



0 046270 550005

04-62-70-55

(72.1)



~~Выход 14⁵⁰ - 14⁵⁵~~
Мамин

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход 14⁵¹ - 14⁵⁵

Вариант 202

Мамин

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов

по механике и математическому моделированию

Исакова Ирина Ильича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

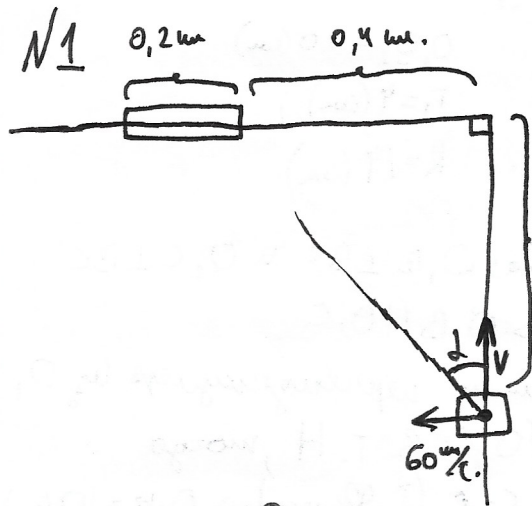
Дата

«19» февраля 2020 года

Подпись участника

Исакова

04-62-70-55
(72.1)

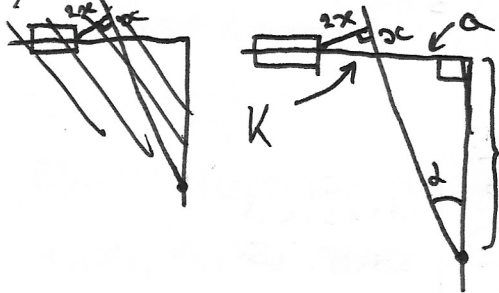


А) Строим график системы,
относительно машины:
когда поворачивает, то её
0,6 км. скорость имеет 2 компонента
мгновенно - её скорость и
скорость поезда (60 км/ч),
направленные перпендикулярно
линии скорости машины.

$\Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{60}{v}$, значит наша машина должна либо
обогнать поезд, либо опоздать:

$$\begin{cases} 0,6 \cdot \frac{60}{v} > 0,6 \\ 0,6 \cdot \frac{60}{v} < 0,4 \end{cases} \begin{cases} v > 90 \\ v < 60 \end{cases} \Rightarrow v \in [0; 60) \cup (90; +\infty) \text{ км/ч.}$$

Б) Найдем миним. S от поезда до машины, при $v = 120$ км/ч.



$$\Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

0,6 K - расстояние от машины до
поезда в момент пересечения
пути.

$$0,6 \cdot \frac{1}{2} = 0,3 \Rightarrow K = 0,4 - 0,3 = 0,1 \text{ (км)}$$

$$\Rightarrow 0,1 \text{ (км)} = 100 \text{ (м)}$$

$$(2x)^2 + x^2 = 10000 \Rightarrow x^2 = 2000$$

$$\sqrt{44,5^2} < \sqrt{2000} < \sqrt{45^2}$$

$$\sqrt{1980,25} < \sqrt{2000} < \sqrt{2025}, \text{ значит}$$

ближайшее целое число $x = 45$ (м)

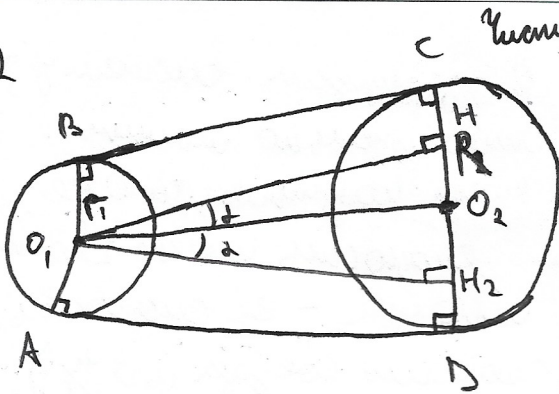
$x = 20\sqrt{5}$
одна 20
11
4055

Ответ: А) $v \in [0; 60) \cup (90; +\infty)$

Б) 45 метров.

