МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Высоцкая Анастасия Евгеньевна**

Класс: **11**

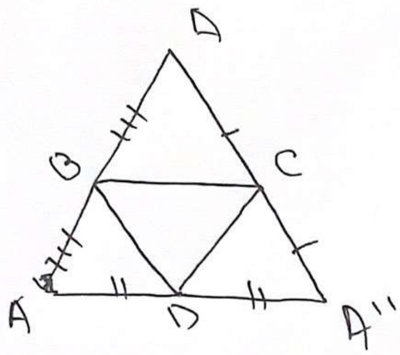
Технический балл: **65**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	0	15	15	15	5	15	0

(6) Задание №6 чистовик



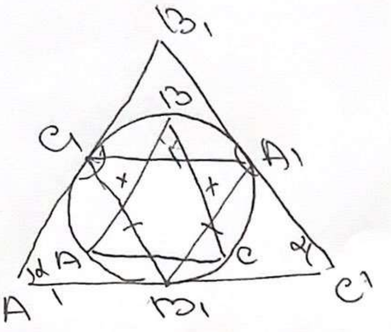
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $AB = CD = A'B$; $A'D = BC = A''D$, при этом $AC = A''C$, значит $\Delta ABC = \Delta CDA''$ – по $3^м$ сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$, $\angle ACB = \angle CA''D = \gamma$, следовательно $\angle ABC = \angle CDA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$, значит $\Delta BA'D = \Delta ABC$ – по $2^м$ сторонам и углу между ними, а $\Delta BCD = \Delta DA'B$ – по $3^м$ сторонам, следовательно и грани равны =>

=> $S_{поверхн} = 4S$

Ответ: $S = 4S$

(5) №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{x} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A'C_1}{C_1B_1} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\frac{B'C_1}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \frac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2 - 2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

т.к $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{2 - 2t} = k(t)$ $\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2(1-t)^2} = -\frac{1}{2t^2} +$ т.к $2 - 4t < 0$

$+ \frac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow$ $\min(k)$ при $t = \frac{1}{2}$

$\max(x)$ при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$; max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

④ Задача 3 чистовик

Оба уравнения - квадратные, тогда пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения; x_3, x_4 - корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик

вариант 210103

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо

$x^2+y-1 \geq 0.$

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3; y=-8$

1 №4 чистовик.

Пусть трассы-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему, связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Направим ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right); \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины ~~В~~ B по трассе β

$$B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Но т.к центр трассы β находится на расстояние 2 от центра O, то в системе отчета, связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = \left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2~~ ~~2$\sqrt{}$~~ $x \geq 2$

(2) №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2\leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt3}{2}\sin x-\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt3}{2}\sin x\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt3+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2\leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x=T$

$$\left(2-\frac{\sqrt3+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}T\right)^2\leq 4$$

$$4-2(\sqrt3+1)T+\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)^2T^2\leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt3+1)T\leq 0$$

$$T(T-(\sqrt3+1))\leq 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x\leq\sqrt2\leq\sqrt3+1$, т.к сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt3+1)<0$ всегда

Остается:

$T\leq 0$

$\sin x-\cos x\leq 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

$y = -8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$x_1 = -3$

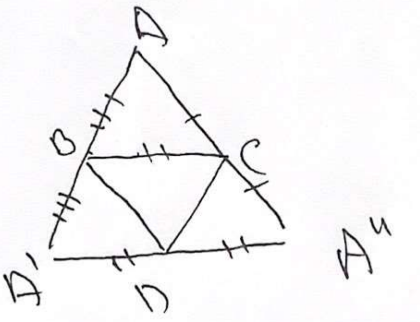
$\underbrace{9-8-1}_{0} + \underbrace{|-3+8|}_{5} = 5$

$\cancel{x_2 = 3}$

$\underbrace{9-8-1}_{0}$ $\quad \underbrace{3+8}_{11} = 11$

№6 черновик

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



$A'D = A''D = BC$

$AC = A''C$

$\triangle ABC = \triangle CDA''$ – по 3 сторонам

$\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$

$\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$

$\angle ABC = \angle DA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$

$\triangle BA'D = \triangle ABC$ – по 2м сторонам и углу между ними

$\triangle BCD = \triangle DA'B$ – по 3м сторонам

$S = 4S$

черновик

$f(1)+f(2)+f(3)+\dots f(12)$, если $f(n) = 2n(2n^2-3n+2)+7$

$= 4n^3-6n^2+4n+7$

$f(1) = 4-6+4+7 = 11-6+4 = 15-6 = 9$

$f(2) = 32-24+8+7 = 23$

$f(3) = 108-54+12+7 = 73$

$f(12) = 6912-864+48+7 =$

$= 5993$

$f(4) = 256-96+16+7 = 137$

$f(5) = 500-110+20+7 =$

$= 417$

$f(6) = 864-216+24+7 =$

$= 679$

$f(7) = 1372-294+28+7 =$

$= 1113$

$f(8) = 2048-384+32+7 = 1664+32+7 =$

$= 1703$

$f(9) = 2916-486+36+7 = 2473$

$f(10) = 4000-600+40+7 = 3400 = 3447$

$f(11) = 5324-726+44+7 = 4598+44+7 = 4649$

черновик

№1 $9+23+73+137+467+679+1113+1703+2473+$

$+3447+4649+5993=105+1233+5289+14089=$

$=1338+19378=$

$=20716$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 23 \\ 9 \\ \hline 105 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1113 \\ 1703 \\ 2473 \\ \hline 5289 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3447 \\ 4649 \\ 5993 \\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 467 \\ 679 \\ \hline 1233 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1233 \\ 105 \\ \hline 1338 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{5278} \\ 14089 \\ 5289 \\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378 \\ 1338 \\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y + 8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad +y+8 = 1$

