Выход 13:28
Вход 13:31

0 791110 540004

79-11-10-54
(71.2)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 201

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"

по механике и математическому моделированию

Смирнова Ильи Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» февраля 2020 года

Подпись участника

95 (девяносто пять)

79-11-10-54 (71.2)

Чистовик

№4

Рассмотрим процесс 1-2: по уравнению Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$. Т.к. $T = \gamma V^2$, то $pV = \nu R \gamma V^2$

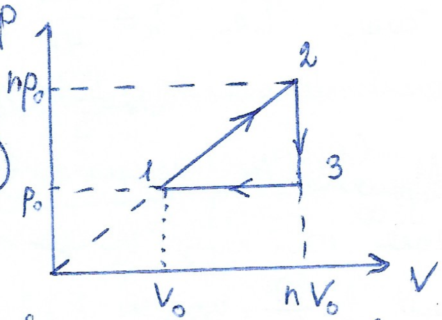
$p = \nu R \gamma V$

Значит в процессе 1-2 объём прямо пропорционален давлению.

Процесс 2-3: т.к. $V = const$, то давление уменьшилось во столько же раз, во сколько и температура, т.е в n раз ($pV = \nu RT$)

Процесс 3-1: т.к $p = const$, то объём уменьшился во столько же раз, во сколько и температура. Т.е. температура уменьшилась в n раз.

Изобразим зависимость $p(V)$ для процесса 1-2-3-1:



Пусть V_0 – объём в состоянии 1.

Тогда nV_0 – объём в состоянии 3 (и 2)

Пусть p_0 – объём в состоянии 3 (и 1)

Тогда np_0 – объём в состоянии 2

При этом в процессе 1-2 объём и давление увеличились в n раз, что соответствует условию прямой пропорциональности

КПД цикла $\eta = \frac{A^*_{цикла}}{Q_н}$. Работа цикла $A_{цикла} = \frac{1}{2}(np_0 - p_0)(nV_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0(n-1)^2$ (площадь треугольника 123)

$Q_н = A_{12} + \Delta U_{12}$, где $Q_н$ – кол-во теплоты, переданное нагревателем, A_{12} – работа, совершённая газом в процессе 1-2, ΔU_{12} – изменение внутренней энергии газа в процессе 1-2. Рассматривается именно процесс 1-2, т.к. в нём $A_{12} > 0$, $\Delta U_{12} > 0 \Rightarrow Q_{12} > 0$, в то время как $\Delta U_{23} < 0 \Rightarrow Q_{23} < 0$; $\Delta U_{31} < 0$, $A_{31} < 0 \Rightarrow Q_{31} < 0$

$Q_н = \frac{(p_0 + np_0)}{2}(nV_0 - V_0) + \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$

↑площадь трапеции Т.к. $n^2 p_0 V_0 = \nu R T_2$, а $p_0 V_0 = \nu R T_1$, то $n^2 T_1 = T_2$

Черновик

$$Q_н = \frac{p_0V_0}{2}(n^2-1) + \frac{3}{2}p_0V_0(n^2-1) = 2p_0V_0(n^2-1)$$

$$\eta = \frac{\cancel{p_0V_0}(n-1)^2}{2\cdot 2\cdot \cancel{p_0V_0}(n^2-1)} = \frac{(n-1)^2}{4(n^2-1)} = \frac{(3-1)^2}{4(3^2-1)} = \frac{4}{4\cdot 8} = \frac{1}{8}.$$

$\eta = 12,5\%$

Ответ: $\eta = 12,5\%$

№1.

а) Автомобиль не столкнётся с поездом, если последний вагон поезда проедет переезд. В указанный в ~~зада~~ задаче момент времени последнему вагону оставалось проехать путь $S = 300 + 600 = 900$ м.

Скорость поезда $v_п = 72$ км/ч $= 20$ м/с

Тогда поезд полностью проедет переезд через время $t = \frac{S}{v} = \frac{900}{20} = 45$ с.

