МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Владимиров Дмитрий Андреевич**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	15	15

Чистовик

Вариант 210202

1) $f(x) = x^2 + 10x + 20$

$f(f(f(f(f(x))))) = 0$

$\;\;1\;\;\;2\;\;\;3\;\;\;4\;\;\;5$

$f(x) = a$

$f(f(x)) = b = f(a)$

$f(f(f(x))) = c = f(b)$

$f(f(f(f(x)))) = d = f(c)$

$f(d) = 0; \quad d^2 + 10d + 20 = 0$

$D = 100 - 80 = (2\sqrt{5})^2$

$d = \left[\begin{array}{l} -5-\sqrt{5} \\ -5+\sqrt{5} \end{array}\right.$

~~$f(c) = 0$~~

$\left[\begin{array}{l} f(c) = -5-\sqrt{5} \\ f(c) = -5+\sqrt{5} \end{array}\right.$

1) $c^2 + 10c + 25 - \sqrt{5} = 0$

$D = 4\sqrt{5}$

$c = -5 \pm \sqrt[4]{5}$

2) $c^2 + 10c + 25 + \sqrt{5} = 0$

$D < 0 \Rightarrow c = \varnothing$

$\left[\begin{array}{l} f(b) = -5+\sqrt[4]{5} \\ f(b) = -5-\sqrt[4]{5} \end{array}\right.$

1) $b^2 + 10b + 25 - \sqrt[4]{5} = 0$

$D = 4\sqrt[4]{5}$

$b = -5 \pm \sqrt[8]{5}$

2) $b^2 + 10b + 25 + \sqrt[4]{5} = 0$

$D < 0 \Rightarrow b = \varnothing$

$\left[\begin{array}{l} f(a) = -5+\sqrt[8]{5} \\ f(a) = -5-\sqrt[8]{5} \end{array}\right.$

1) $a^2 + 10a + 25 - \sqrt[8]{5} = 0$

$D = 4\sqrt[8]{5}$

$a = -5 \pm \sqrt[16]{5}$

2) $a^2 + 10a + 25 + \sqrt[8]{5} = 0$

$D < 0 \Rightarrow a = \varnothing$

$\left[\begin{array}{l} f(x) = -5+\sqrt[16]{5} \\ f(x) = -5-\sqrt[16]{5} \end{array}\right.$