+1/2

N2



$O_1O_2 = 20$ (см)

$r_1 = 4$ (см);

$R = 14$ (см)

Решение: $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$
 $\Rightarrow O_1B \parallel O_2C$

1) Опустим перпендикуляр из O_1 на O_2C в т. H, тогда $O_2H = O_2C - r_1$ (т. Паралл.) $\Rightarrow O_2H = 10$ (см)
 $\Rightarrow \alpha = 30^\circ; \alpha = \frac{\pi}{6}$, т.к. $\frac{O_2H}{O_1O_2} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = \sin \alpha$

2) $O_1H = \cos \frac{\pi}{6} \cdot O_1O_2 = 10\sqrt{3}$ (см); $O_1H = BC$ (т.к. O_1HBC - прямоугол.)

3) AD находиме аналогичным образом: $O_2H_2 = R - r_1 = 10$ (см)

$\Rightarrow O_1H_2 = O_1O_2 \cdot \cos \alpha = 10\sqrt{3}$ (см); $O_1H_2 = AD$; т.к. O_1H_2AD - прямоугол.

4) $V_{AB} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8\pi}{3}$ (см³)

5) $V_{CD} = (2\pi - \frac{2\pi}{3}) \cdot R^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{56\pi}{3}$ (см³)

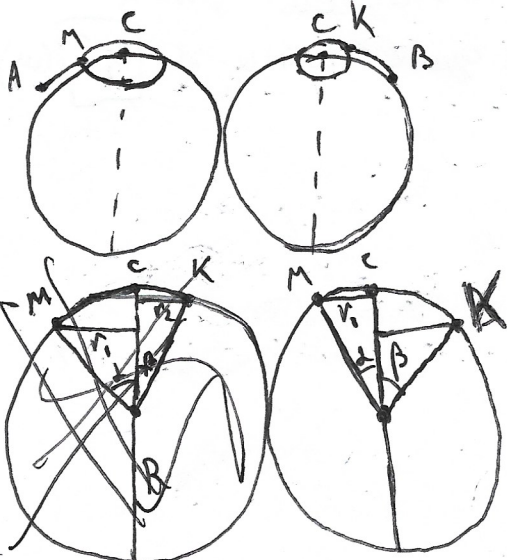
$\Rightarrow L_{осн} = 20\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} + \frac{56\pi}{3} = 20\sqrt{3} + \frac{64\pi}{3}$

6) $20\sqrt{3} + \frac{64\pi}{3} \approx 100$	$5\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3} \approx 25$	$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ $3,14 < \pi < 3,15$
$10\sqrt{3} + \frac{32\pi}{3} \approx 50$	$15\sqrt{3} + 16\pi \approx 75$	

$\Rightarrow 75 < 15 \cdot 1,7 + 16 \cdot 3,14 = 25,5 + 50,24 < 15\sqrt{3} + 16\pi$

\Rightarrow Ответ: шара не хватит. \oplus

N3



$r_1 = 2$ см; $2\pi r_1 = 2$ см; $2\pi r_2 = 3$ см.

$\Rightarrow r_1 = \frac{1}{\pi}$ (см); $r_2 = \frac{3}{2\pi}$ (см)

$AM = 2$ (см); $KB = 3$ (см)

$V_{MC} = R \cdot \arcsin(\frac{r}{R}) = R \cdot \arcsin(\frac{1}{\pi R})$

$V_{CK} = R \cdot \arcsin(\frac{3}{2\pi R})$

1) Максимальное расстояние между медведями будет в шаре, когда они находятся на дуге проекции через полюс.

04-62-70-55
(72.1)

2) ... (предположение ^{Числами} задано $n \geq 3$): L - расстояние между
меридианами - $L = AM + vMC + vCK + KB = 5 + R(\arcsin(\frac{1}{\pi \cdot 6370}) + \arcsin(\frac{3}{2 \cdot \pi \cdot 6370}))$

3) Точное значение: $L = 5 + 6370 \cdot (\arcsin(\frac{1}{\pi \cdot 6370}) + \arcsin(\frac{3}{\pi \cdot 12740}))$ (км)

4) Предположение: $\frac{1}{2}$ (т.к. при $d \rightarrow 0: \sin d = d$):

$$L = 5 + R \cdot (\frac{5}{2\pi R}) = 5 + \frac{5}{2\pi}; \quad \pi = 3,14 \Rightarrow 2\pi = 6,28$$

$$L = 5 + \frac{5}{6,28} = 5 + 0,8 = 5,8 \text{ (км)}$$

Ответ: 5,8 (км) - приближённое значение.



