МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бадмаев Валерий Цевгеевич**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	15	0

№ 6 продолж. Чистовик. (2)

Решение: $AB = CD$; $BC = AD$; AC – общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD$ по 3 сторонам.

$\Rightarrow \angle DAC = \angle ACB$; $\angle ACD = \angle BAC$.

$\angle ACD + \angle CAD + \angle ADC = 180^\circ$ (углы $\triangle ACD$).

$\angle BAD + \angle BAC + \angle CAD = 180^\circ$ (по условию; плоские углы при ~~верш~~ вершине A).

$\Rightarrow \angle ACD + \angle CAD + \angle ADC = \angle BAD + \angle BAC + \angle CAD$.

$\Rightarrow \angle ADC = \angle BAD$.

Рассм $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$: $AB = CD$; AD – общая

$\angle ADC = \angle BAD$ – по доказанному.

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD$ по 1 приз р-ва $\triangle$.

$\Rightarrow BD = AC$.

Таким образом, доказано, что $\triangle ABC = \triangle ACD$

$\triangle ACD = \triangle ABD \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD = \triangle ABD$.

Рассм. $\triangle ADB$ и $\triangle BCD$: $BC = AD$; $AB = CD$ – по усл.

BD – общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BCD$ по III приз равенства

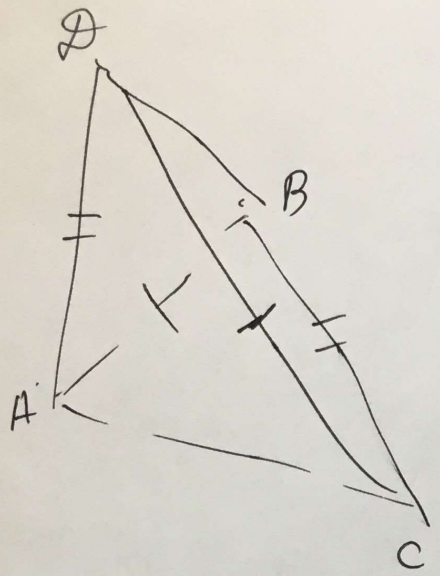
Таким образом, доказано, что $\triangle ABC = \triangle ACD = \triangle ABD$

и $\triangle ABD = \triangle BCD \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD = \triangle ABD = \triangle BCD$

$\Rightarrow$ У пирамиды $ABCD$ все грани равны м/у собой $\Rightarrow ABCD$ – равногранная пирамида

Известно, что равные фигуры имеют равные площади $\Rightarrow S_{ABC} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{BCD}$

№6 Черновик.



Дано: ABCD - неправ. пир.

$AB = CD$; $AD = BC$

$\angle BAD + \angle CAB + \angle CAD = 180°$.

$S_{\text{поверх } ABCD} = S$

Найти: S_{ABC} - ?

$\triangle ABC = \triangle ACD$ по 3 сторонам

$AB = CD$; $AD = BC$; AC - общ.

$\Rightarrow \angle DCA = \angle CAB$;
$\angle ACB = \angle CAD$

но $\angle DCA + \angle CAD + \angle CDA = 180°$ ($\triangle ACD$).

$\angle DCA + \angle CAB + \angle DAB = 180°$ (по усл.)

$\angle DCA + \angle CAD + \angle CDA = \angle DAC + \angle CAB + \angle DAB$

$\Rightarrow \angle CAD + \angle CAB + \angle CDA = \angle CAD + \angle CAB + \angle DAB$

$\Rightarrow \angle CDA = \angle DAB$.

$\Rightarrow \triangle CDA = \triangle DAB$ (по 2 ст и углу м/у ними) ($CD = AB$; $AD =$
$\angle DAC = \angle CDA$.)

$\triangle CDB = \triangle DAB$ по 3ст $\Rightarrow$ все грани равны

$\Rightarrow$ площ поверхн $ABCD = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADB} + S_{BCD}$

$\Rightarrow 4S_{ABC} = S \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S}{4}$.