1) $x^2 + 10x + 25 - \sqrt[16]{5} = 0$

$D = 4\sqrt[16]{5}$

$x = -5 \pm \sqrt[32]{5}$

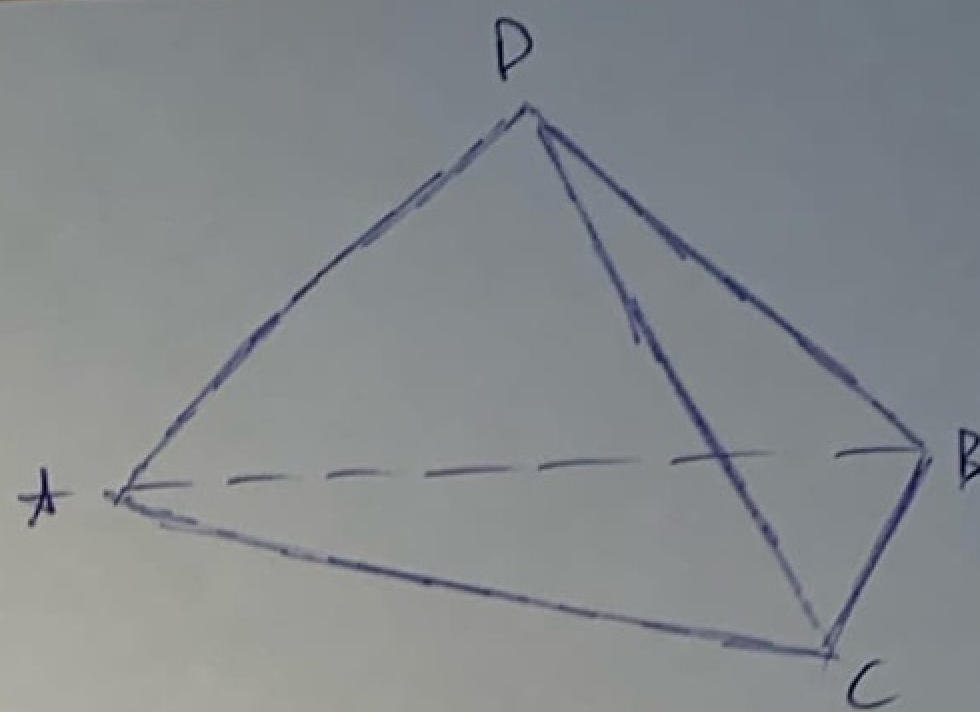
2) $x^2 + 10x + 25 + \sqrt[16]{5} = 0$

$D < 0 \Rightarrow a = \varnothing$

Ответ: $x = -5 + \sqrt[32]{5}$; $x = -5 - \sqrt[32]{5}$

Черновик

(6)



$\angle DAB + \angle DAC + \angle BAC =$

$= \angle DBA + \angle DBC + \angle ABC$

$\angle ADC + \angle BDC + \angle ADB =$

$= \angle ACD + \angle BCD + \angle ACB$

$S_{ABC} + S_{ACD} = S$

$\angle BDC = \angle ACD + \angle BCD + \angle ACB - \angle ADB - \angle ADC$

$\angle DAB = \angle DBA + \angle DBC + \angle ABC - \angle BAD - \angle DAC$

(7)

$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$

$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$

2022 | 2
1011 | 3
337 | 337
1

1011 | 3
337

2024 | 4
506 | 2
253 | 11
23 | 23

253 | 11
23

2022
2024 T
2023 K

2022
2022 2023

2023 2024
2022 2022

2021 2022

....

