МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Барздо Олег Феликсович**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	5	0	0	15

Чистовик
№1 (Вариант 210208)

$f(x)=x^2+14x+42$

$f(f(f(f(x))))=0$

$f(x)=x^2+14x+42=(x+7^2)-7 \qquad x\in[-7;+\infty)$

$x^2+14x+42=0$

$x_{1,2}=-7\pm\sqrt{49-42}=-7\pm\sqrt{7}$

~~$x=\left[\begin{array}{l}-7+\sqrt{7} \text{ - подходит, т.к. } >-7\\ -7-\sqrt{7}<-7\Rightarrow\varnothing\end{array}\right.$~~

$x=-7\pm\sqrt{7}$

$\left[\begin{array}{l}f(f(f(x)))=-7+\sqrt{7} \text{ - подходит, т.к } >-7\\ f(f(f(x)))=-7-\sqrt{7}<-7\Rightarrow\varnothing\end{array}\right.$

$x^2+14x+42=-7+\sqrt{7}$

$x^2+14x+49-\sqrt{7}=0$

$(x+7)^2-\sqrt{7}=0$

$(x+7-\cancel{\sqrt{7}}\,7^{\frac{1}{4}})(x+7+7^{\frac{1}{4}})=0$

$x=\left[\begin{array}{l}-7-7^{\frac{1}{4}} \quad \cancel{<-7\Rightarrow\varnothing}\\ -7+7^{\frac{1}{4}} \quad \cancel{>-7}\end{array}\right.$

$\cancel{f(f(f(x)}\; f(f(x))=\left[\begin{array}{l}-7-7^{\frac{1}{4}}<-7\Rightarrow\varnothing\\ -7+7^{\frac{1}{4}}>-7\Rightarrow\text{подходит}\end{array}\right.$

~~$x^2+14x+42$~~

→

1

$x^2+14x+42=-7+7^{\frac{1}{4}}$

$x^2+14x+49-7^{\frac{1}{4}}=0$

$(x+7)^2-7^{\frac{1}{4}}=0$

$\left(x+7-7^{\frac{1}{8}}\right)\left(x+7+7^{\frac{1}{8}}\right)=0$

$x=\left[\begin{array}{l}-7+7^{\frac{1}{8}}\\ -7-7^{\frac{1}{8}}\end{array}\right.$

$f(x)=\left[\begin{array}{l}-7+7^{\frac{1}{8}} > -7 \Rightarrow \text{подходит.}\\ -7-7^{\frac{1}{8}} < -7 \Rightarrow \varnothing\end{array}\right.$

$x^2+14x+42=-7+7^{\frac{1}{8}}$

$x^2+14x+49-7^{\frac{1}{8}}=0$

$(x+7)^2-7^{\frac{1}{8}}=0$

$\left(x+7+7^{\frac{1}{16}}\right)\left(x+7-7^{\frac{1}{16}}\right)=0$

$x=\left[\begin{array}{l}-7-7^{\frac{1}{8}}\\ -7+7^{\frac{1}{8}}\end{array}\right.$

$\Rightarrow x=-7\pm 7^{\frac{1}{16}}$

Ответ: $x=-7\pm 7^{\frac{1}{16}}$

2

Чистовик

Вариант (210208)

№2

$\underbrace{2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-2021}}_{}=x$

↳ сумма геом. прогрессии.

$q=\frac{1}{2}$, $n=2023$

$S_{2023}=\dfrac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}\right)}{1-\frac{1}{2}}=4\cdot(1-2^{-2023}) \Rightarrow x<4,\ 2x<8$

$\Rightarrow 2x-4<4$

$\sqrt{2x-4}<2$

$\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}}+\sqrt{2x-4-4\sqrt{2x-4}}$:

~~$2x+4+4\sqrt{\ }$~~

$2x+4\sqrt{2x-4}=(\sqrt{2x-4}+2)^2$

$2x-4\sqrt{2x-4}=(\sqrt{2x-4}-2)^2$

$\Rightarrow$ ~~$|2x+4\sqrt{\ }|$~~ $|2+\sqrt{2x-4}|+|\sqrt{2x-4}-2|=$

$= тогда\ 2+\cancel{\sqrt{2x-4}}-\cancel{\sqrt{2x-4}}+2=4$

Ответ: 4.

№3 Чистовик

$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$A, B, C, D, E > 0$

$P(-1) = 10$

$P(1) = 22$

~~$A + B + C + D + E = 22$~~

~~$5 + 6 + 7 + 8$ 9~~

~~$2 + 3 + 4 + 5 + 8 = 22$~~

$P(-1) = 10$, $P(1) = 22$

$$\begin{cases} -1 + A - B + C - D + E = 10 \ (1) \\ 1 + A + B + C + D + E = 22 \ (2) \end{cases}$$

$-\cancel{1} + A - \cancel{B} + C - \cancel{D} + E \cancel{=10} + \cancel{1} + A + \cancel{B} + C + \cancel{D} + E = 32$

$2A + 2C + 2E = 32$

$A + C + E = 16$

~~Тогда~~ Вычтем из (2) (1)

