0 966720 750000

96-67-20-75
(73.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 203

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов

по механике и математическому моделированию

Тюриной Кристины Евгеньевны

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» февраля 2020 года

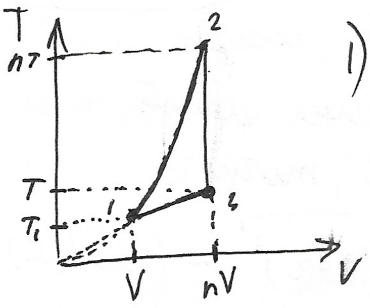
Подпись участника

 70 (смидент)

96-67-20-75 (73.2)

Чистовик

№4

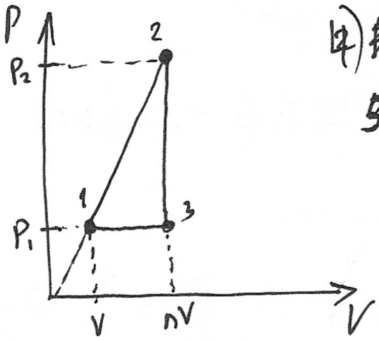


1) процесс 1-2: (P-давление)

$\frac{PV}{T}=\nu R$, $T=\gamma\cdot V^2 \Rightarrow \frac{P}{V}=\gamma \nu R \Rightarrow \frac{P}{V}=const$,

2) Построим график P(V)

3) $\frac{nV}{T}=\frac{V}{T_1} \Rightarrow T_1=\frac{T}{n}$



4) в процессе 1-2: $\frac{P_1}{V}=\frac{P_2}{nV} = P_2=nP_1$

5) $Q_{23}=A_{23}+\Delta U_{23}=\Delta U_{23}=\frac{3}{2}\nu R T(1-n)<0$, где Q_{23} - тепло переданное газу в процессе 2-3; A_{23} - совершённая работа; ΔU_{23} - изменение энергии (здесь и далее обозначения те же, индексы обозначают процесс)

6) $Q_{31}=A_{31}+\Delta U_{31}=P_1V(1-n)+\frac{3}{2}\nu R T\left(\frac{1}{n}-1\right)<0$

7) $Q_{12}=A_{12}+\Delta U_{12}=\frac{1}{2}V(n-1)P_1(n-1)+V(n-1)P_1+$
$+\frac{3}{2}\nu R T\left(n-\frac{1}{n}\right)>0$

8) $\eta=\frac{A_{газа}}{Q}$, где $A_{газа}$ - работа газа за цикл, Q - тепло, подведенное к газу за цикл

$A_{газа}=\frac{1}{2}V(n-1)P_1(n-1)$

$Q=Q_{12}$

9) в состоянии 1: $\frac{P_1Vn}{T}=\nu R \Rightarrow \nu R T=P_1Vn$

10) $$\eta=\frac{\frac{1}{2}P_1V(n-1)^2}{\frac{1}{2}P_1V(n-1)^2+VP_1(n-1)+\frac{3}{2}\nu R T\left(n-\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}P_1V(n-1)^2}{\frac{1}{2}P_1V(n-1)^2+P_1V(n-1)+\frac{3}{2}P_1V(n-1)(n+1)}=$$

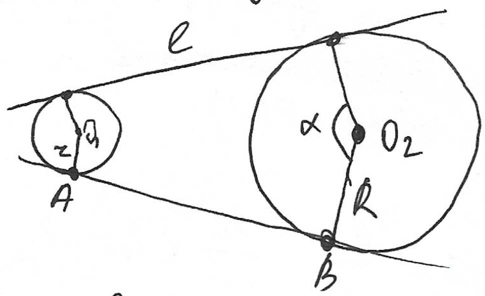
$$=\frac{n-1}{n-1+2+3(n+1)}=\frac{n-1}{4n+4}=\frac{2-1}{4\cdot 2+4}=\frac{1}{12}$$

11) $\eta=\frac{1}{12}\cdot 100\%=8,(3)\%$

Ответ: 8,(3)% (или если не в процентах, то $\frac{1}{12}$) +

№2 Чистовик

Найдем длину линии, охватывающей шкивы.

