МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Битлев Роберт Радмирович**

Класс: **7**

Технический балл: **72**

Дата проведения: **19 марта 2021 года**

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Битлев Роберт Радмирович

7-8 классы

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Сумма***
16 баллов	16 баллов	16 баллов	16 баллов	4 балла	0 баллов	72 балла

* К сумме баллов по всем задачам добавлялось 4 балла в случае, если в работе есть хотя бы одна верно решённая задача.

Чистовик.

Задача 1.

v - скорость 1-ого автомобиля, S - расстояние, которое автомобили преодолели

Начальная скорость 2-ого: $3v$, пройденный с $3v$ путь: $\frac{S}{2}$

n	скорость 2-ого после n-ого снижения	пройденный с данной скоростью путь
1	$\frac{3}{2}v$	$S/4$
2	$\frac{3}{4}v$	$S/8$
3	$\frac{3}{8}v$	$S/16$
4	$\frac{3}{16}v$	$S/32$
5	$3/32\ v$	$S/64$
6	$\frac{3}{64}v$	$S/128$
7	$3/128\ v$	$S/256$
8	$\frac{3}{256}v$	$S/256$ (оставшийся путь)

Общее время 1-ого: $t_1 = \frac{S}{v}$

Общее время 2-ого: $t_2 = \frac{S}{2} : 3v + \frac{S}{4} : \frac{3v}{2} + \frac{S}{8} : \frac{3v}{4} + \frac{S}{16} : \frac{3v}{8} + \frac{S}{32} : \frac{3v}{16} + \frac{S}{64} : \frac{3v}{32} + \frac{S}{128} : \frac{3v}{64} +$

$+ \frac{S}{256} : \frac{3v}{128} + \frac{S}{256} : \frac{3v}{256} = \frac{S}{6v} + \frac{S}{6v} + \frac{S}{6v} + \frac{S}{6v} + \frac{S}{6v} + \frac{S}{6v} + \frac{S}{6v} + \frac{S}{6v} + \frac{S}{3v} = \frac{8}{6}\frac{S}{v} + \frac{S}{3v} = \frac{4}{3}\frac{S}{v} + \frac{1}{3}\frac{S}{v} = \frac{5}{3}\frac{S}{v}$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{5}{3}\frac{S}{v}}{S/v} = \frac{5}{3}$

Ответ: в $\frac{5}{3}$ раза

Задача 2.

$\overline{ab}$ - исходное двузначное число. $\overline{ba}$ - число после перестановки цифр.

По условию: $\overline{ba} \cdot \overline{ba} = \overline{ba}^2 = 4 \cdot \overline{ab}$; ~~$(10b+a)^2 = 4\cdot(10a+b)$~~ ~~представление двузначных чисел~~

~~$100b^2+20ba+a^2 = 40a+4b$~~ $\overline{ba} = \sqrt{4 \cdot \overline{ab}} = 2\sqrt{\overline{ab}}$. Т.к. $\overline{ba} \in \mathbb{N}$, $2\sqrt{\overline{ab}} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ т.к. все числа положительные

$\sqrt{\overline{ab}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{ab}$ - точный квадрат. Переберем все двузначные числа, которые являются точными квадратами:

$\overline{ab} = 16 \Rightarrow \overline{ba} = 2 \cdot \sqrt{16} = 8$, должно быть 61 ($a=1$, $b=6$)
$\overline{ab} = 25 \Rightarrow \overline{ba} = 2 \cdot \sqrt{25} = 10$, должно быть 52 ($a=2$, $b=5$)
$\overline{ab} = 36 \Rightarrow \overline{ba} = 2 \cdot \sqrt{36} = 12$, должно быть 63 ($a=3$, $b=6$)
$\overline{ab} = 49 \Rightarrow \overline{ba} = 2 \cdot \sqrt{49} = 14$, должно быть 94 ($a=4$, $b=9$)
$\overline{ab} = 64 \Rightarrow \overline{ba} = 2 \cdot \sqrt{64} = 16$, должно быть 46 ($a=6$, $b=4$) } не подходят
$\overline{ab} = 81 \Rightarrow \overline{ba} = 2 \cdot \sqrt{81} = 18$, должно быть 18 ($a=8$, $b=1$) → подходит (1 возможный вариант)

Ответ: Ваня мог задумать только 81

Задача 3 Чистовик

Лист 2 из 5

1) Рассмотрим число n и его упорядоченные по возрастанию делители d_i: $1 \le i \le m$ (m делителей):

$1 < d_1 < d_2 < \dots < d_m < n$ – ряд делителей

Предположим, что в разложении числа n на простые множители: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ хотя бы 2 степени α_i, α_j положительны, т.е. n делится на 2 простых числа: p_i и p_j. Не умаляя общности, пусть $p_i < p_j$. Тогда p_j стоит правее $p_i \Rightarrow$ т.к. $p_i > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p_i \ge 2$, т.к. $p_i \in \mathbb{N} \Rightarrow p_j > p_i > 1 \Rightarrow$ левый сосед p_j в ряду делителей никак не равен числу $1 \Rightarrow$ если число p_j имеет индекс s в ряду делителей, т.е. $p_j = d_s$, то $\boxed{d_{s-1} > 1}$. По условию, $d_s \vdots d_{s-1} \Rightarrow 1 < d_{s-1} < d_s$ и $d_s \vdots d_{s-1} \Leftrightarrow p_j \vdots d_{s-1}$:

$1 < d_{s-1} < p_j$. Такое невозможно, т.к. простое число вида p_j делится только на себя и на 1, но не на d_{s-1}, которое из строгости неравенств не равно 1 и не равно p_j противоречие $\Rightarrow n$ делится на не более 1 простое число. Т.К. только 1 не имеет простых делителей, $n \in [20, 90]$ имеет ровно 1 простой делитель $\Rightarrow n$ – степень простого числа

2) Представим число n в виде степени $p \in \mathbb{P}$: $n = p^\alpha$. ~~Предположим~~ Тогда $\alpha > 1$, т.к. иначе $n = p \in \mathbb{P} \Rightarrow n$ – простое (по условию, оно должно быть составным). Предположим, что существует $n = p^\alpha \in [20, 90]$ такое, что $p \ge 11$. Т.к $\alpha \in \mathbb{N}$: $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \ge 2 \Rightarrow n \ge 11^2 = 121$ – не входит в наш диапазон $\Rightarrow p < 11$. Ближайшее меньшее 11 простое число: это 7. Поэтому нужно перебрать ~~все~~ простые числа из $\{2, 3, 5, 7\}$:

1) $p = 2$. $\{2^2, 2^3, 2^4\} \notin [20, 90] \Rightarrow \underline{\alpha \ge 5}$. При $\alpha \ge 7$ $n = p^\alpha \ge 2^7 = 128 \notin [20, 90]$, противоречие, $\Rightarrow \underline{\alpha \le 6}$

$\Rightarrow$ подходят только числа $2^6 = 64$: $1 < 2 < 4 < 8 < 16 < 32 < 64$ и $2^5 = 32$: $1 < 2 < 4 < 8 < 16 < 32$ } подходят

2) $p = 3$. $3^2 \notin [20, 90] \Rightarrow \underline{\alpha \ge 3}$. При $\alpha \ge 5$ $n = p^\alpha \ge 3^5 = 243 \notin [20, 90]$, противоречие $\Rightarrow \underline{\alpha \le 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходят только числа $3^3 = 27$: $1 < 3 < 9 < 27$ и $3^4 = 81$: $1 < 3 < 9 < 27 < 81$ } подходят

3) $p = 5$. $\underline{\alpha \ge 2}$. При $\alpha \ge 3$: $n = p^\alpha \ge 5^3 = 125 \notin [20, 90]$, противоречие $\Rightarrow \underline{\alpha \le 2} \Rightarrow \alpha = 2$

$\Rightarrow$ подходит только число $5^2 = 25$. $1 < 5 < 25$ – подходит

4) $p = 7$. $\underline{\alpha \ge 2}$. При $\alpha \ge 3$: $n = p^\alpha \ge 7^3 = 343 \notin [20, 90]$, противоречие $\Rightarrow \underline{\alpha \le 2} \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходит только число $7^2 = 49$: $1 < 7 < 49$ – подходит

Подходят числа $\{64, 25, 27, 32, 49, 81\}$

Ответ: 64, 25, 27, 32, 49, 81

Задача 4. Чистовик лист 3 из 5

$(x+1)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+\ldots+(x+2021)^2=x^2+(x-2)^2+(x-4)^2+\ldots+(x-2020)^2$

$[(x+1)^2-x^2]+[(x+3)^2-(x-2)^2]+[(x+5)^2-(x-4)^2]+\ldots+[(x+2021)^2-(x-2020)^2]=0$

В каждой скобке записано число вида $[x+(2k+1)]^2-(x-2k)^2$, где $0\le k\le 1010$;

$[x+(2k+1)]^2-(x-2k)=[x+(2k+1)-(x-2k)][x+(2k+1)+(x-2k]=(x+2k+1-x+2k)(x+2k+1+x-2k)=(4k+1)(2x+1)$ В каждой скобке x постоянно, значит $2x+1$ постоянно

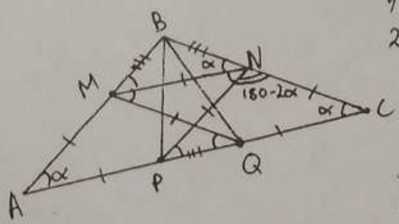
$\sum_{k=0}^{1010}((4k+1)(2x+1))=(2x+1)\cdot\sum_{k=0}^{1010}(4k+1)=(2x+1)[(4\cdot0+1)+(4\cdot1+1)+\ldots+(4\cdot1010+1)]=$

$=(2x+1)\cdot[4\cdot0+4\cdot1+4\cdot2+\ldots+4\cdot1010+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{1011}]=(2x+1)[4\cdot(0+1+\ldots+1010)+1011]=0$

Видим, что т.к. сумма ~~неотрицательных~~ $(0+1+\ldots+1010)=(1+\ldots+1010)$ является суммой положительных чисел, она положительна $\Rightarrow 4\cdot(1+\ldots+1010)>0\Rightarrow 4\cdot(1+\ldots+1010)+1>0\Rightarrow$ на этот множитель можно сократить и получить $(2x+1)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ - единственное решение.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$

Задача 5.