Скорость автомобиля должна быть меньше величины $\frac{S_a}{t}$ (или равна ей), где $S_a = 700$ м. Т.е. $v_a \le \frac{700}{45}$

$v_a \le \frac{140}{9}$ м/с, округлив до целого в меньшую сторону $v_a \le 15$ м/с

Автомобиль также не столкнётся с поездом, если проедет раньше, чем поезд доедет до переезда. Это произойдёт через время $t = \frac{600}{20} = 30$ с.

Скорость автомобиля должна быть больше или равна величины $\frac{S_a}{t}$, т.е. $v_a \ge \frac{700}{30}$, округлив до целого в большую сторону $v_a \ge 24$ м/с

$v_a \ge \frac{70}{3}$ м/с

Ответ: скорость автомобиля v должна быть $v \le 15$ м/с ~~$v \le \frac{140}{9}$ м/с~~ или ~~$v \ge \frac{70}{3}$ м/с~~. $v \ge 24$ м/с

б) По мере приближения поезда и автомобиля к переезду расстояние между ними будет сокращаться. Через 45 с, когда последний вагон поезда проедет переезд, расстояние между автомобилем и поездом будет $S_0 = 700 - 45v_A$, где $v_A = 36$ км/ч $= 10$ м/с, т.е. $S_0 = 700 - 45\cdot 10 = 250$ м.

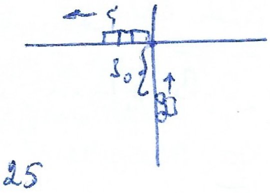
После переезда автомобилем переезда расстояние между

Чистовик

автомобилем и поездом будет увеличиваться (автомобиль проедет переезд через $\frac{250}{10}=25$ с.

Рассмотрим зависимость расстояния (от времени) между поездом и автомобилем, когда поезд полностью проедет переезд, а автомобиль ещё нет.

Оно рассчитывается по формуле



$S(t)=\sqrt{(250-10t)^2+(20t)^2}$ (теорема Пифагора).

S_0; ск-ть автомобиля; ск-ть поезда, причём $0 \le t \le 25$

$$S'(t)=\frac{2(250-10t)(-10)+800t}{2\sqrt{(250-10t)^2+(20t)^2}}=\frac{-5000+200t+800t}{2\sqrt{(250-10t)^2+(20t)^2}}=\frac{500t-2500}{\sqrt{(250-10t)^2+(20t)^2}}$$

Функция имеет точку экстремума, если $S'(t)=0$, т.е. (знаменатель в нашем случае всегда положителен и не равен 0)

$500t-2500=0$

$500t=2500$

$t=5 \in [0;25]$.

При $t<5$ $S'(t)<0$, $t>5$ $S'(t)>0$ $\Rightarrow$ при $t=5$ расстояние минимально ($t=5$ – точка минимума).

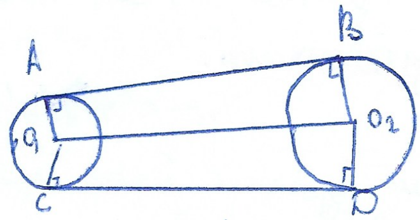
$S(5)=\sqrt{(250-50)^2+(100)^2}=\sqrt{200^2+100^2}=\sqrt{40000+10000}=\sqrt{50000}=100\sqrt{5}$ м.

Т.к. $\sqrt{5}\approx 2{,}235$, то $S(5)\approx 223{,}5$ м ≈ 224 м.

Ответ: 224 м.

+

№2

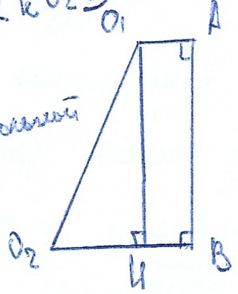


Пусть т. A – точка, в которой ремень первый раз касается окружности с центром в т. O_1, т. B – аналогичная у окружности с ц. в т. O_2, т.е. прямая AB касается окружностей в т. A и B. Аналогично отмечены точки C и D.