$1 + \cancel{A} + B + \cancel{C} + D + \cancel{E} + 1 - \cancel{A} + B - \cancel{C} + D - \cancel{E} = 12$

$2B + 2D = 10$

$B + D = 5$

$$\begin{cases} B + D = 5 \\ A + C + E = 16 \end{cases}$$

Все варианты:

$B = 3$ $D = 2$

$B = 4$ $D = 1$ – 4 варианта

$D = 3$ $B = 2$

5 $D = 4$ $B = 1$

4

~~Пусть B=3, D=2~~

$A+C+E=16$

$A=14$,	$C=1$,	$E=1$	14 − 1
$A=13$	$C=2$	$E=1$	13 − 2
$A=13$	$C=1$	$E=2$	12 − 3
$A=12$	$C=3$	$E=1$	11 − 4
$A=12$	$C=2$	$E=2$	10 − 5
$A=12$	$C=1$	$E=3$	9 − 6
$A=11$	$C=4$	$E=1$	8 − 7
$A=11$	$C=3$	$E=2$	7 − 8
$A=11$	$C=2$	$E=3$	6 − 9
$A=11$	$C=1$	$E=4$	5 − 10
			4 − 11
			3 − 12
			2 − 13
			1 − 14

Заметим закономерность, что при уменьшении A на 1, то прибавляется +1 вариант тогда сумма всех вариантов $= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+$
$+14=105$. общее кол-во

3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91

⇒ тогда ~~сумма~~ всех вариантов для

$A, B, C, D, E = 4 \cdot 105 = 420$

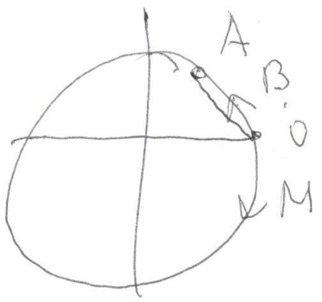
Ответ: 420

5а. Чистовик.

$\cancel{V_{вн} = \frac{5S}{3} \quad \frac{5}{6} S V_в}$

$V_м = \frac{5}{3}S$; $\frac{5}{6}S < V_в < \frac{60}{61}S$

S – длина трассы.



Если едят навстречу друг другу, то

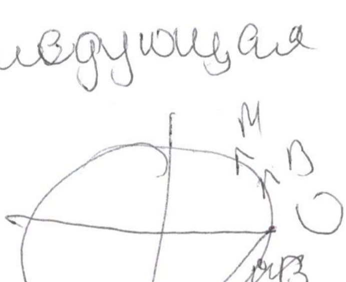
$t_{между\ встр} = \frac{S}{V_м + V_в}$

тогда $l(\cup OA) = \frac{V_в S}{V_м + V_в}$; $\cup OA = \left(\frac{360 \cdot V_в}{V_м + V_в}\right)^\circ$

По т. sin: $2R = \frac{OA}{\sin\left(\frac{180 V_в}{V_м + V_в}\right)}$

Если в одну сторону, то следующая встреча через $\frac{S}{V_м - V_в}$

$l(\cup BO) = \frac{(V_м - 2V_в)S}{V_м - V_в}$



С другой стороны $l(OA) = l(\cup BA)$

$\frac{V_в S}{V_м + V_в} = \frac{(V_м - 2V_в)S}{V_м - V_в}$

$$(V_м - 2V_в)(V_м + V_в) = V_в(V_м - V_в)$$

$$V_м^2 - 3V_в \cdot V_м - 2V_в^2 = V_в V_м - V_в^2$$

$$V_м^2 - 2V_в \cdot V_м - 3V_в^2 = 0$$

$$(V_м - V_в)^2 - 4V_в^2 = 0$$

$$(V_м - 3V_в)(V_м + V_в) = 0$$

невозможно, чтобы 0, т.к. $V_м, V_в > 0$

$$\Rightarrow V_м - 3V_в = 0$$

$$V_м = 3V_в$$

$$2R = \frac{4024}{\sin\left(\frac{180 V_в}{V_в + V_м}\right)} = \frac{4024}{\sin 45} = \frac{4024 \cdot \cancel{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\cancel{2}R = \frac{4024 \cdot 2}{\sqrt{2}} \quad R = \frac{\overset{2012}{\cancel{4024}}\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

О: $R = 2012\sqrt{2}$

Чистовик

№7

Катя может взять только нечетное кол-во камней, т.к. у нечетных чисел нет четных делителей. После этого в одной кучк станет четное кол-во камней, т.к нечет-нечет = чет. В этом случае у Вовы всегда есть выигрышная стратегия, т.к, он все время может возвращать два нечетных числа, отнимая от кучи 1 камень, т.к 1-делитель любого числа. После этого перед Катей остается два нечетных, и у нее нет иного выбора, как взять нечетное. Тогда после Кати будет всегда будет оставаться либо четное; ~~либо 0, и тогда Вова возьмет все камни, т.к 0-делитель любого числа.~~

- тогда Вова опять возьмет 1 камень.

либо 0:

тогда Вова возьмет все камни, т.к 0-~~делитель~~ нацело делится на любое число.

Ответ: Вова