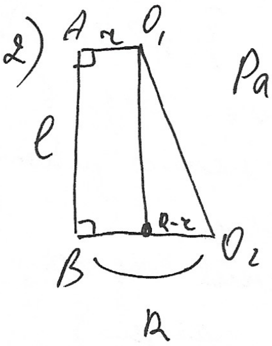


1) Пусть l – длина общей касательной, тогда:

$$l = \sqrt{O_1O_2^2 - (R-r)^2} = 11\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$2l = 2 = 22\sqrt{3} \text{ (см)}$$

2)



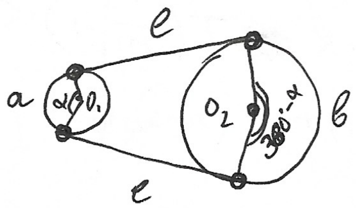
Рассмотрим трапецию AO_1O_2B – прямая

$$\angle BO_2O_1 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R-r}{O_1O_2} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

3)



Пусть a, b – длины дуг окружностей

$$b = R(2\pi - \alpha) = R\cdot\frac{4\pi}{3} = 15\cdot\frac{4\pi}{3} = 20\pi \text{ (см)}$$

$$a = r\cdot\alpha = r\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \text{ (см)}$$

+

4) Итого: $a + b + 2l = \frac{8\pi}{3} + 20\pi + 11\sqrt{3} =$

$$= \frac{68\pi}{3} + 11\sqrt{3} < \frac{68\cdot 3,2}{3} + 11\cdot 1,8 = \frac{217,6}{3} + 19,8 =$$

$$= \frac{277}{3} < 111 = \frac{333}{3} \Rightarrow$$ 111 см должно хватить

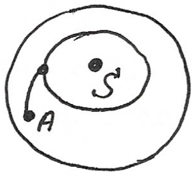
Ответ: да, хватит

Прим.: в этой задаче оказалось удобнее проводить расчеты по ходу решения без потери точности.

№3 (начало) Чистовик

Прим.: „найдите максимально возможное расстояние между точками А и Б", поэтому найдем ~~отрез~~ длину отрезка АБ.

S – северный полюс

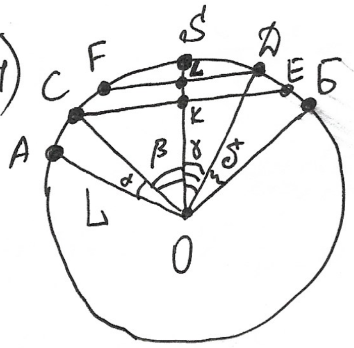


1) Понятно, что первый белый медведь прошёл 5 км на север (т.е. по окр-ти с центром в центре Земли и проходящей через т. А и т. S), потом по окр-ти длиной 5 км и вернулся в т. А. Для второго белого медведя аналогично.

2) Зафиксируем т. А и найдем такую точку Б, чтобы АБ было максимально!

3) Заметим, что расстояние будет максимально, если т. A, S, Б расположены на окр-ти с центром в центре Земли. Расcмотрим ~~это~~ сечение.

4)



т. O – центр Земли; $L = 6370$ км – радиус Земли

Прим.: первый медведь дошёл до т. C и повернул на восток; второй медведь дошёл до т. D и повернул на запад, т.е $\overset{\frown}{AC} = 5$, $\overset{\frown}{БD} = 2$

$FD \perp SO$, $CE \perp SO \Rightarrow CK = KE = R$, $FL = LD = r$, где R, r – радиусы окр-тей, по которым шли медведи: $2\pi R = 5$, $2\pi r = 2 \Rightarrow R = \frac{5}{2\pi}$, $r = \frac{2}{2\pi}$

5) $\alpha = \frac{\overset{\frown}{AC}}{L} = \frac{5}{L}$; $\delta = \frac{\overset{\frown}{БD}}{L} = \frac{2}{L}$; $\sin\beta = \frac{CK}{CO} = \frac{5}{2\pi L}$;

$\sin\gamma = \frac{DL}{DO} = \frac{1}{\pi L}$

6) $АБ = \sqrt{2L^2 - 2L^2\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} =$

Продолжение →

I

$\boxed{N3}$ продолжение

Чистовик

$$AB = L\sqrt{2-2\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} =$$
$$= L\sqrt{2-2\cos\left(\frac{7}{L}+\arcsin\left(\frac{5}{2\pi L}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{\pi L}\right)\right)}$$

нет приближ. значения

$\boxed{N5}$

$$x^4+2020 = 2n^2-458-25n+(n+101)x^2$$
$$x^4-\underbrace{(n+101)}_{>0}x^2-2n^2+25n+2478=0$$

Пусть $t=x^2$

$t^2-(n+101)t-2n^2+25n+2478=0$, t_1, t_2 - корни

$t_1+t_2=n+101>0 \Rightarrow$ один из корней точно положителен.