N 5

из условия $\Rightarrow n \in \mathbb{N}, n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 2019, 2020\}$, также

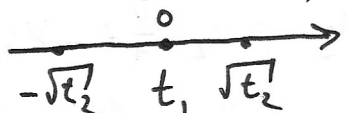
из условия следует $2020 - x^4 = 73n - 2n^2 + 3910 - (n+89)x^2$

$$x^4 - (n+89)x^2 + 73n - 2n^2 + 1890 = 0; \quad \text{Пусть } t = x^2$$

$$t^2 - (n+89)t + 73n - 2n^2 + 1890 = 0; \quad \text{каждому } n, \text{ при некотором}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 - корни уравнения (можно из 3-х значений)

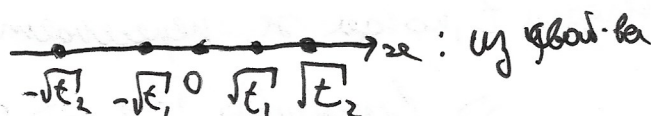
$$\Rightarrow t \geq 0: \quad 1) t_1 = 0; t_2 > 0$$



Всегда отриц. уравнение.

$$2) t_1 = 0; t_2 > 0$$

$$3) t_1 > 0; t_2 > 0$$



реш. уравнения $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2}$

$$\Rightarrow t_2 = 9t_1, \text{ или } t_1 = 9t_2 \text{ (если } t_2 < t_1)$$

$$4) D = n^2 + 178n + 7921 - 4(73n - 2n^2 + 1890) = 9n^2 + (178n - 73n \cdot 4 - 4 \cdot 1890) = 9n^2 - 114n + 361 = (3n - 19)^2 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{n+89 \pm (3n-19)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 54 - n \\ t_2 = 2n + 35 \end{cases}$$

I) $54 - n \geq 0, t_2 = 0 \geq 54 - n \Rightarrow n = 54; t_2 = 54 \cdot 2 + 35 > 0 \Rightarrow n = 54 \text{ год.}$

II) $t_2 = 2n + 35 \Rightarrow n < 0$ - не подходит.

III) $9(54 - n) = 2n + 35 \Rightarrow 451 = 11n \Rightarrow n = 41; t_1 > 0; t_2 > 0 \Rightarrow \text{подходит.}$

Условие.

(Продолжение N5): IV) $54 - n = 9(2n + 35)$

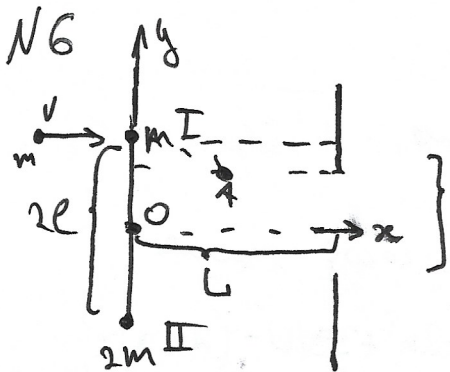
$\Rightarrow 54 - n = 18n + 315 \Rightarrow 19n = 54 - 315 < 0$

невоз.



Значит $\begin{cases} n=54 \\ n=41 \end{cases}$

Ответ: $n=54$ или $n=41$.



Момент импульса:

$mvl = 2m\omega l \Rightarrow \omega = \frac{v}{2}$

линейная скорость масс:

$mV = 4m\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{V}{4}$.

1) $\omega = \frac{V}{R}$; $\Rightarrow \omega = \frac{V}{4l}$

I. в системе xOy $\begin{cases} x_1 = \frac{V}{4}t + l \sin(\omega t) \\ y_1 = l \cos(\omega t) \end{cases}$

рис

II в сист. xOy $\begin{cases} x_2 = \frac{V}{4}t - l \sin(\omega t) \\ y_2 = -l \cos(\omega t) \end{cases}$

Найдем t , когда x_1 пересекает т.А. $(x_A; \frac{\sqrt{3}}{2}l)$

$\Rightarrow l \cos(\omega t) = \frac{\sqrt{3}}{2}l \Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \omega t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6\omega}$

$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{4l}{V}$; $\Rightarrow x_{1(обт.А)} = x_{1(обт.А)} = \frac{V \cdot \pi \cdot 4l}{4 \cdot 6 \cdot V} + l \sin(\frac{\pi}{6}) =$

$= l(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}) \Rightarrow$ Если $L < l(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2})$, то

«шарик» попадает в «шляпку» и не упадет обратно.