Ответ: $S_{ABC} = \frac{S}{4}$

3

№2 Черновик.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-9| = 4 \\ \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 2 \end{cases}$$

$\sqrt{x^2-y} + |y-9| = 2\sqrt{x^2-y-16} + 2|x-3|$.

$\cancel{x^2-y = t^2}$.

$\cancel{y = x^2 - t^2}$.

$\Rightarrow \cancel{t + |x^2-t^2| = 2\sqrt{t^2+16} + 2|x-3|}$.

$\cancel{t = 2}$

$|y-9| \le 4$.

$\begin{cases} y-9 \le 4 \\ y-9 \ge -4 \end{cases} \begin{cases} y \le 13 \\ y \ge 5 \end{cases} \Rightarrow y \in [5;13]$; $x \in [1;5]$.

$\Rightarrow x^2 \in [1;25]$.

$-y \in [-13; -5]$.

$\Rightarrow x^2 - y \in [-12;$

Реш: $x^2-y+16 \ge 0$. $\Rightarrow x^2-y \ge 16$. $\Rightarrow \sqrt{x^2-y} \ge 4$.

а $\sqrt{x^2-y} + |y-9| = 4 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y} = 4 \\ |y-9| = 0 \end{cases}$

4

$\Rightarrow y = 9$ $0 + |x-3| = 2$. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Подставляя $(1;9) - \varnothing$; $(5;9)$, получаю:

подходит только $(5;9)$.

Ответ: $(5;9)$

Черновик.

№ 3.

$$\begin{cases} x^2+bx+a=0 \\ x^2+cx+a=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+bx+a=0 \\ x^2+cx+a+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1\cdot x_2=a \\ x_3+x_4=-c \\ x_3\cdot x_4=a+1 \end{cases}$$

$D_1=b^2-4a \quad x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2}$

$D_2=c^2-4(a+1) \quad x_3=\dfrac{-c-\sqrt{c^2-4(a+1)}}{2}$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2}>-1 \Rightarrow -b-\sqrt{b^2-4a}>-2$$
$$\Rightarrow \sqrt{b^2-4a}<2-b$$

$$\frac{-c-\sqrt{c^2-4(a+1)}}{2}>-1 \Rightarrow \sqrt{c^2-4(a+1)}<2-c$$

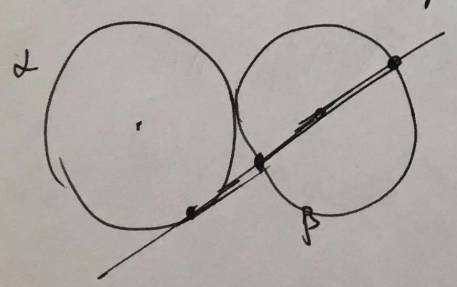
1) $a=4 \Rightarrow x^2+bx+4=0$

$$\begin{cases} x^2+bx+14=0 \\ x^2+cx+15=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-9x+14=0 \\ x^2-8x+15=0 \end{cases}$$

$(x-x_1)(x-x_2)=$ $(x-3)(x-5)=$
$=x^2-8x+15$

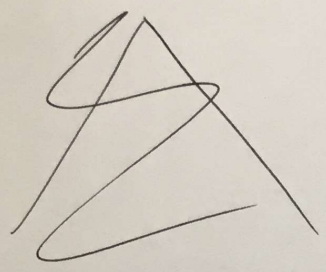
5

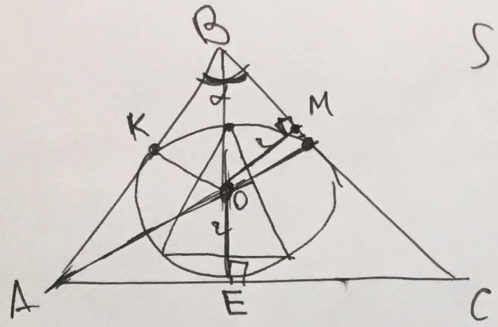
№ 4



Черновик

№ 5.





