МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Васильева Анна Юрьевна**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	0	15	0

Задача 2 Чистовик Вариант 210102 1

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-9| = 4 \quad (1) \\ \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 2 \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ 2-ого уравнения:

ОДЗ: $x^2-y-16 \geq 0$

$x^2-y \geq 16 \Rightarrow \sqrt{x^2-y} \geq 4$

Следовательно, получаем:

$\sqrt{x^2-y} + |y-9| \geq 4 + |y-9| = 4$

$|y-9|$ - неотрицательное число, а значит, $|y-9|$ равно 0 $y=9$.

Если подставить в 1-ое уравнение, то мы получаем:

$\sqrt{x^2-9} = 4$

$x^2 = 16+9$

$x^2 = 25, \quad x = \pm 5$

теперь проверим 2ое уравнение:

при $x=-5$, $\Rightarrow \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 8 \Rightarrow$ не подходит

при $x=5$, $\rightarrow \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 2$ - подходит

Ответ: $x=5$; $y=9$

Задача 1. Чистовик

Разложим нашу сумму на четыре ~~разности~~ разных: 5 ; $4N$, $-6N^2$, $+4N^3$

и теперь посчитаем их отдельно

1 сумма: $13 \cdot 13 = 169$

2 сумма: $4 \cdot (1+2+3+\ldots+13) = 4 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} = 2 \cdot 13 \cdot 14 =$

$= 364$ (применили формулу $1+2+\ldots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$)

3 сумма: $-6 \cdot (1^2+2^2+\ldots+13^2) = -6 \cdot \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} =$

$= -4914$ (по формуле $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$)

а теперь попробуем найти формулу для $1^3+2^3+\ldots+n^3$ — это многочлен от n^4

Если составить табличку для небольших n, получаются квадраты сумм первых степеней, то есть формула должна быть $\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}$ теперь докажем, что формула работает (по индукции)

Для $n=1$ — подходит

теперь рассмотрим разность $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{(n^2(n+1)^2)}{4} =$

$= \frac{(n+1)^2(4n+4)}{4} = (n+1)^3$ из этого следует

Задача 1 Чистовик 3

Что сумма каждый раз увеличивается $(n+1)^3$ и формула работает.

$4 \cdot (1^3 + 2^3 + \ldots + 13^3) = 13^2(14)^2 = 33124$

$1 \Rightarrow 169 + 364 - 4914 + 33124 = 28743$

Задача 3

Эт 2 Уравнения – квадратные,
пусть x_1 и x_2 – корни 1ого уравнения,
x_3 и x_4 – корни 2-ого

1г) по т. Виета:

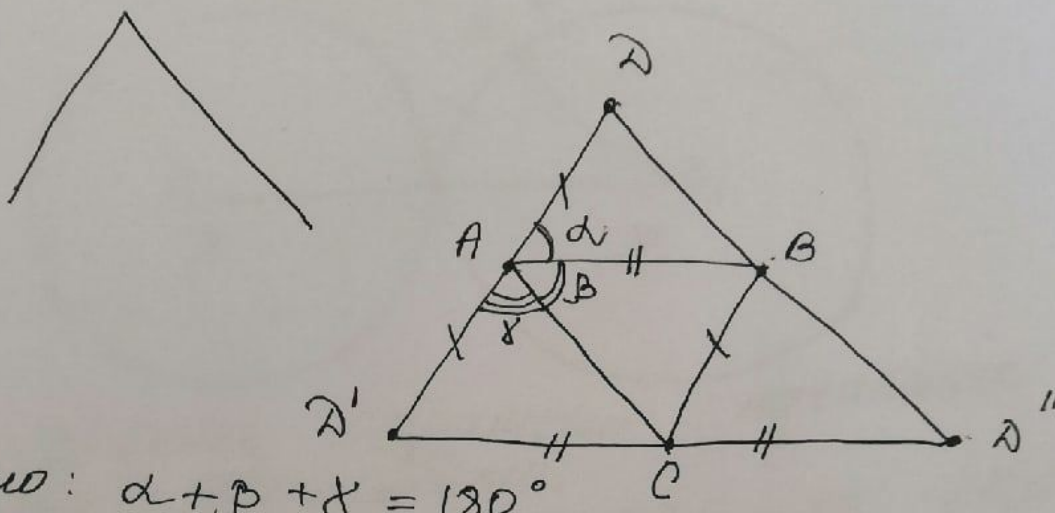
$$\begin{cases} a = x_1 \cdot x_2 \\ a+1 = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Отсюда можем заметить, что произведение 1-ой и 2ой пары корней имеют разную четность и так как эти числа различные $x_1 \neq x_2$, $x_3 \neq x_4$ и каждое из них больше одного, то найдем минимальное произведение 2ух различных целых чисел, больших одного.
получаем произведение 3 и 5 (все предыдущие чётные), тогда чтобы $a \to \min$ было минимальным а), то
$x_1 \cdot x_2 = 14$, то есть $x_1 = 2$; $x_2 = 7$ или наоборот,
и $x_3 \cdot x_4 = 15$, то есть $3x = 3$, $4x = 5$
или наоборот
получаем: $(x-2)\cdot(x-7) = x^2 - 9x + 14 =$
$= x^2 - 9x + 15 - 1$
$(x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15$

