МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Асланян Артак Арманович**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	0	15	0

Чистовик

1 Лист 17

Вариант 210102

№1

Разобьём нашу сумму на 4 разных $5, 4n, -6n^2, 4n^3$ и посчитаем их отдельно.

Первая сумма просто $13 \cdot 13 = 169$

Вторая сумма $4(1+2+3+\ldots+13) = 4 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} = 2 \cdot 13 \cdot 14 = 364$.

Третья сумма $-6(1^2+2^2 \ldots + 13^2) = -6 \cdot \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} = -4914$.

~~Квадрат~~ По формуле $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Найдём формулу $1^3+2^3+\ldots+n^3$. Понятно что это многочлен от n четвёртой степени. Составим таблицу для небольших n. Заметим что получаются квадраты сумм первых степеней. То есть формула должна быть такой $\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}$. Докажем по индукции что формула работает. Для $n=1$ подходит. Рассмотрим теперь разность $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} -$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^4(4n+4)}{4} = (n+1)^3$$

Значит каждый раз сумма увеличивается $(n+1)^3$ и формула работает.

Значит $4(1^3+2^3+\ldots 13^3)=13^2 14^2=33124$

Итого сумма $169+364-4914+33124=28743$

№2

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+|y-9|=4\\ \sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2\end{cases}$$

ОДЗ второго уравнения: $x^2-y-16\geq 0$; $x^2-y\geq 16 \Rightarrow \sqrt{x^2-y}\geq 4$.

Для первого уравнения получаем:

$\sqrt{x^2-y}+|y-9|\geq 4+|y-9|=4$

$|y-9|$ - неотрицательное число $\Rightarrow$ $|y-9|=0$; $y=9$ - подставим в первое уравнение

$\sqrt{x^2-9}=4$

$x^2=25$

$x=\pm 5$

Проверим второе уравнение

Если $x=-5$, то $\sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2$ не подходит

Если $x=5$, то $\sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2$ подходит

2 Лист

№2

Ответ: (5;9)

№3

Оба данных уравнения, тогда пусть x_1 и x_2 - корни первого уравнения, а x_3 и x_4 корни второго уравнения.
По теореме Виетта

$$\begin{cases} a = x_1 \cdot x_2 \\ a+1 = x_3 x_4 \end{cases}$$

Отсюда заметим, что произведение первой пары корней и второй пары корней имеют разную чётность
так как эти числа попарно различны ($x_1 \neq x_2$, $x_3 \neq x_4$) и каждое из них больше 1, то найдём минимальное произведение двух различных целых чисел, больших 1,
Получаем произведение 3 и 5, тогда чтобы a было минимальным
$x_1 x_2 = 14$; $x_1 = 2$ $x_2 = 7$, что соответствует условию и $x_3 x_4 = 3 \cdot 5$
$x_3 = 3$ $x_4 = 5$ (или наоборот)

Запишем уравнения которые мы получили

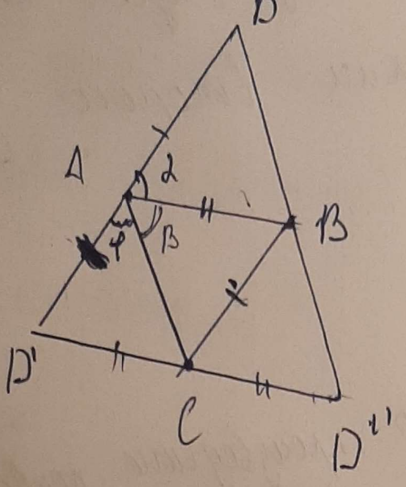
$(x-2)(x-7) = x^2 - 9x + 14 = x^2 - 9x + 14$

$(x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15 = x^2 - 8x + 14 + 1$

Ответ: 14

№6

„Разложим" пирамиду на плоскости следующим образом

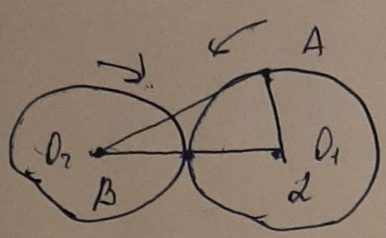


По условию $\alpha + \beta + \varphi = 180^0 \Rightarrow A$ лежит на DD', также имеем $BD = BD''$, $AD' = AD = BC$, $AB = CD' \Rightarrow$ $ABCD'$ - параллелограмм $\Rightarrow DD' \parallel BC \Rightarrow \angle BAD = \angle ABC \Rightarrow \Delta ADB = \Delta BCA \Rightarrow BD = AC = BD''$

Заметим, что мы получили 4 равных по трём сторонам треугольника $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{S}{4}$.