$S = 1.$

$\angle OAC = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}.$

Решение: $r = \frac{S}{p} = \frac{1}{p}$ p – полупер.

$AE = AK = r \cdot ctg(45^\circ - \frac{\alpha}{4})$

$BK = r \cdot ctg(\frac{\alpha}{2}).$

$p = BK + AK + AE = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2} + 2r \cdot ctg(45^\circ - \frac{\alpha}{4}).$

$\Rightarrow r = \frac{1}{r(ctg\frac{\alpha}{2} + 2ctg(45^\circ - \frac{\alpha}{4}))}$

$r^2 = \frac{1}{\quad}$

$(r^2)' = \frac{-1\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{4})}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}{\left(ctg\frac{\alpha}{2} + 2ctg(45^\circ - \frac{\alpha}{4})\right)^2} = 0.$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} + \frac{1}{\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{4})}\right) = 0.$

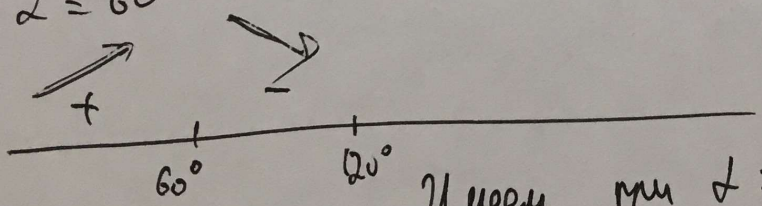
$\Rightarrow \sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{4}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 0.$

$\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{4}) = \sin^2(\frac{\alpha}{2}).$

$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} = \pi - \frac{\alpha}{2}$

$\frac{\alpha}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \alpha = 3\pi$

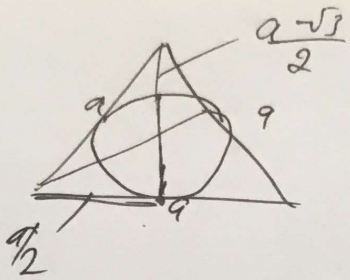
$\alpha = 60^\circ$



Имеем при $\alpha = 60^\circ$ радиус max.

$\Rightarrow$ при $\alpha = 120^\circ$ радиус min

1) $\alpha = 60°$



Чертеж

$S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$\Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$r = 2$ $\quad p = \frac{3a}{2}$ $\quad a^2\sqrt{3} = 4$

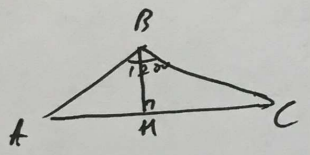
$a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$r = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$; $S(\alpha) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$a_1 = \sin 60° \cdot 2r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$S(\alpha) = \frac{1}{4}$ — макс. площ.

2) $\alpha = 120°$



$\angle BAC = 30° = \angle ACB$; $\angle ABC = 120°$

BH $\quad AH = a$, $BH = tg\, 30° \cdot a = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$

$\Rightarrow a = \sqrt[4]{3}$

$AB = 2x$; $AH = a$; $BH = x$ $\quad AB =$

$(2x)^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow 3x^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$\Rightarrow p = 2x + a = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$

$r = \frac{1}{p} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow AC = 2a = \sin 120° \cdot 2r$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{2+\sqrt{3}}$

$S = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2} = \frac{3}{4(2+\sqrt{3})^2}$

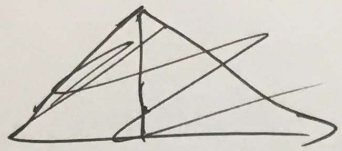
M.N

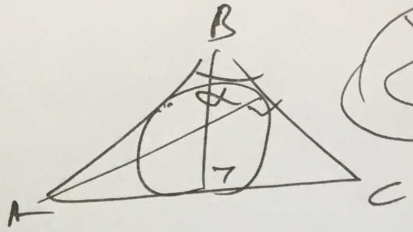
~~Чистовик~~ 9

Черновик.