Отметим, что $O_1A \perp AB$ (свойство касательной), $O_2B \perp AB$, а значит $O_1A \parallel O_2B$. Тогда O_1ABO_2 – прямоугольная трапеция, у которой $O_1A=2$ см, $O_2B=10$ см, $O_1O_2=16$ см.

Проведём высоту O_1H на основание O_2B.

Чистовик



O_1ABH - прямоугольник ($O_1A \parallel HB$, $AB \parallel O_1H$ (оба $\perp$ к O_2B) и $\angle HBA = 90^\circ$)

$\Downarrow$

$HB = O_1A = 2$ см, $AB = O_1H$, $\triangle O_2HO_1$ - прямоугольный

Рассмотрим $\triangle O_1O_2H$: $\angle H = 90^\circ$, $O_1O_2 = 16$ см,

$O_2H = O_2B - HB = 10 - 2 = 8$ см.

Тогда по теореме Пифагора $O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{256-64} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ см

$AB = 8\sqrt{3}$ см.

$\sin\angle O_1O_2B = \frac{O_1H}{O_1O_2} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle O_1O_2H = 60^\circ$, $\angle O_2O_1A = 120^\circ$

Длина ремня складывается из AB, $CD(=AB)$, длины дуги окружности с ц в т. O_1 величиной $(360^\circ - 120^\circ \cdot 2) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

длины дуги окружности с ц. в т. O_2 величиной $(360^\circ - \cancel{120}\ 60^\circ \cdot 2) = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$

Суммарная длина ремня S равна:

$$S = 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot r + \frac{4\pi}{3} \cdot R = 16\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}(2 + 2 \cdot 10) = 16\sqrt{3} + \frac{44\pi}{3}$$

Для того, чтобы оценить хватит или нет, будем считать $\sqrt{3} \approx 1{,}8$, $\pi \approx 3{,}15$, т.е. возьмём значения чуть больше.

Тогда $16 \cdot 1{,}8 = 28{,}8$; $\frac{44 \cdot \cancel{3{,}15}^{1{,}05}}{\cancel{3}} = 46{,}2$

$S = 28{,}8 + 46{,}2 = 75$ см. Делаем вывод, что резинового шнура длиной 75 см хватит для изготовления ремня. +

Ответ: да, хватит.

№5.

Приравняем уравнения двух прямых:

$$x^4 + 2020 = 2n^2 - 71 - 61n + (n+92)x^2$$

~~Если~~ Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$

$$t^2 - (n+92)t - 2n^2 + 61n + 2091 = 0$$

$D = (n+92)^2 - 4(-2n^2 + 61n + 2091) = n^2 + 184n + 8464 + 8n^2 - 244n - 8364 =$

$= 9n^2 - 60n + 100 = (3n-10)^2 > 0$ при данных n.

$t_1 = \frac{n+92+3n-10}{2} = \frac{4n+82}{2} = 2n+41.$

79-11-10-54
(71.2)

Чистовик

$t_2 = \frac{n+92-3n+10}{2} = \frac{-2n+102}{2} = -n+51.$

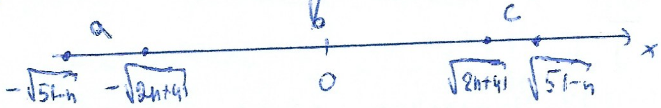
Поскольку $t \geq 0$, то при $n<51$ уравнение имеет 4 корня

при $n=51$ уравнение имеет 3 корня (один из них 0)

при $n>51$ уравнение имеет 2 корня (корень $t_2<0$).

Таким образом, красные частицы содержатся среди частиц с номерами 1, 2, ..., 50, 51.