44
43 K

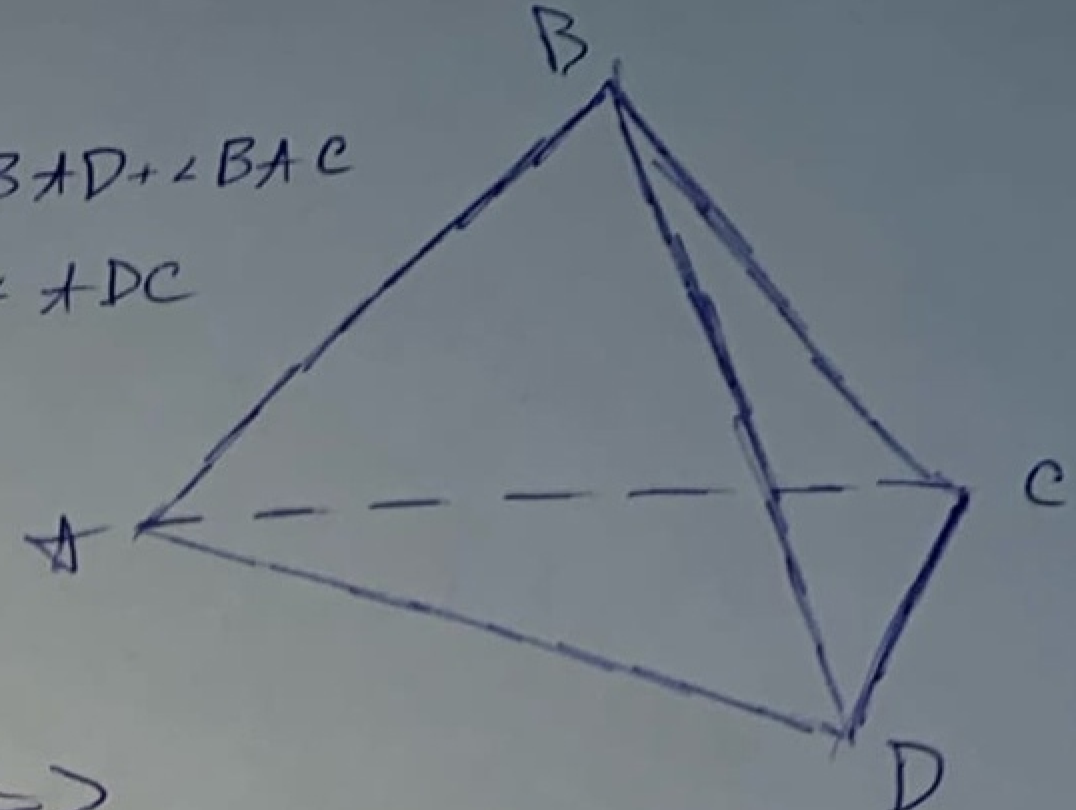
42
33

22
32

(4, 3)
(4, 2)
(3, 3)
1, 4
1, 3
1, 2

5

Черновик



Дано:

$\angle ABC + \angle DBC + \angle ABD = \angle CAD + \angle BAD + \angle BAC$

$\angle BCD + \angle ACD + \angle ACB = \angle BDC + \angle ADB + \angle ADC$

$S_{ABC} + S_{ACD} = S$

Найти: S_{ABCD}

Решение:

$\angle CBD + \angle CDB + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow$

$\cancel{= \angle CAD + \angle BAD + \angle BAC - \angle ABC - \angle ABD +}$

$\cancel{+ \angle BCD + \angle ACD + \angle ACD - \angle ADB - \angle ADC}$

$\cancel{+ \angle BDC + \angle ADB + \angle ADC - \angle ACD - \angle ACB}$

$\cancel{\angle BDC = 180^\circ - \angle CBD - \angle BCD =}$

$\cancel{= 180^\circ - \angle CAD - \angle BAD - \angle BAC + \angle ABD + \angle ABC +}$

$- \angle BDC - \angle ADB - \angle ADC + \angle ACD + \angle ACB$

$\angle CBD = 180^\circ - \angle CDB - \angle BCD =$

$= 180^\circ - \angle BCD - \cancel{\angle ACD} - \cancel{\angle ACB} + \cancel{\angle ADB} + \cancel{\angle ADC} - \angle BDC - \cancel{\angle ADB} - \cancel{\angle ADC}$
$+ \cancel{\angle ACD} + \cancel{\angle ACB}$

$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$

$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$

2022, 2022

2021, 2024

$m \cdot x$ $\quad$ $m \cdot x$

$m \cdot (x-1)$ и $m \cdot x$ всё равно имеют общий делитель m

$m(x-1)$ $\quad$ $m(x-1)$

0;

Чистовик

② $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=$

$=|\sqrt{x-1}+1|$

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|$

$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots \Rightarrow x\to 2$, но $\underset{\sqrt{x-1}<1}{x<2} \Rightarrow$

тогда $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=$

$=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2$

Ответ: 2

③ $\begin{cases}-1+A-B+C-D+E=8\\ 1+A+B+C+D+E=22\end{cases}$ $\begin{cases}A+C+E-B-D=9\\ A+C+E+B+D=21\end{cases}$ −

$2B+2D=12 \Rightarrow B+D=6 \Rightarrow A+C+E=15$

A, B, C, D, E – целые положительные, тогда рассмотрим все возможные комбинации

1. $B+D=6$

B	D
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

5 вариантов

2. $A+C+E=15$

A	C	E
13	1	1
12	2	1
	1	2
11	3	1
	2	2
	1	3
10	4	1
	3	2
	2	3
	1	4

A	C	E
9	5	1
	4	2
	3	3
	2	4
	1	5
8	6	1
	5	2
	4	3
	3	4
	2	5
	1	6

...