$(x+r)^2 + r^2 = 4r^2$

$x^2 + 2xr - 2r^2 = 0.$





8

~~Из~~ $S = 1$

~~Чистовик~~ ~~9~~

Черновик

9

Запишем ~~ур~~ коорд

$\omega = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \ \frac{рад}{с}$

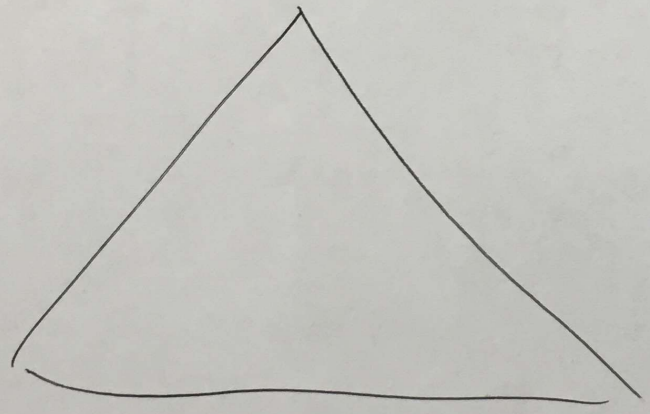
$x_1 = -1 + \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$

$y_1 = \cos(4\pi t + \frac{\pi}{6})$

$x_2 = 1 + \sin(4\pi t + \frac{4\pi}{3})$

$y_2 = -\cos(4\pi t + \frac{4\pi}{3})$

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geq 4.$



№6 продолж. Чистовик ③

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ABD} + S_{BCD} = 4 S_{ABC} = S$

$\Rightarrow 4 S_{ABC} = S \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S}{4}$.

Ответ: $S_{ABC} = \frac{S}{4}$

№ 2.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-9| = 4 \\ \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 2 \end{cases}$$

Д. подкоренные выражения:

$$\begin{cases} x^2-y \geq 0 \\ x^2-y-16 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2-y-16 \geq 0$$

$\Rightarrow x^2-y \geq 16$.

$\Rightarrow \sqrt{x^2-y} \geq 4$. Поскольку обе части положительны, то взятие корня на знак неравенства и смысл выражения не влияет.

Рассмотрим первое уравнение системы:

$\sqrt{x^2-y} + |y-9| = 4$.

По доказанному: $\underline{\sqrt{x^2-y} \geq 4}$.

$|y-9| \geq 0$. $\Rightarrow \sqrt{x^2-y} + |y-9| \geq 4$.

$\Rightarrow$ уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

№2 продолж

Чистовик

4

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} = 4 \\ |y-9| = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2-y=16 \Rightarrow \underline{x^2-y-16=0}.$$

$$\Rightarrow y-9=0 \Rightarrow \underline{y=9}.$$

Тогда во втором уравнении системы имеем: $0+|x-3|=2$.

$$\Rightarrow |x-3|=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ ~~(1;5)~~ и $(1;9)$ и $(5;9)$ – возможные решения системы.

Подставляя пары x и y в уравнения системы, получаю $\sqrt{1-9}+0=4$ – $\varnothing$ – для пары $(1;9)$

и $\begin{cases} \sqrt{25-9}+|9-9|=4 \\ \sqrt{25-9-16}+|5-3|=2 \end{cases}$ для пары $(5;9)$

Таким образом, пара $(1;9)$ не подошла, $(5;9)$ – является решением системы.

Ответ: $(x;y)=(5;9)$

№3

$$\begin{cases} x^2+bx+a=0 \\ x^2+cx+a=-1 \end{cases}$$ имеют по 2 целых корня, при этом все корни >1.

Найти: наим. знач $\underline{a}$.

№3 Чистовик (5)

продолжение.

Решение: $\exists x_1, x_2$ – корни 1-го ур-ия.