При ~~n∈I;~~ $n=1$, $n=2$ и $n=3$ абсциссы точек пересечения располагаются так:



причём ни одна из этих частиц не является красной, (при $n=1$ $\sqrt{51-1}-\sqrt{43} \neq 2\sqrt{43}$

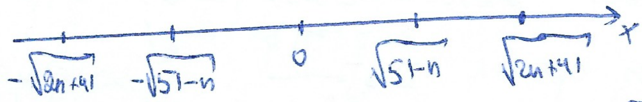
$n=2$ $\sqrt{49}-\sqrt{45} \neq 2\sqrt{45}$

$n=3$ $\sqrt{48}-\sqrt{47} \neq 2\sqrt{47}$)

Ведь частица будет красной если отрезок $a=b=c$, т.е. ~~$\sqrt{51-n} = 2\sqrt{2n+41}$~~

$\sqrt{51-n} - \sqrt{2n+41} = 2\sqrt{2n+41}$

При $n=4, 5, \dots, 49, 50$ абсциссы точек пересечения располагаются так:



Если частица красная, то $\sqrt{2n+41} - \sqrt{51-n} = \sqrt{51-n} - (-\sqrt{51-n})$

$\sqrt{2n+41} = 3\sqrt{51-n}$

Возведём в квадрат: $2n+41 = 9(51-n)$

$2n+41 = 459-9n$

$11n = 418$

$n = 38$

Частица с номером $n=38$ – красная.

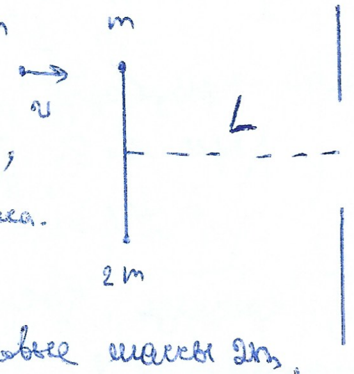
Если $n=51$, то абсциссы точек пересечения следующие: $-\sqrt{143}, 0, \sqrt{143}$ – образуют арифметическую прогрессию значит частица с $n=51$ – красная

Ответ: $n=38$, $n=51$.

[Чистовик] №6

По закону сохранения импульса $m\upsilon = 2mu$

$u = \frac{\upsilon}{2}$, где u - скорость, которую получила масса.

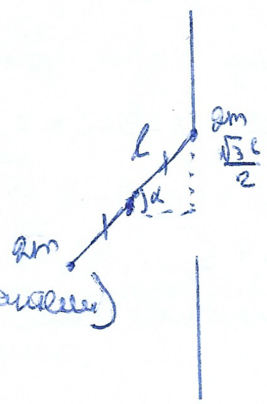


При этом точечные массы гантели стали иметь одинаковые массы 2m, а центр масс стал двигаться со скоростью υ', причём $m\upsilon = 4m\upsilon'$ (по закону сохранения импульса).

$\upsilon' = \frac{\upsilon}{4}$

Рассмотрим момент, когда гантель подлетела к штанге следующим образом:

~~cos α =~~ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.



В таком положении гантель влетает в ворота, не касаясь штанги.

Расстояние от центра масс (середины гантели) до ворот равно $S = l\cos\alpha = \frac{1}{2}l$.

Через время $t = \frac{S}{\upsilon'} = \frac{l\,4}{2\,\upsilon} = \frac{2l}{\upsilon}$ центр масс должен войти в ворота. ~~При этом угол β до центра масс в горизонтально~~ Угловая скорость точечных масс $\boxed{\omega = \frac{\upsilon}{2l}}$ $= \frac{\upsilon}{2l}$. За время t точечные массы ~~изменят~~ ар. ошибка ~~угол на~~ пройдут угол $\varphi = \omega t = \frac{2l}{\upsilon}\cdot\frac{\upsilon}{2l} = 1$ рад.

Т.к. 1 рад $< 60^\circ$, то гантель влетится в ворота, не задев ни одной штанги.

Найдём теперь предельное значение угла $\alpha < 60^\circ$, при котором гантель влетится в ~~штангу~~ ворота, не задев штангу:

При этом (в этом случае) $\alpha = \varphi$.