Всего $1+2+\ldots+13$

$=\frac{1+13}{2}\cdot 13=7\cdot 13=91$

вариант

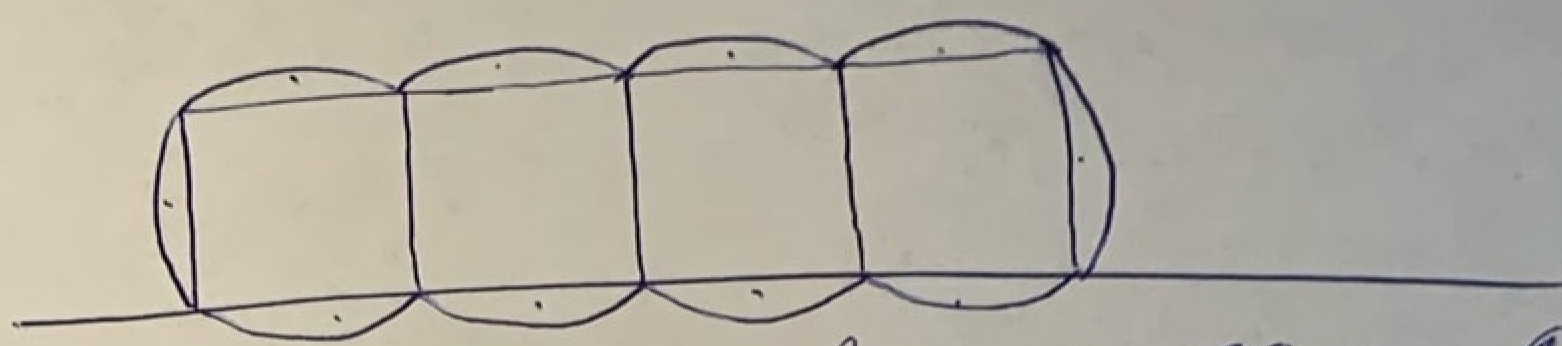
Чистовик

Выбор букв B и D не зависит от A, C и E, как и наоборот $\Rightarrow$ всего вариантов $5 \cdot 91 = 455$

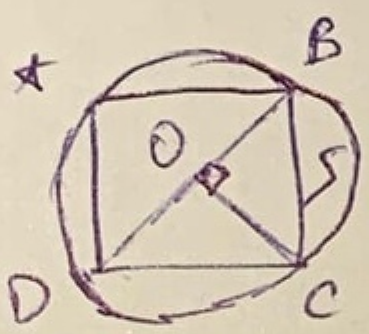
Ответ: 455

5

1.



испачканный получится вот такая фигура, так как при каждом повороте квадрат будет рисовать описанную вокруг него окружность



$DC = 1$ (по условию) $\Rightarrow BD = \sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

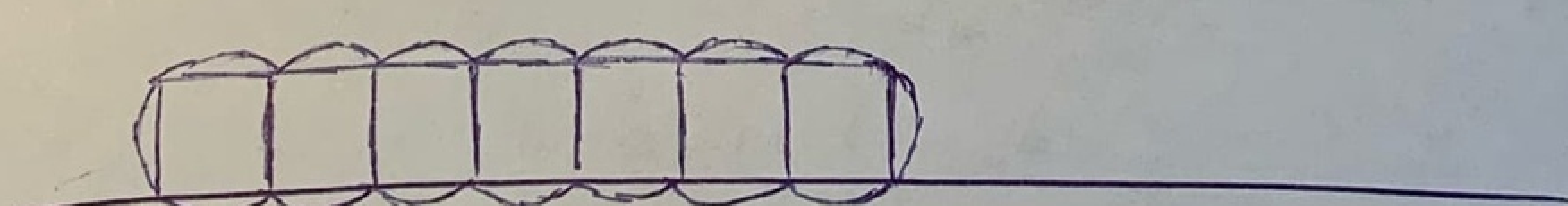
Найдём площадь сегмента S

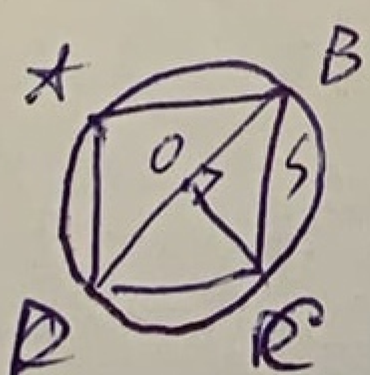
$$S = \frac{1}{4} S_{окр} - S_{OBC} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \underset{1}{\underbrace{\sin 90^\circ}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}$$

Всего в первом случае 10 таких сегментов и 4 квадрата $\Rightarrow S_1 = 4 + \frac{5}{4}\pi - 2{,}5 = 1{,}5 + 1{,}25\pi$

2.