т.е. условие на существование ~~четырех~~ трёх корней:

$$\begin{cases} D=(n+101)^2-4(-2n^2+25n+2478)>0 \\ -2n^2+25n+2478>0 \end{cases}$$

т.к. существует 3 корня $\Rightarrow$ существует четвертый. все функции - нечетные $\Rightarrow$ графики симметричны относ. оси OY $\Rightarrow$ все 4 корня - члены арифм. прогрессии

96-67-20-75 (73.2)

$\boxed{N1}$ (начало) $\boxed{\text{Чистовик}}$

А) Автомобиль не сталкивается с товарным поездом, если: 1) успевает проехать перед ним, т.е.: когда головной вагон поезда находился у шоссе, автомобиль уже проехал через железную дорогу
2) приезжает после него, т.е: когда последний вагон поезда находился у шоссе, автомобиль ещё не пересёк ~~дорогу~~ переезд

Рассмотрим эти 2 случая:
Пусть $\ell = 0{,}15$ км — длина поезда; $L = 0{,}75$ км; $S = 0{,}5$ км — расстояние от поезда и автомобиля до переезда соответственно в начальный момент времени; $u = 90\ \frac{км}{ч}$ — скорость поезда

1) $\begin{cases} V\Delta t > S \\ u\Delta t = L \end{cases}$ (Δt — время, когда поезд оказался на переезде)
при равенстве — столкновение

$\begin{cases} \Delta t = \frac{L}{u} \\ V > \frac{S}{\Delta t} = \frac{Su}{L} = \frac{0{,}5 \cdot 90}{0{,}75} = 60\ \frac{км}{ч} \end{cases}$

2) $\begin{cases} V\Delta t < S \\ u\Delta t = L + \ell \end{cases}$ $\quad \Delta t = \frac{L+\ell}{u}$
при равенстве — столкновение

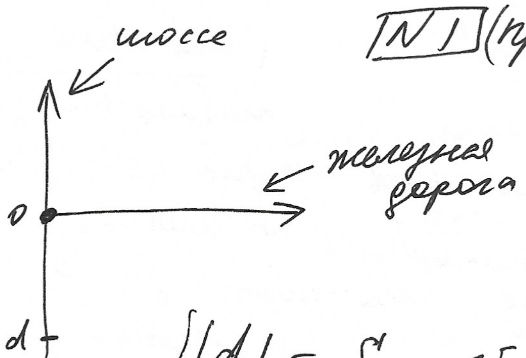
$V < \frac{S}{\Delta t} = \frac{Su}{L+\ell} = \frac{0{,}5 \cdot 90}{0{,}9} = 50\ \frac{км}{ч}$

Ответ: $V > 60\ \frac{км}{ч}$; $V < 50\ \frac{км}{ч}$ +

Б) $V_1 = 45\ \frac{км}{ч} < 50\ \frac{км}{ч} \Rightarrow$ автомобиль проедет через переезд после поезда. Пока автомобиль и поезд едут к переезду расстояние между ними монотонно уменьшается, ближайшая точка поезда к автомобилю — передний вагон. Пока поезд едет через переезд расстояние также уменьшается, ближайшая точка поезда к автомобилю — непостоянна, расположена в точке переезда. Теперь поезд удаляется от переезда, ближайшая точка поезда к автомобилю — последний вагон

продолжение →

$\boxed{N1}$ (продолжение) Чистовик



Итак, последний вагон поезда находится в т. $(0;0)$, автомобиль — в т. $(d;0)$

$$\begin{cases} |d| = S' - v_1 \Delta t_1 \\ u \Delta t_1 = L + \ell \end{cases}$$, где Δt_1 — время, за которое последний вагон поезда доедет до переезда

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \frac{L+\ell}{u} \\ |d| = S' - \frac{v_1(L+\ell)}{u} \end{cases}$$

Пусть a — расстояние между автомобилем и последним вагоном поезда. Найдем зависимость $a(t)$:

$$a(t) = \sqrt{(|d| - v_1 t)^2 + (ut)^2} =$$

$$= \sqrt{(v_1^2 + u^2)t^2 - 2|d|v_1 t + d^2}$$

Под корнем находится функция, ~~что~~ убывающая до $\frac{|d|v_1}{v_1^2+u^2}$ и возрастающая после этого значения.