$\exists x_3, x_4$ – корни 2-го ур-ия.

$\exists x_1 < x_2,\ x_3 < x_4$.

$\Rightarrow$ по т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b. \\ x_1 x_2 = a \\ x_3 + x_4 = -c \\ x_3 \cdot x_4 = a + 1 \end{cases}$$

Известно, что $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2, x_3, x_4 > 1$.

Поскольку, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2 > 1$, то a – натуральное

$x_1 \geq 2$; $x_2 \geq 2$ (т.к. целые)

$\Rightarrow a = x_1 \cdot x_2 \geq 4$.

$x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$, $x_3 \cdot x_4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + 1$ – натуральное.

$\Rightarrow$ можно переформулировать задачу:

Необходимо найти такое минимальное целое a, при котором числа a и $a+1$ представляются в виде произведения двух чисел, каждое из которых больше единицы.

$\Rightarrow$ числа a и $a+1$ не могут быть простыми.

По доказанному $a \geq 4$ $\Rightarrow$ С $a = 4$ начнем перебор

1) $a = 4 \Rightarrow a + 1 = 5$ – простое $\Rightarrow \varnothing$

2) $a = 5 \Rightarrow a + 1 \cdot a = 5$ – простое $\Rightarrow \varnothing$.

3) $a = 6 \Rightarrow a + 1 = 7$ – $\varnothing$ 7 – простое

4) $a = 7 \Rightarrow a + 1$ – $\varnothing$ – 7 – простое

5) $a = 8 \Rightarrow a + 1 = 9$, но 9 представляется в виде $3 \cdot 3$

$\Rightarrow$ квадратное ур-ие имеет только один корень

$\Rightarrow 0$

№3 продолжение Чистовик (6)

6) $a=9 \Rightarrow a+1=10$, 9 не подх $\Rightarrow \varnothing$

7) $a=10 \Rightarrow a+1=11$ – простое $\Rightarrow \varnothing$

8) $a=11 \Rightarrow a+1=12$, 11 – простое $\Rightarrow \varnothing$

9) $a=12 \Rightarrow a+1=13$ – простое $\Rightarrow \varnothing$

10) $a=13 \Rightarrow a+1=14$ простое $\Rightarrow \varnothing$

11) $a=14 \Rightarrow a+1=15$

Заметим, что $14=2\cdot 7$; $15=3\cdot 5$.

$\Rightarrow a=14$ – минимальное подходящее значение $\underline{a}$.

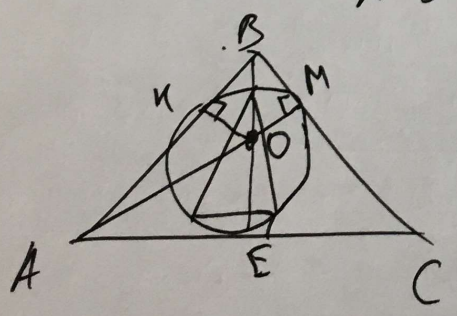
$\Rightarrow$ ур-ия имеют вид:

$$\begin{cases} x^2+bx+14=0 \\ x^2+cx+15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-9x+14=0 \\ x^2-8x+15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x-7)=0 \\ (x-3)(x-5)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a=14$

Ответ: $a=14$.

№5



$\angle ABC=\alpha$;

$\angle OAC = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}$

$S=p\cdot r$ (p – полупер)

$\Rightarrow \boxed{r=\frac{S}{p}=\frac{1}{p}}$

$AE=AK=r\cdot ctg(45^\circ-\frac{\alpha}{4})$

$BK=r\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$

Чистовик (7)

$$P = BK + AE + AK = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2} + 2r\, ctg\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{r\left(ctg\frac{\alpha}{2} + 2ctg\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{ctg\frac{\alpha}{2} + 2ctg\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)} =$$