$BC = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$ $\quad AB = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S = \frac{1}{4} S_{окр} - S_{OBC} = \frac{1}{16}\pi - \frac{1}{8}$

Всего во втором случае 16 сегментов и 7 квадратов, то есть $S_2 = \pi - 2 + 3{,}5 =$
$= \pi + 1{,}5$

Искомая разность: $S_1 - S_2 = 1{,}5 + 1{,}25\pi - 1{,}5 - \pi = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Чистовик

(7) $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$
$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$

Таня может обеспечить себе победу независимо от ходов Коли.
Своим первым ходом Таня должна взять из второй кучи два камня и оставить позицию (2022, 2022), после чего всегда делать ходы, симметричные ходам Коли, то есть вытаскивать столько же камней, но из другой кучи. Докажем, что у неё всегда получится так сделать.
Есть 2 равных числа. Допустим, $(m \cdot n \cdot x, m \cdot n \cdot x)$ и Коля вытаскивает из 1-ой кучи m камней, тогда остаётся позиция $(m \cdot (n \cdot x - 1), m \cdot n \cdot x)$. Как видим, обе этих кучи делятся на m, тогда Таня в любом случае сможет достать m камней из второй кучи. В конце же Коля будет вынужден забрать все оставшиеся камни из какой-либо кучи, тогда Таня заберёт все остальные, т.к. 0 можно поделить на любое отличное от него число $\Rightarrow$ Таня выиграет

Ответ: Таня

Чистовик

⑥ Суммы плоских углов при вершинах A и B, C и D равны, а значит пирамида ABCD симметрична относительно рёбер AB и CD и ~~высот~~, ~~проведённых~~ биссектрис, проведённых на противоположное основание, что возможно только в случае равенства $\triangle BCD = \triangle ACD$; $\triangle BDA = \triangle BCA$, тогда если $S_{ABC} + S_{ACD} = S$, то и $S_{ABD} + S_{BCD} = S$

$\Rightarrow S_{общ} = 2S$

Ответ: $2S$

Черновик

① $f(f(f(f(f(x))))) = 0$

1) $x^2+10x+20=0$

$D=100-80=(2\sqrt{5})^2$

$x=\frac{-10\pm2\sqrt{5}}{2}=-5\pm\sqrt{5}$

2) $\left[\begin{array}{l} f(f(f(f(x))))=-5+\sqrt{5} \\ f(f(f(f(x))))=-5-\sqrt{5} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2+10x+20+5-\sqrt{5}=0 \\ x^2+10x+20+5+\sqrt{5}=0 \end{array}\right.$

1. $x^2+10x+25-\sqrt{5}=0$

$D=100-100+4\sqrt{5}=4\sqrt{5}=2\sqrt[4]{5}$

$x=\frac{-10\pm2\sqrt[4]{5}}{2}=-5\pm\sqrt[4]{5}$

2. $x^2+10x+25+\sqrt{5}=0$

$D=100-100-4\sqrt{5}<0 \to x=\varnothing$

3) $\left[\begin{array}{l} f(f(f(x)))=-5+\sqrt[4]{5} \\ f(f(f(x)))=-5-\sqrt[4]{5} \end{array}\right.$

1 $x^2+10x+25-\sqrt[4]{5}=0$

$D=4\sqrt[4]{5}$

$x=\frac{-10\pm2\sqrt[8]{5}}{2}=-5\pm\sqrt[8]{5}$

4) $f(f(x))=-5\pm\sqrt[16]{5}$

5) $f(x)=-5\pm\sqrt[32]{5}$

$x=-5\pm\sqrt[64]{5}$

1

Черновик

③ $\begin{cases} -1 + A - B + C - D + E = 8 \\ 1 + A + B + C + D + E = 22 \end{cases}$

$\begin{cases} A - B + C - D + E = 9 \\ A + B + C + D + E = 21 \end{cases}$ −

$2B + 2D = 12$

$\begin{cases} B + D = 6 \\ A + C + E = 15 \end{cases}$ ⇒ необходимо рассмотреть все комбинации, учитывая что A, B, C, D и E – целые положительные числа

1. $B + D = 6$

B	D
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

⇒ 5 вариантов

2. $A + C + E = 15$

A	C	E
13	1	1
12	2	1
	1	2
11	3	1
	2	2
	1	3
10	4	1
	3	2
	2	3
	1	4
9	5	1
	4	2
	3	3
	2	4
	1	5
8	6	1
	5	2
	4	3
	3	4
	2	5
	1	6
7	7	1
	6	2
	5	3
	4	4
	3	5
	2	6
	1	7
6		

...

