \frac{(n-1)^{\cancel{2}}}{4(\cancel{n-1})(n+1)} =$

$= 1 - \frac{n-1}{4(n+1)} = 1 - \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{12-1}{12} = \frac{11}{12}$

$\frac{1}{12}$

$101 - 11$ $\quad 100 - 18 = 72$

$2020 + 458 = 2478$ $\quad 2478 \cdot 4 = 9912$ $\quad 9912$

$72 + 18 = 90$

$101 \cdot 101 = 10201$ $\quad 10201 - 9912 = 289$

$101 - 17 = 84$ $\quad 84 + 17 = 101$ $\quad 82$ $\quad 82 + 18 = 100$

$17 \cdot 17 = 289$

$$\sqrt{1+0{,}25} = \sqrt{4\cdot 0{,}25 + 0{,}25} =$$

$$= \overset{0{,}5}{\cancel{0{,}25}}\sqrt{5}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{0{,}5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$