Ответ: 15

Задача 6 Чистовик 5

Разложим пирамиду на плоскости:



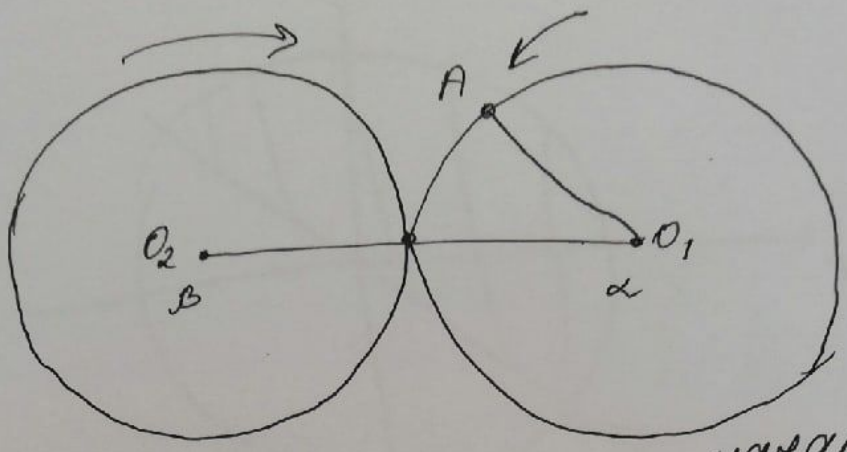
Нам дано: $\alpha+\beta+\gamma=180°$

А лежит на прямой DD', $BD=BD''$, $AD'=AD=BC$, $AB=CD'=CD''$, а это значит $ABCD'$ – параллелограмм, след-но $DD' \parallel BC$, сл-но $\angle BAD=\angle ABC$ (=>) $\triangle ADB=\triangle BCA$ (=>), а следов-но $BD=AC=BD''$,

Можем заметить, что у нас получилось четыре равных треугольника (по трем сторонам). Следовательно. площадь ABC $\frac{S}{4}$

Ответ: $\frac{S}{4}$

Задача 4



1) На рисунке отражено начальное положение автомобилей.
т.к. $AO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2$, то $\angle AO_1O_2 = 60°$; $\angle AO_2O_1 = 30°$

2) Введем координаты через O_2;
$(x_1; y_1)$ – первый автомобиль
$(x_2; y_2)$ – второй автомобиль

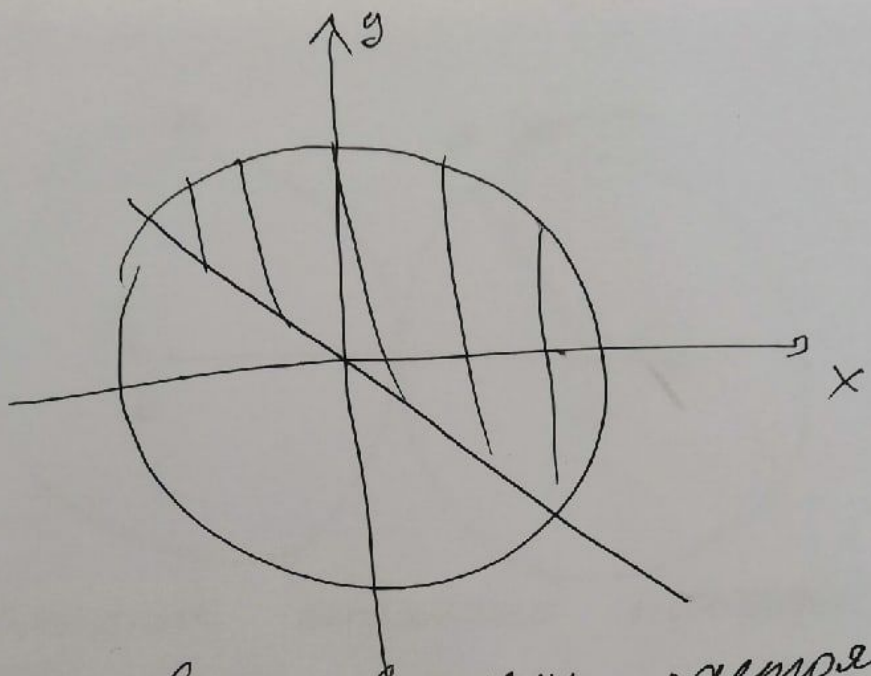
$\cos\left(\frac{\pi}{6} - wt\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{6} - wt\right)$,
$2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + wt\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + wt\right)$