1) ΔABC р/б (равнобедренный) $\Rightarrow\angle BAC=\angle BCA$. Пусть $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$

2) $\angle MAC=\angle NCA$; $AM=NC\Rightarrow ACNM$ - равнобокая трапеция $\Rightarrow MN\parallel AC\Rightarrow\angle BNM=\angle BCA=\alpha$

$\angle BMN=\angle BAC=\alpha$

3) $BA\parallel NP\Rightarrow\angle BAC=\angle NPC=\alpha$

4) $BC\parallel MQ\Rightarrow\angle BCA=\angle MQA=\alpha$

5) ΔAMQ р/б $\Rightarrow AM=MQ$; ΔPNC р/б $\Rightarrow PN=NC\Rightarrow\angle PNC=180-2\alpha$

$\angle AMQ=180-2\alpha$

6) $\angle AMQ=\angle PNC=180-2\alpha\Rightarrow\Delta AMQ=\Delta PNC$ по 2м сторонам и углу между ними

7) $AMNP$ параллелограмм ($AM\parallel NP$; $MN\parallel AP$) $\Rightarrow MN=AP$

8) $CNMQ$ параллелограмм ($MN\parallel QC$; $MQ\parallel NC$) $\Rightarrow MN=CQ$

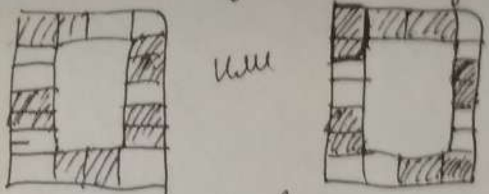
9) BMN р/б $\Rightarrow BM=BN=PQ$.

10) ΔABQ р/б $\Rightarrow\angle ABQ=\angle AQB\Rightarrow\angle ABQ=\boxed{\angle MBQ=\frac{180-\alpha}{2}=90-\frac{\alpha}{2}}$

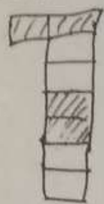
11) $\angle MNP=180-(180-2\alpha)-\alpha=\alpha$. Аналогично $\angle NMQ=\alpha$

Заметим, что 2 состоит из 13, 0 – из 18, 1 – из 8 клеток. Поэтому для каждой 2 понадобится хотя бы одна плитка 1×1

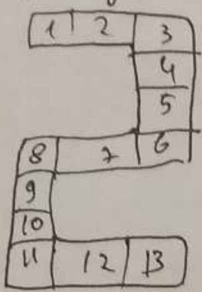
Если выкладывать 0 одними 1×2, то будет 2 способа



Для 1 есть ровно 1 способ выложить одними 1×2:



Выложить 2 одним 1×1 и остальными – 1×2 есть 7 способов (каждая нечетная позиция занимается 1×1):



Черновик

$1: v;\ 2: \frac{1}{2}s: 3v;\ \frac{1}{4}s: \frac{3}{2}v;\ \frac{1}{}$

$(10b+a)^2 = 4(10a+b)$

$10b+a = 2\cdot\sqrt{10a+b} \Rightarrow 10a+b$ – квадрат

16	25	36	49	64	81
8	10	12	14	16	18

$1 < d_1 < d_2 < d_3 \ldots < d_k < n$

Ǝ есть 2 простых: одно не рядом с $d_1 \Rightarrow$ делится на $d_{k+1} > d_m > 1$ (⚡)

$\Rightarrow$ 1 простое, и числа – степени простых

$(x+2k+1)^2 - (x-2k)^2 =$

$= (\cancel{x}+2k+1-\cancel{x}+2k)(x+\cancel{2k}+1+x-\cancel{2k}) =$

$= (4k+1)(2x+1)$

200

66,67

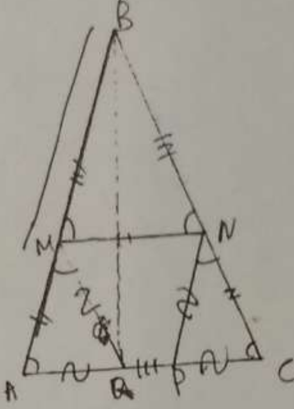
$(x+3)^2 - (x-2)^2 = 5\cdot(2x+1)$

$\sum_{k=1}^{2}(k\cdot 2) = 2\cdot\sum_{k=1}^{2}(k) = 6$

1·2

2·2

MN || AC



BC || MQ

⇓

$\angle AMQ = \angle BCA$

MN || AC

2 – 1

MN || AC

2 – 1