Решим.

$$t_1 = 54 - n$$

$$t_2 = 2n + 35$$

1) Если $t_2 = 0$, то $n \notin \mathbb{N}$

2) Если $t_1 = 0$, то $n = 54$

3) $9(54 - n) = 2n + 35$

$$486 - 9n = 2n + 35$$

$$451 = 11n \Rightarrow n = 41$$

4) $54 - n = 9(2n + 35)$

$$54 - n = 18n + 315$$

$$= 19n \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$$

Ⓐ $n = 54$

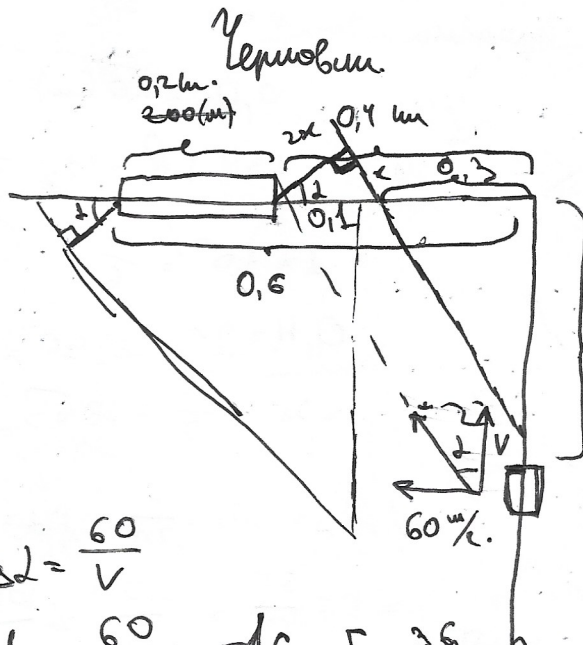
Ⓑ $n = 41$

$$\begin{array}{r} 540 \\ 54 \\ \hline 486 \\ 35 \\ \hline 451 \\ 41 \\ \hline 11 \\ 41 \\ \hline 4 \\ \hline 181 \\ 315 \\ 54 \\ \hline 239 \\ 11 \\ \hline 128 \\ 69 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 350 \\ 35 \\ \hline 315 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26119 \\ 19 \\ \hline 21 \\ 11 \\ \hline 119 \\ 69 \end{array}$$





$\frac{1}{2} = \frac{AR}{BC}$
 $2AR = BC$
 $x^2 + (2x)^2 = 0,1^2$
 $5x^2 = 0,01$
 $x^2 + 4x^2 = 100^2$
 $5x^2 = 10.000$
 $0,6 \text{ (мм)} \quad x^2 = 2000$
 $\tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\tan \alpha}$
 $\tan \alpha \cdot b = a$
 60
 $0,6$
 $\frac{60}{V} > 1 \Rightarrow 6 \cdot 10 \cdot \frac{6}{10} = 36$
 $V < 60$
 $\frac{36}{V} < 0,4 \Rightarrow 36 < V \cdot 0,4$
 $36 < V \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{36 \cdot 5}{2} < V$
 $90 < V$

Ⓐ $\tan \alpha = \frac{60}{V}$

$\left\{ \begin{array}{l} 0,6 \cdot \frac{60}{V} > 0,6 \\ 0,6 \cdot \frac{60}{V} < 0,4 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{36}{V} > 0,6 \quad \frac{36}{V} < 0,4$

$\Rightarrow V \in [0; 60) \cup (90; +\infty)$

Ⓑ мин. расстояние, мин $V = 120$
 $0,6 \cdot \frac{1}{2} = 0,3$ (высота $2x$)
 $5x^2 = 0,01$