3 лист

№4



① Начальное положение автомобилей определено рисунком т.к. $AO_1 = \frac{1}{2} O_1O_2$, то $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$, $\angle AO_2O_1 = 30^\circ$

② Введём координаты через O_2:

$(x_1; y_1)$ - первое авто

$(x_2; y_2)$ - второе авто

$\cos(\frac{\pi}{6} - \omega t)$, $\sin(\frac{\pi}{6} - \omega t)$

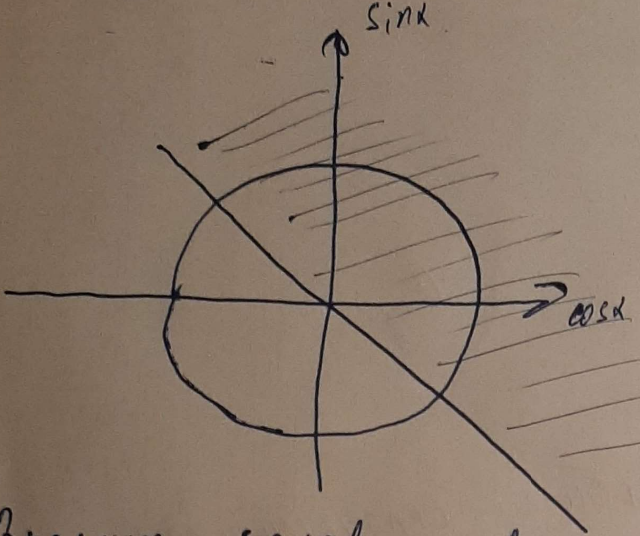
$2 + \cos(\frac{2\pi}{3} + \omega t)$, $\sin(\frac{2\pi}{3} + \omega t)$

③ $d^2 = (2 + \cos(\frac{2\pi}{3} + \omega t) - \cos(\frac{\pi}{6} - \omega t))^2 +$ ~~$\sin(\frac{2\pi}{3} + \omega t) - \sin(\frac{\pi}{6} - \omega t)$~~

$+ (\sin(\frac{2\pi}{3} + \omega t) - \sin(\frac{\pi}{6} - \omega t))^2$

$4^2 = \sin \omega t + \cos \omega t + 4^2$

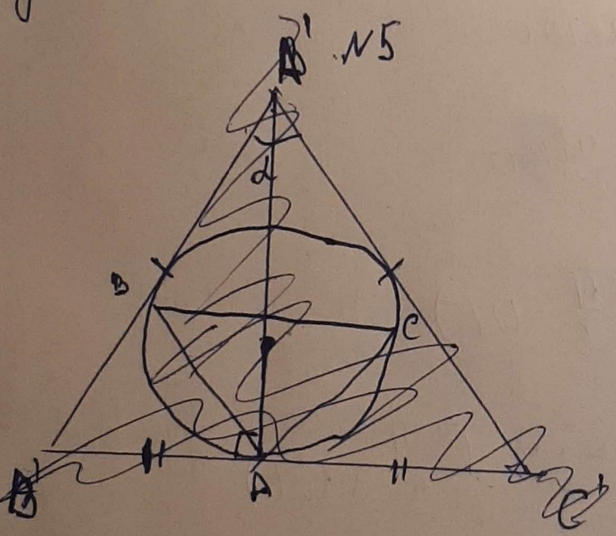
$\sin \omega t = -\cos \omega t$

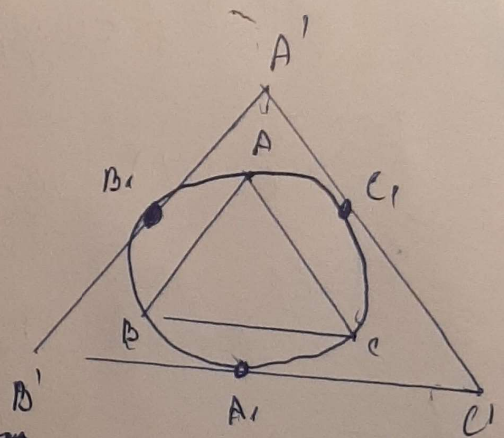


Значит половину времени расстояние будет меньше диаметра

Ответ: 15 минут

№5





Максимальный по площади круг, который можно вырезать - вписанная в треугольник окружность, больше нельзя, потому что будет выходить за площадь △ABC. Максимальный по площади треугольник, который можно вырезать из площада круга - вписанный в него треугольник, а минимальный - любой треугольнике с площадью стремящейся к нулю.