Т.к. функция корня возрастающая (и под корнем всегда положительное число), то это св-во сохраняется $\Rightarrow$ наименьшее значение $a(t)$ принимается при $t = \frac{|d|v_1}{v_1^2+u^2}$

$$a\left(\frac{|d|v_1}{v_1^2+u^2}\right) = \sqrt{d^2\left(1 - \frac{v_1^2}{v_1^2+u^2}\right)^2 + \frac{d^2 v_1^2 u^2}{(v_1^2+u^2)^2}} =$$

$$= \frac{du}{v_1^2+u^2}\sqrt{1+v_1^2} = \frac{S'u - v_1(L+\ell)}{v_1^2+u^2}\sqrt{1+v_1^2} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 90 - 45 \cdot 0{,}9}{45^2 + 90^2}\sqrt{1+45^2} = \frac{\sqrt{1+45^2}}{45 \cdot 50} \text{ км}$$

Продолжение $\longrightarrow$

~~переведём~~ $\boxed{N1}$ (окончание) Чистовик

Переведём в метры:

$$\frac{\sqrt{1+45^2}\cdot 1000}{45\cdot 50} = \boxed{\frac{\sqrt{1+45^2}\cdot 4}{9} \overset{>}{\vee} 20}$$

$$\sqrt{1+45^2} \vee 45 \Rightarrow 1+45^2 > 45^2$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{1+45^2}\cdot 4}{9} \overset{<}{\vee} 20,4}$$

$$\sqrt{1+45^2} \vee 9\cdot 5,1 = 45,9$$

$$1+45^2 \vee (45+0,9)^2 = 45^2+0,9^2+90\cdot 0,9$$

$$1+45^2 < 45^2+81+0,81$$

Получаем, что искомое $a > 20$м, $a < 20,4$м $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~а~~ ближайшее целое — 20м

Ответ: 20м.

Черновик

~~$(n+101)x^2 + 2n^2$~~

$x^4 - (n+101)x^2 + \underbrace{2020 - 2n^2 + 458 + 25n}_{c} = 0$

$D > 0$

$c > 0$

$x_1^2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$(n+101)^2 - 8080 + 8n^2 - 3664 - 200n =$

$= 9n^2 + 2n - 1543$

$458 \times 8 = 3664$

202

101×101: 101, 101, 1111

$8080 + 3664 = 11744$

-10201

101×101: 101, 101, 10201

1543

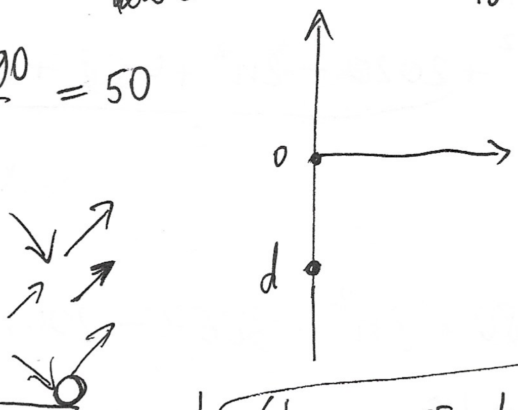
$900 \big| \frac{15}{6}$ Черновик

$v \geq \frac{\cancel{800} \cdot \cancel{1800}\,900}{\cancel{750}\,15} = \cancel{1000}\,60$

$v \leq \frac{500 \cdot \cancel{1000}\,90}{900} = 50$

через $\Delta t = \frac{L+e}{u}$

$|d| = v_1 \frac{L+e}{u}$



$\frac{su - v_1(L+e)}{v_1^2 + u^2}\sqrt{1+v_1^2} = \sqrt{(|d| - v_1 \Delta t_1)^2 + (u \Delta t_1)^2} =$

$= \frac{\cancel{45 \cdot 90} - 45 \cdot 0{,}9}{45^2 + 90^2}\sqrt{1+45^2} = \sqrt{\left(\frac{45 \cdot 900}{90} - 45 \cdot \Delta t_1\right)^2 + 90 \Delta t_1^2} =$

$45 - 45 \cdot 0{,}9$

$= \frac{45 \sqrt{1+45^2} \cdot 0{,}1}{45^2 \cdot 5} = \frac{\cancel{0{,}1}\sqrt{1+45^2}}{45 \cdot 50} =$ $\cancel{1+2}$