\Rightarrow Ответ: $V \in [0; 60) \cup (90; +\infty)$

60
 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$
 120
 $x^2 = \frac{0,01}{5} = \frac{1}{500}$
 $x^2 = 0,002$ (мм)
 $x = 2$ (мм)
 $1,5 < \sqrt{2} < 1,5$
 $\frac{15}{30}$
 $\frac{15}{15}$
 $\frac{15}{75}$
 $\frac{15}{225}$
 $44,5$
 $44,5$
 $222,5$
 1780
 1980
 $44,5$
 $44,5$
 $222,5$
 1780
 1780
 $1980,25$

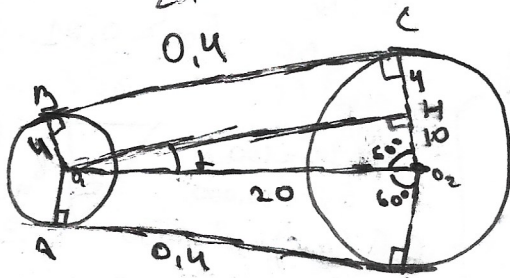
$5x^2 = 100^2$
 $x^2 = 2000$

1024
 $2048 = 2^4 =$

$DC = \sqrt{2000}$ (шнурок)
 $44,5^2 < 2000 < 45^2$
 $1980,25 < 2000 < 2025$
 $\Rightarrow x = 45$ (шнурок)



№2



Терновик

5074

$\frac{314}{105}$

$\frac{16}{48}$

$O_1, O_2 = 20 \text{ (cm)}$

$\frac{14}{56}$
50,24
29,5

$r=4, R=14.$

$\frac{15}{17}$

$\frac{105}{15}$

$\frac{1255}{48}$

$\frac{736}{736}$

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$O_1H = 20 \cdot \cos 30^\circ =$

$= 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ (cm)}$

$2\pi r = 360 - 180 - 30 =$

$= 180 - 30 = 150^\circ$

$360 - 120 = 240^\circ$

$150 - 120 + 30 = 2 \cdot 60 + 30 =$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$270 - 30 = 240 =$

$= \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$

$110 + 60 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$V_{AB} = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = r\alpha =$

$= r \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3} \text{ (cm)}$

$V_{CD} = \frac{4\pi}{3} \cdot 14 = \frac{56\pi}{3}$

$\frac{12}{12}$

$\frac{179}{179}$

$\frac{17}{289}$

$\frac{18}{18}$

$\frac{18}{18}$

$\frac{18}{18}$

$\frac{18}{18}$

$\frac{18}{18}$

$\frac{18}{18}$

$\Rightarrow L = \frac{56\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} + 10\sqrt{3} \sqrt{100}$

$\frac{56\pi + 10\pi + 30\sqrt{3}}{3} \sqrt{300}$

$\frac{66\pi + 30\sqrt{3}}{3} \sqrt{300}$

$22\pi + 10\sqrt{3} \sqrt{100}$

$17 < \sqrt{3} < 1,8$

$314 < \pi < 3,15$

$22\pi + 10\sqrt{3} < 69,3 + 18 < 100$

Ответ: хлам.

$\frac{30}{89}$

$\frac{89}{70}$

$\frac{8100}{179}$

$\frac{89}{63}$

$\frac{114}{108}$

$\frac{114}{1573}$

$\frac{19}{19}$

$\frac{178}{18}$

$\frac{361}{361}$

$\frac{n + 89 + 3n - 19}{2} = \frac{4n + 70}{2} = 2n + 35$

2

$n + 89 - 3n + 19 =$

$= -2n + 108 = 54 - 2n$

$\frac{10}{10}$

$\frac{66}{3} = 22$

$\frac{314}{22}$

$\frac{628}{628}$

$\frac{628}{628}$

$\frac{315}{22}$

$\frac{630}{630}$

$\frac{630}{630}$

$\frac{117}{10}$

$\frac{117}{17}$

$\frac{315}{22}$

$\frac{630}{630}$

$\frac{630}{630}$

$\frac{350}{35}$

$\frac{315}{84}$

$\frac{261}{261}$

$\frac{540}{54}$

$\frac{486}{486}$

$\frac{486}{35}$

$\frac{314}{16}$

$\frac{1884}{314}$

$\frac{5024}{5024}$

$54 - 2n = 9(2n + 35)$

$18n + 315 = 54 - 2n$

$20n = 261$

$n = \frac{261}{20} = 13,05$

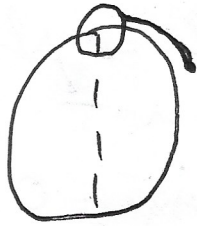
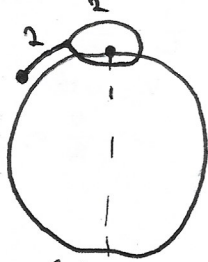
$9(54 - 2n) = 2n + 35$