лист 4

№5

Пусть угол при основании будет $\varphi = 90 - \frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\angle B'A'C' = \varphi$. $A'C_1 = A'B_1$, так как это касательныя, следователно $\angle A'C_1B_1 = 90 - \frac{\varphi}{2}$

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle C_1A_1B_1 = 90 - \frac{\varphi}{2}$. ~~Аналогично~~ ~~$\angle C_1$~~

Значит $\angle C_1B_1A_1 - \varphi$.

Пусть $AB = x = BC$. Тогда $C_1A_1 - x$, так как опирается на ту же дугу.

Мы знаем что стороны в треугольнике относятся как синусы углов

Значит $B_1C_1 = x \cdot \frac{\sin(90 - \frac{\varphi}{2})}{\sin \varphi} = x \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}$.

$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 13$

(1 черновик

$x^2 + bx + a = 0$

$\frac{\cancel{-b}}{a}$ $x_1 + x_2 -$

$x^2 + 4x + 4$

$x^2 + cx + a + 1 = 0$

$\underline{a+1}$

$x^2 +$

D $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$-b \geq 2$

$x_1 \cdot x_2 \geq 4$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$D = 36 - 32$

$x_1 \cdot x_2 >$

$-b \geq 4$

a $x^2 + 6x + 9$

$\begin{cases} x^2 + bx + 4 = 0 \\ x^2 + cx + 5 = 0 \end{cases}$ $D = b^2 - 16$

$a \geq 4$

$(x+2)^2$

$D = c^2 - 20$

$a+1$ $x^2 +$

Ответ: 8

$|y-9| \leq 4$

$(x+3)(x+2)$

$(x+4)(x+1)$

$\begin{cases} y \geq 5 \\ y \leq 13 \end{cases}$ $\begin{cases} y-9 \geq -4 \\ y-9 \leq 4 \end{cases}$ $4 \geq |y-9|$

№ 2 $y \in [5;13]$ $2-$

$4 - |y-9| \geq 0$

$\begin{cases} \sqrt{x^2 y} + |y-9| = 4 \\ \sqrt{x^2 - y - 16} + |x-3| = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = 4 - |y-9| \\ \sqrt{x^2 - y - 16} = 2 - |x-3| \end{cases}$ $2 - |x-3| \geq 0$

$\begin{cases} y \in [5;13] \\ x^2 - y = 16 - 8|y-9| + (y-9)^2 \\ x \in [1;5] \\ x^2 - y - 16 = 4 - 4|x-3| + (x-3)^2 \end{cases}$

$2 - |x-3| \geq 0$

$|x-3| \leq 2$

$\begin{cases} x-3 \geq -2 \\ x-3 \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{cases}$