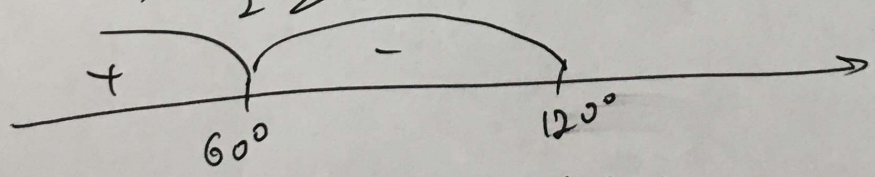
$$= \left(ctg\frac{\alpha}{2} + 2ctg\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow (r^2)' = \frac{-1\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)}{\left(ctg\frac{\alpha}{2} + 2ctg\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right)^2}$$

$$= 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} +}\ \alpha = 60^\circ \text{ — критич}$$



$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$ — радиус макс

$\alpha = 120^\circ$ — радиус мин

1) $\alpha = 60^\circ$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

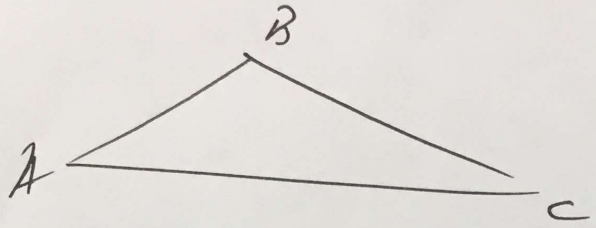
$$\Rightarrow p = \frac{3a}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} \Rightarrow S(\alpha) = \frac{a_1^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$a_1 = \sin 60^\circ \cdot 2r = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt[4]{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$S(\alpha) = \frac{1}{4}$ — макс площ

Чистовик (8)

2) $\alpha = 120^\circ$



$\angle BAC = 30^\circ$

$TAN = a \Rightarrow BN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} = 1$

$\Rightarrow a = \sqrt[4]{3}$

$AB = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$\Rightarrow P = AB + a = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$

$\Rightarrow r = \frac{1}{P} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{2+\sqrt{3}}$

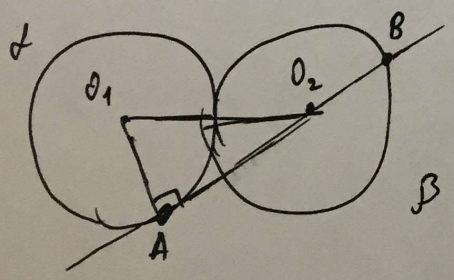
$\Rightarrow S^{(\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2} =$

$= \frac{3}{4(2+\sqrt{3})^2}$ — min

Ответ: $S(\alpha) = \frac{1}{4}$ — MAX

$S(\alpha) = \frac{3}{4(2+\sqrt{3})^2}$ — min

№ 4.



$\angle AO_1O_2 = 60^\circ$; $AO_2O_1 = 2\alpha$

$|A;B| = x = AB$

$BO_2 = R$

$\alpha + 30^\circ + \alpha + 60^\circ = 180^\circ$

$2\alpha = 90^\circ \quad \alpha = 45^\circ$

Черновик 210102 – ВАРИАНТ 1

№ 1.

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)$

$f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$

$\cancel{f(n)=4n^3-4n^2+}$

$f(1)=4-6+4+13=15.$

$f(2)=4\cdot 8-6\cdot 4+4\cdot 2+13=32-24+8+13=16+13=29$

$\cancel{n^4-6n^2+9-n^4+4n^3+4n+4=(n^2-3)^2=}$

$f(n)=4n^3-6n^2+4n+13.$

$\neq 4n^3-4\cdot 13n^2$

№2.