$S = l\cos\alpha$, $t = \frac{l\cos\alpha\cdot 4}{\upsilon}$, $\omega = \frac{\upsilon}{2l}$, $\varphi = \frac{\upsilon}{2l}\cdot\frac{l\cos\alpha\cdot 4}{\upsilon} = 2\cos\alpha$

Чистовик.

Посмотрим, каким должно быть L.

Первое необходимое положение будет достигнуто через время t_0, когда точечные массы пройдут угол $90° - 60° = 30°$

$$t_0 = \frac{\omega}{\varphi} = \frac{v}{2l \cdot \frac{\pi}{6}} = \frac{3v}{l\pi} = \frac{3 \cdot 10}{1 \cdot 3{,}14} = \frac{3v}{l\pi}.$$

При этом центр масс пройдёт расстояние $S_0 = t_0 \cdot v' = \frac{v}{4} \cdot \frac{3v}{l\pi} = \frac{3v^2}{4l\pi}$

Если $L = S_0$, то гонщик выиграет, не задев ни одной стойки.

Через полный оборот, который занимает время $t_\pi = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{4l\pi}$ центр масс пройдёт расстояние $S_n = t_\pi \cdot v' = \frac{v}{4} \cdot \frac{v}{4l\pi} = \frac{v^2}{16l\pi}$

Следовательно если $L = S_0 + nS_n$, где $n \in Z^+$, то гонщик выиграет так, как требуется в условии

$$L = \frac{3v^2}{4l\pi} + n\frac{v^2}{16l\pi}, \quad n \in Z^+$$ (~~положит~~ неотрицательные целые числа)

Ответ: да, если $L = \frac{3v^2}{4l\pi} + n\frac{v^2}{16l\pi}$, $n \in Z^+$

нет, если L другое.

Н.!

Здесь не рассмотрен ещё один предельный случай, когда точечные массы пройдут угол в 150°

Черновик

$m\upsilon = 2mu$

$u = \frac{\upsilon}{2}$

$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{2m\frac{\upsilon^2}{4}}{2}$

$m\upsilon =$

$2m\frac{u^2}{2l} = T$

$\frac{mu^2}{l} = T$

$2{,}2 \cdot 2{,}2 = 4{,}84$

$2{,}3 \cdot 2{,}3 = 5{,}26$

$2{,}25 \cdot 2{,}25 = 5{,}0625$

$2{,}23 \cdot 2{,}23 = 4{,}9729$

$2{,}235 \cdot 2{,}235 = 4{,}995225$

$\frac{\upsilon}{4} = 2{,}5\,м/с$

$\frac{0{,}5}{2{,}5} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}\,c$

$\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{5}{1} = 5\,рад/с$ $\alpha = 60^\circ$

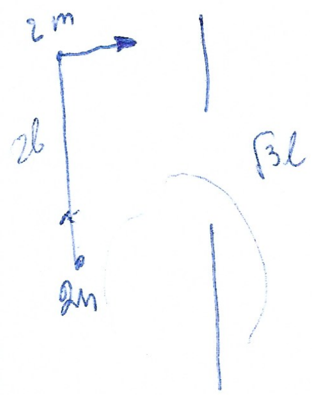
$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{4} + \frac{4mx^2}{2}$ $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1\,рад.$