2

~~Всего~~ вариант. в этом пункте $1 + 2 + 3 + ... + 13 =$

$\frac{13+1}{2} \cdot 13 = 91$ ⇒

всего $5 \cdot 91 = 455$

Черновик

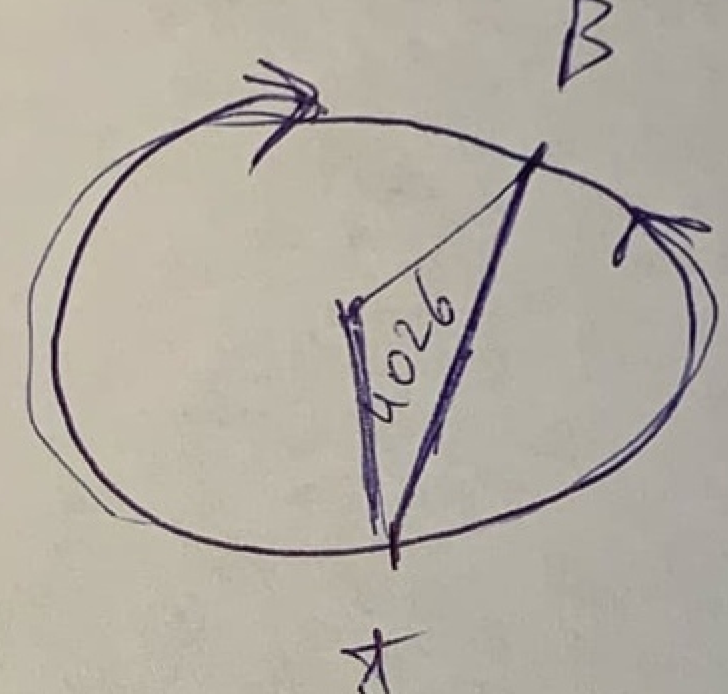
③ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = |\sqrt{x-1}+1|$

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}-1|$

$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \Rightarrow x \longrightarrow 2$, но $x < 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} < 1$