О.Д.З

$$\begin{cases} x^2+y>0 \\ x^2+y-1>0 \end{cases}$$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t} \quad +$

$\sqrt{t-1}$

$x^2 =$

$y+8 \geq 0 \qquad y \geq -8$

$y+8<0 \qquad y<-8$

$-8 \quad [-8; +\infty)$

$(-\infty; -8)$

-8

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y + 8 = 1$

$x\sqrt{y} + y + 8 = 1 \qquad \sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1 \qquad x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28 \qquad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

28

3

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1 \qquad x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

10

$9+7$

$-1-8 = 1$

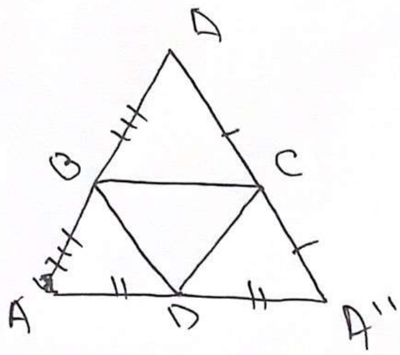
$9+1 \qquad x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10 - 8 = 1$

$10-1$

$9 \qquad x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

(6) Задание №6 чистовик



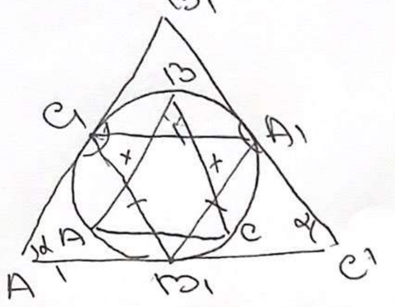
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $AB=CD=A'B$; $A'D=BC=A''D$, при этом $AC=A''C$, значит $\triangle ABC=\triangle CDA''$ - по 3м сторонам, поэтому $\angle BAC=\angle DCA''=\alpha$, $\angle ACB=\angle CA''D=\alpha$, следовательно $\angle ABC=\angle CDA''=180^\circ-\alpha-\gamma=\beta$, значит $\triangle BA'D=\triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними, а $\triangle BCD=\triangle DA'B$ - по 3м сторонам, следовательно и грани равны =>

=> $S_{поверхн}=4S$

Ответ: $S=4S$

⑤ №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \dfrac{B_1C_1}{x} = \dfrac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{A'C_1}{C_1B_1} = \dfrac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \dfrac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\dfrac{B'C_1}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \dfrac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \dfrac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \dfrac{1}{2\cos\alpha} + \dfrac{1}{2 - 2\cos\alpha}$

Замена $\cos\alpha = t$

т.к $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2-2t} = k(t)$

$\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \dfrac{-1}{2t^2} + \dfrac{1}{2(1-t)^2} = -\dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

т.к $2 - 4t < 0$

$k'(t) > 0 \Rightarrow \min(k)$ при $t = \frac{1}{2}$

$\max(x)$ при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$, max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Задача 3 чистовик

Оба уравнения - квадратные, тогда пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения; x_3, x_4 - корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик

вариант 210108

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо
$x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

(1) № 4

чистовик.

Пусть трасса-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему, связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right); \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины ~~B~~ B по трассе β

$$B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Но т.к центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отчета, связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = \left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2 2≤~~ $x \geq 2$

(2) №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2\leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2\leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x=T$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}T\right)^2\leq 4$$

$$4-2(\sqrt{3}+1)T+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2T^2\leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt{3}+1)T\leq 0$$

$$T(T-(\sqrt{3}+1))\leq 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x\leq\sqrt{2}\leq\sqrt{3}+1$, т.к сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt{3}+1)<0$ всегда

Остается:

$T\leq 0$

$\sin x-\cos x\leq 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$$\sqrt{x^2+y}+|y+8|=1$$
$$\sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5$$