Черновик

$F(1)+F(2)+F(3)\dots F(13)$ $\qquad$ $F(n)=4n^3-6n^2+4n+13$

$4-6+4+13$ $\qquad$ $13(\cdot 13(145)+1)$

$15+$ $\qquad$ $13(13\cdot 145+1)$

$xn^4 = x\cdot 4n^3$ $\qquad$ 145

$4x=1$

$n^4-2n^3+2n^2+13n$

$F(13)-F(1) = 13^4-2\cdot 13^3+2\cdot 13^2+13$

N6. $\qquad$ $13(\cdot 13(13^2-2\cdot 13+2)+1)$

$13(13(13(13-2)+2)+1)$

$13(13(13\cdot 11+2)+1)$

$\frac{P}{P_1}=r$

$\boxed{13}$

N5

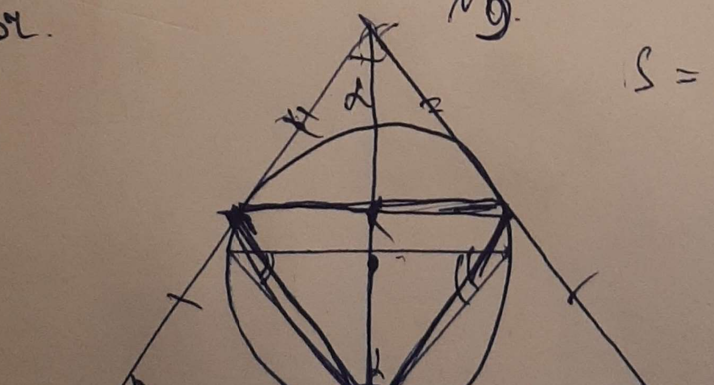
$pr=1$

$r=\frac{1}{p}$ $\qquad$ $\frac{1}{p}$

$S=pr$

$1=$

$S=pr=1$

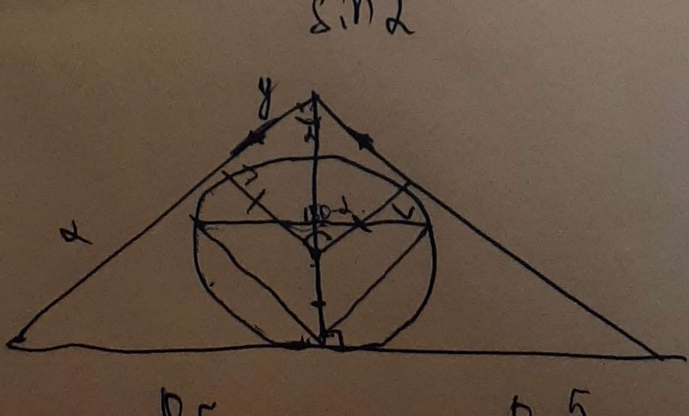


$r=\frac{S}{P}=0\frac{S}{}$

$\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot x^2=1$

$\sin\alpha x^2=2$

$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$ $\qquad$ $\frac{a^2x}{4R}=S$ $\qquad$ $\sin\alpha=\frac{2}{x^2}$



$\frac{y}{\frac{2}{x^2}}=2$

$(2x+y)$

102

Черновик.

$F(1)+F(2)+F(3)+\ldots+F(13) \quad F(n)=4n^3-6n^2+4n+13$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+|y-9|=4\\ \sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2>y\\ x^2>y+16\\ x^2-y=4-|y-9|\\ x^2-y-16=2-|x-3|\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{t}+|y-9|=4\\ \sqrt{t-16}+|x-3|=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}16=4-|y-9|-2+|x+3|\\ \\ \end{cases}$$

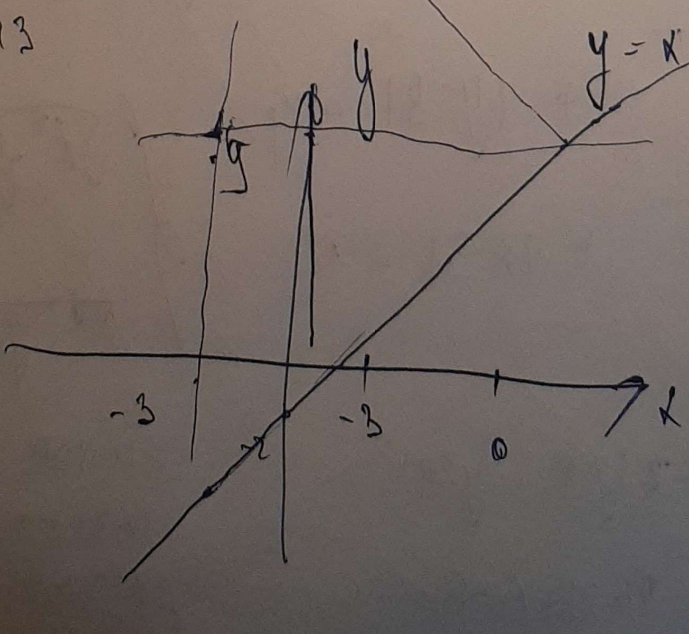
$$\begin{cases}\cancel{14}\,|y-9|=|x+3|-14\\ \\ \end{cases}$$

$n(4n^2-6n+4)+13$

$4n(n^2-1.5n+1)+13$

$y-9=x+3-14$

$y=x-11+9$; $y=x-2$



Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников «Ломоносов» Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему
ученика 11 класса школу ГБОУ №1547 по адресу Белореченская улица 47к1
Артака Асланяна Армановича

Аппеляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (75) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что вполне может быть мне недосчитали 5 баллов.

Дата 01/04/2021

Подпись