$\sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = 2$

④

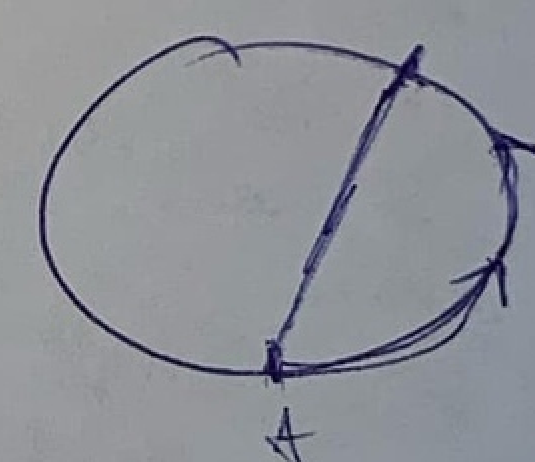


S – длина окружности

$v_1 = 36 \frac{мин}{круг}$

$(v_1 + v_2) \cdot t_1 = 4026$

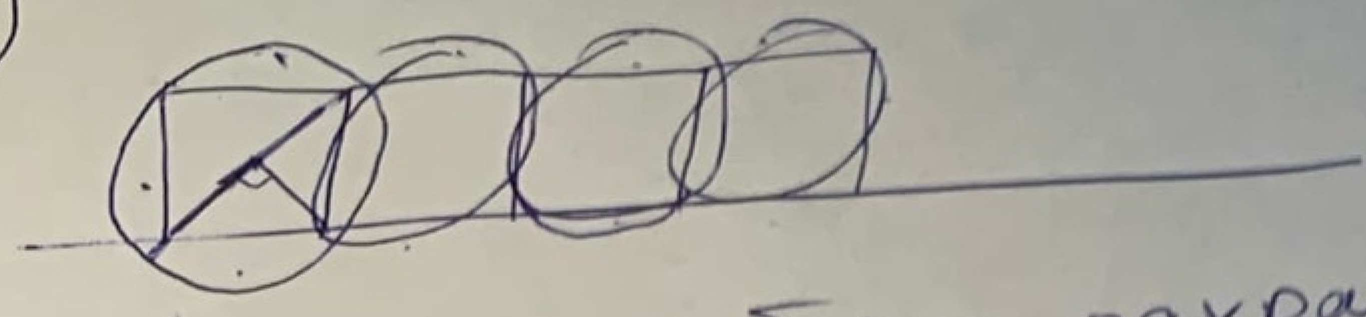
$(v_1 - v_2) \cdot t_2 = 4026$



$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}$$

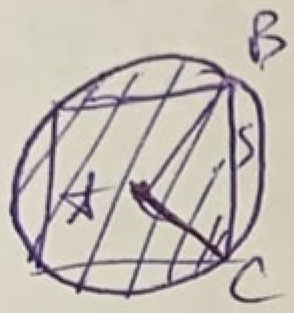
Черновик

5 1)



$\frac{1}{\sqrt{2}}$

каждый раз закрашивалась часть окружности с радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в крайних поворотах (1-ой и последний)

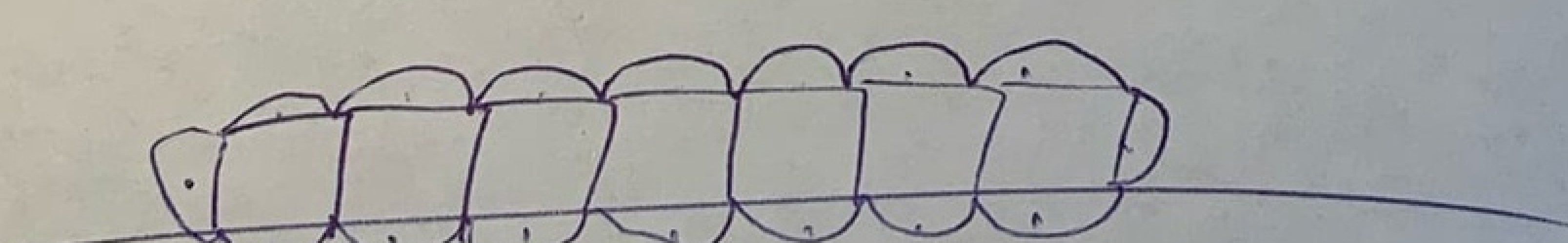


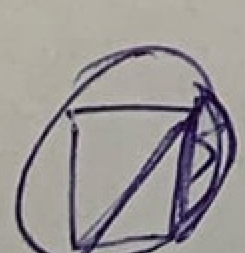
найдём площадь сегмента S

$$= S_{окр}\cdot\frac{1}{4} - S_{ABC} = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sin 90^\circ}_{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}$$

Всего таких сегментов будет закрашено 10 $\Rightarrow \frac{5}{4}\pi - \frac{10}{4}$ также будут закрашены сами эти 4 квадрата, то есть $S_1 = \frac{5}{4}\pi - \frac{10}{4} + 4 = \frac{5}{4}\pi + 1,5$

2)





$r = \frac{1}{2}$, т.к. диагональ = 1 по условию

тогда площадь сегмента $S = S_{окр}\cdot\frac{1}{4} - S_{ABC} =$

$$= \pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sin 90}_{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}\pi - \frac{1}{8}$$

$16 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{8}\cdot 16 + \left(\frac{1}{16}\pi - \frac{1}{8}\right)\cdot 16 = \pi$

+ Ещё 7 таких □ 4

$\frac{5}{4}\pi + 1,5 - \pi = \underline{\frac{\pi}{4} + 1,5}$