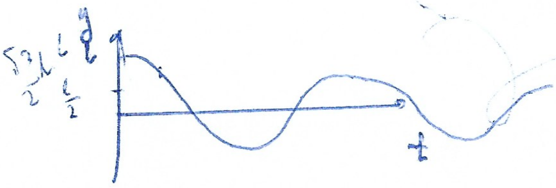
$2m\upsilon^2 = m\upsilon^2 + 8mx^2$

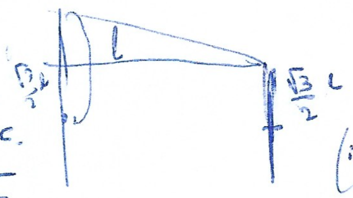
$m\upsilon^2 = 8mx^2$

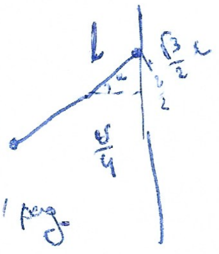
$x = \frac{\upsilon}{4}$

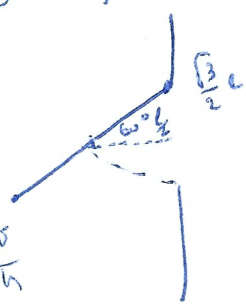
$\frac{\frac{\upsilon}{2} + \frac{\upsilon}{2}}{4} = \frac{\upsilon}{4}$











Черновик

$\pi \approx 3,14$

№44

$\times \begin{array}{r} 3,14 \\ 44 \end{array}$

1256
1256

13816

$16\sqrt{3} + \frac{44\pi}{3}$

$138,16 \mid 3$
$12 \quad 46,05(3)...$
18
18
01
0
76
10
9
1

$\times \begin{array}{r} 16 \\ 1,7 \end{array}$

1,05

$\frac{44 \cdot \cancel{3,15}}{\cancel{3}}$

$\times \begin{array}{r} 1,05 \\ 44 \end{array}$

420
420
46,20

46,2

$\times \begin{array}{r} 46,2 \\ 28,8 \end{array}$

75,0

$\times \begin{array}{r} 16 \\ 1,8 \end{array}$

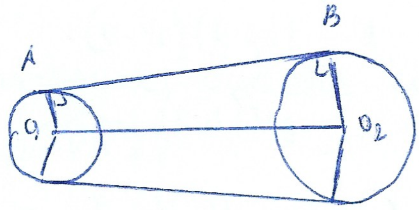
128
16
28,8

$r = 2$ см

$R = 10$ см.

$O_1O_2 = 16$ см.

$L = 75$ см.



$O_1O_2 = 16$ см.

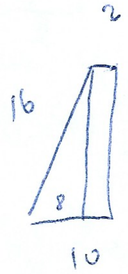
$O_1A = 2$ см

$O_2B = 10$ см.

$16^2 - 8^2 =$

$= 256 - 64 =$

$= 192, \sqrt{192}$



$\pm\sqrt{2n+41}$

$\pm\sqrt{51-n}$

$n=1 \quad \pm\sqrt{43}$
$\pm\sqrt{50}$

$n=2 \quad \pm\sqrt{45}$
$\pm\sqrt{49}$

$n=3 \quad \pm\sqrt{47}$
$\pm\sqrt{48}$

$n=4 \quad \pm\sqrt{49}$
$\pm\sqrt{47}$

$\sqrt{2n+41} - \sqrt{51-n} =$

$\sqrt{2n+41} - \sqrt{51-n} = \sqrt{51-n}$

$\sqrt{2n+41} = 2\sqrt{51-n}$

$2n+41 = 204-4n$

$6n = 204-41$

$6n = 163$

$n = \frac{163}{6}$

$\times \begin{array}{r} 92 \\ 92 \end{array}$

184
828
8464

$y = 2n^2 - 71 - 61n + (n+92)x^2$

$x^4 + 2020 = 2n^2 - 71 - 61n + (n+92)x^2$

пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$

$t^2 - (n+92)t - 2n^2 + 61n + 2091 = 0$

$D = (n+92)^2 - 4(-2n^2 + 61n + 2091) = n^2 + 184n + 92^2 + 8n^2 - 244n - 8364 =$