$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ +180\ \ \\ \hline 2025 \end{array}$

$= \frac{\sqrt{2026}}{2250} \vee \cancel{45}$

$\begin{array}{r} 45 \\ \times 50 \\ \hline 2250 \end{array}$

$\frac{\sqrt{\cancel{2026}}}{\cancel{2250}}$ $\frac{\sqrt{1+45^2}}{45 \cdot 5\cancel{0}} \vee \frac{41}{200\cancel{0}}$ $\frac{1}{50} = \cancel{(50-5)^2} =$

$= 0{,}0205 = \cancel{2000}$

$\frac{205}{10000} = \frac{41}{2000}$

$\frac{\sqrt{1+45^2}}{\cancel{45}\,9} \vee \frac{41}{\cancel{40}\,8}$

$\begin{array}{r} 45{,}9 \\ \times 45{,}9 \\ \hline 4131 \end{array}$

48

36

$\frac{1+45^2}{81} \vee \frac{168\cancel{4}}{\cancel{3}64}$

$2026 \cdot 64 \vee 81 \cdot 1681$

$\cancel{20}$

$\begin{array}{r} 41 \\ \times 41 \\ \hline 41 \\ +164\ \ \\ \hline 168\cancel{4} \end{array}$

48+6

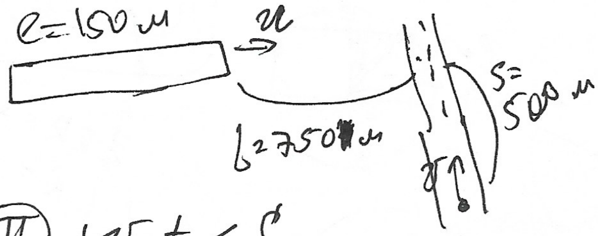
$(45+0{,}9)^2 =$

$= 45^2 + \underbrace{0{,}9^2}_{0{,}81} + \frac{90 \cdot 0{,}9}{81}$

$\begin{array}{r} 2026 \\ \times 64 \\ \hline 8104 \\ +12156\ \ \\ \hline 129664 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1681 \\ \times 81 \\ \hline 1681 \\ +13448\ \ \\ \hline 1 \end{array}$

Черновик



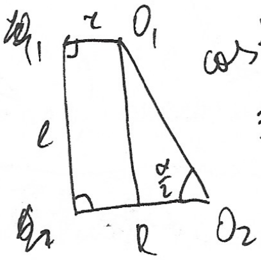
I $\begin{cases} v_{\Delta} t \geq S \\ u \Delta t = L \end{cases}$

$\Delta t = \frac{L}{u}$

$\boxed{v \geq \frac{S}{\Delta t} = \frac{Su}{L}}$

II $\begin{cases} v_{\Delta} t < S \\ u_{\Delta} t = L + \ell \end{cases}$

$\begin{cases} \Delta t = \frac{L+\ell}{u} \\ \boxed{v < \frac{S}{\Delta t} = \frac{Su}{L+\ell}} \end{cases}$

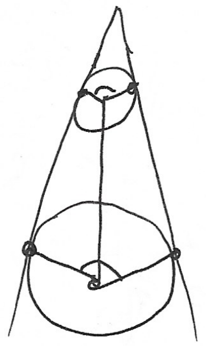


$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow 120^\circ = \alpha = \frac{2\pi}{3}$

$2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$



$\angle = \alpha$

$2\pi R - 2\pi$

$\ell - \frac{2\pi}{\cancel{180}} - \alpha$

$\frac{2\pi R(180-\alpha)}{2\pi} = R\left(\cancel{180}\,2\pi - \alpha\right)$

$15 \cdot \frac{4\pi}{3} = 20\pi$

$4 \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}$

$\cancel{15 \cdot \frac{\pi}{3} = 25\pi}$

$< \frac{68{,}3{,}2}{3} + 11 \cdot 1{,}8 =$

$= \frac{276{,}4}{3} < 111 = \frac{333}{3}$

$\cos(\beta + \gamma) =$

$= \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma =$

$=$

$\frac{\cancel{80} \cdot 900}{\cancel{60}\ 15}$

$\times\ 68$
32
136
$+\ 204$
$217{,}6$
$+\ 59{,}4$
$27\cancel{7}{,}0$

$\times\ 18$
18
144
$+\ 18$
322

$\times\ 19{,}8$
3
$59{,}4 \mid 3$
$19{,}8$
3
29
27
24

$1 - \frac{25}{4R^2}$

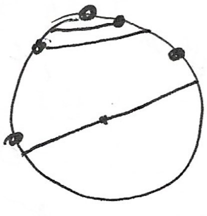
$\sin\gamma = \frac{1}{R}$

$\cos\gamma = \frac{\sqrt{R^2-1}}{R}$

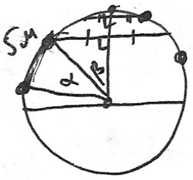
$\sin\beta = \frac{5}{2R}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{4R^2-25}}{2R}$