3) $d^2 \leq \left(\left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + w \cdot t\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - wt\right)\right)^2 +$
$+ \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3} + wt\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - wt\right)\right)^2$

$4^2 \leq \sin wt + \cos wt + 4$
$\sin wt \geq -\cos wt$

Задача 4

Человек 7

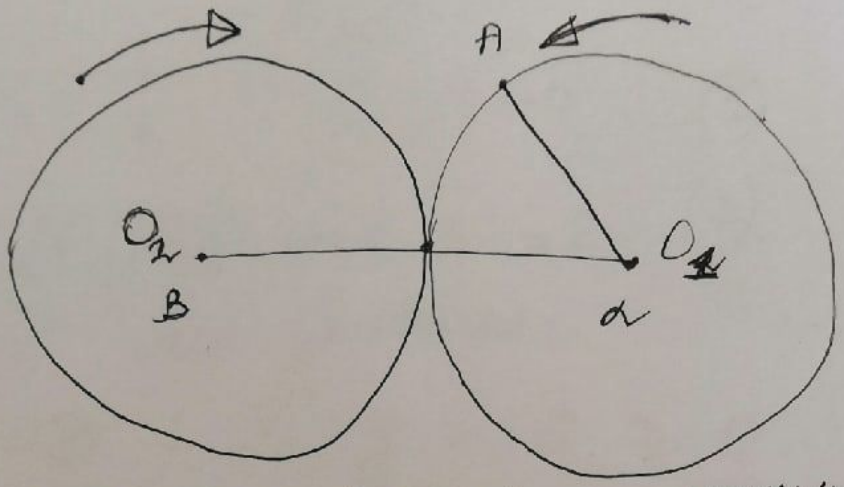


Значит, половину времени расстояние будет меньше диаметра

Ответ : 15 минут

~~Чистовик~~ Черновик 8

Задача 4.



1) На рисунке отмечено начальное положение автомобилей

т.к. $AO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2$, то $\angle AO_1O_2 = 60°$

$\angle AO_2O_1 = 30°$

2) Введем координаты ц O_2;

$(x_1 \quad y_1)$ – 1-ый автомобиль

$(x_2 \quad y_2)$ – 2-ой автомобиль

$\cos\left(\frac{\pi}{6} - w \cdot t\right)$

$\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right) - W \cdot t\right)\right), \sin\left(\frac{\pi}{6} - W \cdot t\right)$

$2 + \cos\left(2\frac{\pi}{3} + w \cdot t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3} + w \cdot t\right)$

3) $d^2 \leq \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + wt\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - wt\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3} + wt\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - wt\right)\right)^2$

$4^2 \leq \sin wt + \cos wt + 4 \quad \sin wt + \cos wt + 4$

$\sin wt \geq -\cos wt$

~~Чистовик~~

Вариант 210102

Черновик

2.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-9| = 4 & (1) \\ \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 2 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ 2ого уравнения:

ОДЗ: $x^2-y-16 \geq 0$

$x^2-y \geq 16 \mid \Rightarrow \sqrt{x^2-y} \geq 4$

Следовательно, получаем:

$\sqrt{x^2-y} + |y-9| \geq 4 + |y-9| = 4$

$|y-9|$ – неотрицательное число, а значит, $|y-9|$ равно 0 $y=9$.

Если подставить в 1ое уравнение, то мы получим:

$\sqrt{x^2-9} = 4$

$x^2 = 16+9$

$x^2 = 25$; $x = \pm 5$

Теперь проверим 2ое уравнение:

при $x=-5$, $\Rightarrow \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 8 \mid \Rightarrow$ не подходит

при $x=5$, $\rightarrow \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 2$ – подходит

Ответ: $x=5$; $y=9$