$486 - 18n = 2n + 35 = 20n$

N3 $r = \frac{1}{\pi}$
 $2\pi r = 2$

Терновик. $r_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{6,18}{5,024}$
 $2\pi r_1 = 3$

$2\pi r = \frac{4}{2\pi} = r_1$



$$\begin{array}{r} 3910 \\ 2020 \\ \hline 1890 \end{array}$$

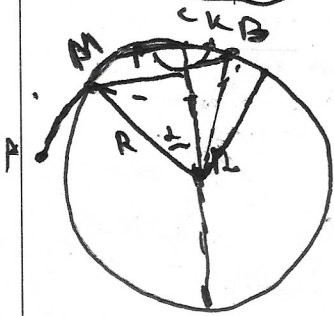
$$\begin{array}{r} 6370 \\ 2 \\ \hline 12740 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6,18 \\ 8 \\ \hline 4944 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ 89 \\ \hline 801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 114 \\ 57 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6,18 \\ 7 \\ \hline 4326 \end{array}$$



$\sin \alpha = \frac{r}{R}$
 $UMC = R \cdot \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) = R \arcsin\left(\frac{1}{\pi R}\right)$
 $UCK = R \cdot \arcsin\left(\frac{r_1}{R}\right) = R \arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right)$

$$\begin{array}{r} 89 \\ 9 \\ \hline 801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 72 \\ \hline 801 \end{array}$$

\Rightarrow Рассмотрим $AB = AM + UMC + UCK + KB$

$$\begin{array}{r} 57 \\ 57 \\ \hline 3149 \end{array}$$

$AB = 2 + R \left(\arcsin\left(\frac{1}{\pi R}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) \right) + 3$
 $= 5 + R \dots$

$$\begin{array}{r} 89 \\ 89 \\ \hline 801 \\ 772 \\ \hline 7921 \end{array}$$

То же значение: $5 + 6370 \left(\arcsin\left(\frac{1}{\pi \cdot 6370}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{\pi \cdot 12740}\right) \right)$

$$\begin{array}{r} 1890 \\ 4 \\ \hline 7560 \end{array}$$

Проблем. : $5 + 6370 \left(\frac{1}{\pi \cdot 6370} + \frac{3}{\pi \cdot 2 \cdot 6370} \right) < 5 + R \left(\frac{5}{2\pi R} \right) =$

$$\begin{array}{r} 11+89-3n+19 \\ 2 = -2n+108 \\ \hline 2 \end{array}$$

$= 5 + \frac{5}{2\pi} = 5 + \frac{5}{6,18} =$
 $= 5 + 0,8 = 5,8 \text{ (mm)}$

$$\begin{array}{r} 5,000 \\ 4944 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 4 \\ \hline 292 \\ 180 \\ 2 \\ \hline 178 \\ 7921 \\ 7560 \\ \hline 361 \end{array}$$

N5

$2020 - x^2 = 73n - 2n^2 + 3910 - (n+89)x^2$

$x^2 - (n+89)x^2 + 73n - 2n^2 + 1890 = 0$; $x^2 = t$

$t^2 - (n+89)t + 73n - 2n^2 + 1890 = 0$

$t \geq 0$: 1) $t_1, t_2 > 0 \Rightarrow$ 2) При $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ берем мин. значение.

$D = n^2 + 178n + 7921 - 4(73n - 2n^2 + 1890) = \dots - 292n + 8n^2 - 7560$
 $= 9n^2 - 114n + 360 = (3n - 19)^2 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{n+89 \pm (3n-19)}{2} = \begin{cases} t_2 = 54 - 2n \\ t_1 = 2n + 35 \end{cases}$
 ~~$t_{min} t_2 = 0$, $n \in \mathbb{N}$; $t_1 = 0$, $n = 27$~~