Черновик



$l = 5$м



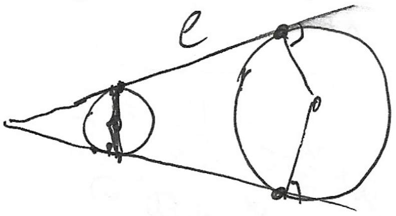
$2\pi R = 1$

$R = \frac{1}{2\pi}$

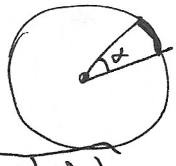
$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$

$22^2 - 11^2 = 11 \cdot 33$

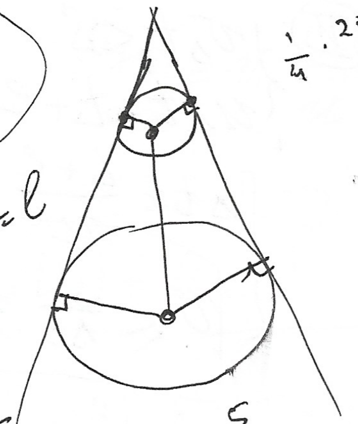
l



$l = \sqrt{O_1O_2^2 - (R - r)^2}$



$\frac{2\pi r}{2\pi} \alpha = l$



$AB = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos(\alpha + \beta + \gamma + \cancel{\delta})}$

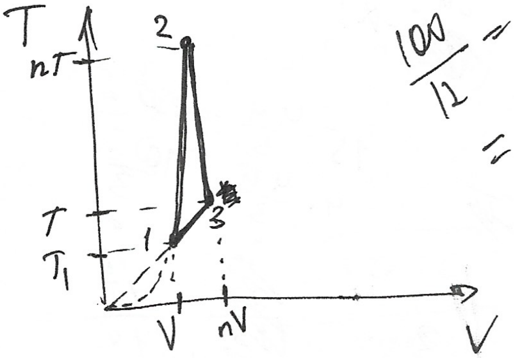
$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{5}{R}$

$\frac{100}{12} = \frac{25}{3} = 8{,}(3)\%$

$\sin\beta = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{5}{2R}$

$\sin\gamma = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$

$\delta = \frac{2}{R}$



1-2 $T = \gamma \cdot V^2$

$\frac{nV}{T} = \frac{V}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{T}{n}$

$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} =$

$Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R\, T(1-n) < 0$

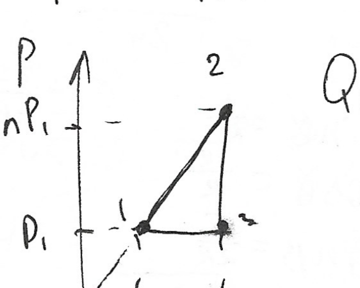
$Q_{31} = A_{31} + \Delta U_{31} = PV(1-n) + \frac{3}{2}\nu R\, T\left(\frac{1}{n} - 1\right) < 0$

$\nu R = \frac{P_1 V n}{T} = \frac{P_2 nV}{nT} \Rightarrow P_2 = nP_1$

$\frac{PV}{\gamma V^2} = \nu R$

1-2 $\Rightarrow \frac{P}{V} = const$

$\boxed{\frac{PV}{T} = \nu R}$



$Q_{12} = \frac{1}{2}V(n-1) \cdot P_1(n-1) + V(n-1)P_1 + \frac{3}{2}\nu R T\left(n - \frac{1}{n}\right) > 0$

$Q_{\oplus} = Q_{12}$

$\eta = \frac{A}{Q_{\oplus}} = \frac{n\frac{1}{2}V(n-1)^2 P_1}{n\frac{1}{2}V(n-1)^2 P_1 + nV(n-1)P_1 + \frac{3}{2}\nu RT(n^2-1)} =$

$= \cancel{\cos(\beta + \gamma)}$