$= 9n^2 - 60n + 100 = (3n-10)^2$

$t_1 = \frac{n+92+3n-10}{2} = \frac{4n+82}{2} = 2n+41$ всегда

$t_2 = \frac{n+92-3n+10}{2} = \frac{-2n+102}{2} = -n+51$ при $n \leq 51$

$x_1 = \pm\sqrt{2n+41}$

$x_2 = \pm\sqrt{51-n}$

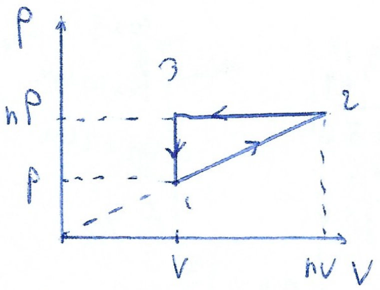
при $n > 51$ имеет два корня

при $n = 51$ три

при $n =$

0

Черновик



$A = \frac{1}{2}(np-p)(nV-V) =$

$= \frac{1}{2}pV(n-1)^2$

$Q = A_{12} + \Delta U_{12} =$

$= \frac{(p+np)}{2}\cdot(nV-V) + \frac{3}{2}\nu R(T_2-T_1) =$ $pV = \nu RT$

$pV = \nu R \gamma V^2$

$= \frac{pV}{2}(n^2-1) + \frac{3}{2}\nu R(n^2T_1 - T_1) =$ $p = \nu R \gamma V$

$n^2 pV = \nu R T_2$

$= \frac{pV}{2}(n^2-1) + \frac{3}{2}pV(n^2-1) =$ $pV = \nu R T_1$

$= 2pV(n^2-1)$ $n^2 \cancel{\nu R} T_1 = \cancel{\nu R} T_2$

$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\frac{1}{2}pV(n-1)^2}{2pV(n^2-1)} = \frac{(n-1)^2}{4(n^2-1)} =$ $T_2 = n^2 T_1$

192 | 2
96 | 2
48 | 2
24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1

8 8 3

$= \frac{4}{4\cdot 8} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$ $\sqrt{192} =$

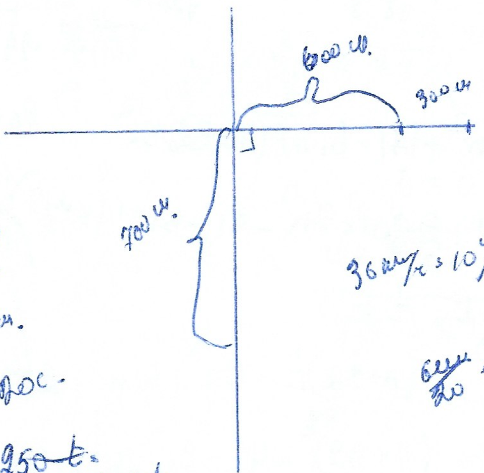
$v = 72$ км/ч $= \frac{72000}{3600} = 20$ м/с

$\frac{2\pi r}{2\pi}$.

$\frac{360^\circ r}{360^\circ}$

Время за км. 1км.

$t = \frac{1000}{80} = 50$ с.



$2\pi - 2\pi r$

$\frac{2\pi}{3} - x$

$x = \frac{2\pi \cdot 2\pi r}{3\cdot 2\pi} =$

$= \frac{2\pi}{3} r$

140
$\frac{700}{45}$
9

$v \le \frac{700}{50}$

$v \le 14$ м/с

36 км/ч = 10 м/с

140 | 9
9 | 15,5...
50
45
50

900 м.

90 с.

$\frac{600}{20} = 30$ с.

10 м/с

~~250 t =~~

$250 - 10t = 30t$

$10 \cdot 30 = 300$

$(250-10t)^2 = -(20t)^2$

$250 = 30t$

$t = \frac{25}{3} =$

$0 \le t \le 25$

250 м.

900 м

$400t^2$

$(250-10t)^2 + (20t)^2 = S^2$

$S(t) = \sqrt{(250-10t)^2 + 400t^2}$

$S'(t) = \frac{}{2\sqrt{(250-10t)^2+400t^2}}$

$r = 2\cos\alpha$

$S'(t) = 800t + 2(250-10t)(-10) = 800t - 20(250-10t) =$

$\frac{x}{2} = \cos\alpha$ $-2 < \alpha < 2$

$= 800t - 5000 + 1000$