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+|y-9|=4\\ \sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y}=4-|y-9|.\\ \sqrt{x^2-y-16}=2-|x-3|.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-y}\le 4\\ \sqrt{x^2-y-16}\le 2\end{cases}\quad\begin{cases}x^2-y\le 16\\ x^2-y-16\le 4\\ x^2-y\ge 0\end{cases}\Rightarrow(x^2-y)\in[0;16]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&x=5;\ y=9.\\ &\Rightarrow\sqrt{25-9}+0=\sqrt{16}=4\\ &\sqrt{25-9-16}+|5-3|=2\end{aligned}}$$

$$\begin{array}{r}25\\ -16\\ \hline 9\end{array}$$

1

$|x-3|=2-\sqrt{x^2-y-16}.$

$\Rightarrow |x-3|\le 2$

$$\begin{cases}x-3\le 2\\ x-3\ge -2\end{cases}\quad\begin{cases}x\le 5\\ x\ge 1\end{cases}\Rightarrow x\in[1;5].$$

Черновик.

№ 1.

$f(1)+f(2)+\ldots f(13)$ – ?

$$f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$$

по св формулам чисел рядов доказываю-суах

Из индукцию: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(1)+f(2)+\ldots+f(13)=4\cdot\left(\frac{13\cdot14}{2}\right)^2-6\cdot\frac{13\cdot14\cdot27}{6}+$$

$$+\underbrace{4\cdot\frac{13\cdot14}{2}}_{\text{а.п.}}+13\cdot13=\cancel{169}\ \cancel{196}$$

$1^3+2^3=\left(\frac{2\cdot3}{2}\right)^2=9$; $1^3+2^3+3^3=\left(\frac{3\cdot4}{2}\right)^2=36=27+8+1=36$ ✓

$36+64=100$, $1^3+2^3+3^3+4^3=\left(\frac{4\cdot5}{2}\right)^2=100$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 14 \\ \hline 52 \\ +\ 13 \\ \hline 182 \\ +\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 182 \\ \times\ 25 \\ \hline 157 \\ \times\ 182 \\ \hline 314 \\ +\ 256 \\ +\ 157 \\ \hline 28574 \\ +\ 169 \\ \hline 28743 \end{array}$$

2

Вариант 210102 Чистовик (1)

№ 1

Найти: $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)$,

если $f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$

Решение: По известным формулам числовых рядов, ~~1) 1²~~ доказывающаяся посредством индукции:

1) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3) $1+2+\ldots+n=\frac{n+1}{2}\cdot n=\frac{n(n+1)}{2}$

Тогда имеем: $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)=4(1^3+2^3+\ldots+13^3)-6(1^2+2^2+\ldots+13^2)+4(1+2+\ldots 13)+13\cdot 13=$

$=4\cdot\left(\frac{13\cdot 14}{2}\right)^2-6\cdot\frac{13\cdot 14\cdot 27}{6}+4\cdot\frac{13\cdot 14}{2}+13^2=$

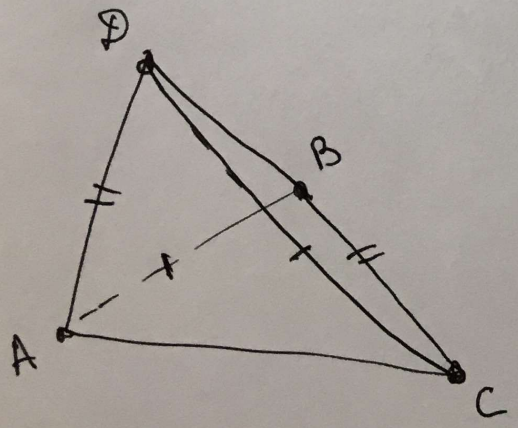
$=13^2\cdot 14^2-13\cdot 14\cdot 27+13\cdot 14\cdot 2+13^2=13\cdot 14(13\cdot 14-27+2)+13^2=$

$=182\cdot(182-25)+13^2=28574+169=28743$

Ответ: 28743

1

№ 6



Дано: ABCD – ~~[illegible]~~ неправ. пирамида

$AB=CD$; $AD=BC$

$\angle BAD+\angle BAC+\angle DAC=180^\circ$

$S_{поверх}=S$

Найти: S_{ABC} – ?