ОДЗ

$x^2+y-1\geq 0$

$x^2+y\geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y}\geq 1$

$1=\sqrt{x^2+y}+|y+8|\geq 1+|y+8|$

$1\geq 1+|y+8|$

$0\geq |y+8|$

$y=-8$

$\sqrt{x^2-8}=1$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

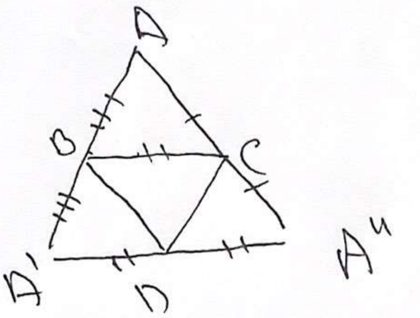
$x_1=-3$

$\underbrace{9-8-1}_{0}+\underbrace{-3+8}_{5}=5$

~~$x_2=3$~~

$\underbrace{9-8-1}_{0}$ $\quad \underbrace{3+8}_{11}=11$

№6 черновик



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$A'D = A''D = BC$

$AC = A''C$

$\Delta ABC = \Delta CDA''$ - по 3 сторонам

$\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$

$\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$

$\angle ABC = \angle DA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$

$\Delta BA'D = \Delta ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними

$\Delta BCD = \Delta DA'B$ - по 3м сторонам

$S = 4S$

черновик

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots f(12)$, если $f(n) =$

$= 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$ $\quad 2n(2n^2 - 3n + 2) + 7$

$f(1) = 4 - 6 + 4 + 7 = 11 - 6 + 4 = 15 - 6 = 9$

$f(2) = 32 - 24 + 8 + 7 = 23$

$f(3) = 108 - 54 + 12 + 7 = 73$

$f(12) = 6912 - 864 + 48 + 7 =$

$= 5993$

$f(4) = 256 - 96 + 16 + 7 = 137$

$f(5) = 500 - 110 + 20 + 7 =$

$= 417$

$f(6) = 864 - 216 + 24 + 7 =$

$= 679$

$f(7) = 1372 - 294 + 28 + 7 =$

$= 1113$

$f(8) = 2048 - 384 + 32 + 7 = 648$

$= 1664 + 32 + 7 =$

$= 1703$

$f(9) = 2916 - 486 + 36 + 7 =$

$= 2473$

$f(10)$ $4000 - 600 + 40 + 7 =$

$= 3400$

3447

$f(11) = 5324 -$

$- 726 + 44 + 7 =$

$= 4598 + 44 + 7 = 4649$

$121 \cdot 6 = 726$

$1331 \cdot 4 = 5324$

$121 \cdot 11 = 1331$

$1372 - 294 = 1078$; $1078 + 35 = 1113$

$64 \cdot 6 = 384$

$4096 - 384 = 3712$; $3712 + 39 = 3751$

$729 \cdot 4 = 2916$

$81 \cdot 6 = 486$

$1664 + 39 = 1703$

$32 - 24 = 8$

$27 \cdot 4 = 108$; $108 - 54 = 54$

$64 \cdot 4 = 256$; $16 \cdot 6 = 96$; $96 + 16 = 112$; $112 + 7 = 119$

$36 \cdot 6 = 216$; $216 \cdot 4 = 864$; $864 - 216 = 648$; $648 + 31 = 679$

$49 \cdot 6 = 294$; $64 \cdot 8 = 512$; $343 \cdot 4 = 1372$

$500 - 110 = 390$; $390 + 27 = 417$

$125 \cdot 4 = 500$; $25 \cdot 6 = 110$

$144 \cdot 12 = 1728$; $1728 \cdot 4 = 6912$

$144 \cdot 6 = 864$

$6912 - 864 = 6048$; $6048 + 55 = 6103$

$5993 + 919 = 6912$

$6912 - 919 = 5993$

$81 \cdot 9 = 729$

$2916 - 486 = 2430$; $2430 + 43 = 2473$

черновик

№1 $9+23+73+137+417+679+1113+1703+2473+$
$+3447+4649+5993=105+1233+5289+14089=$
$=1338+19378=$
$=20716$

$$\begin{array}{r} 73\\ 23\\ 9\\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1113\\ 1703\\ 2473\\ \hline 5289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3447\\ 4649\\ 5993\\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137\\ 467\\ 679\\ \hline 1233 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1233\\ 105\\ \hline 1338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{5278}\\ 14089\\ 5289\\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378\\ 1338\\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y + 8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad + y + 8 = 1$

О.Д.З

$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t}$ $+$

$\sqrt{t-1}$

$x^2 =$

$y+8 \geq 0$ $\quad y \geq -8$

$y+8 < 0$ $\quad y < -8$

-8 $\quad [-8; +\infty)$

$(-\infty; -8)$ $\quad -8$

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y + 8 = 1$

$x\sqrt{y} + y + 8 = 1$ $\quad \sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1$ $\quad x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28$ $\quad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1$ $\quad x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$ $\quad \sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

10

$9+7$ $\quad \sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

$-1-8 = 1$

$9+1$ $\quad x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10 - 8 = 1$

$10-1$

9 $\quad x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

-64

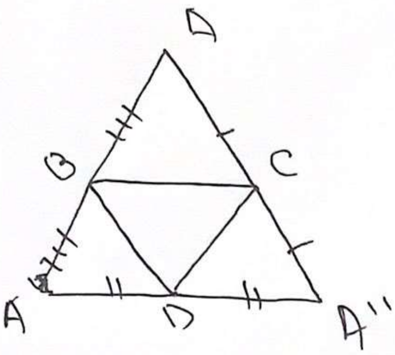
$\frac{4}{28}$ $\quad 8$

28

$\frac{81}{28}$

3

⑥ Задание №6 Чистовик

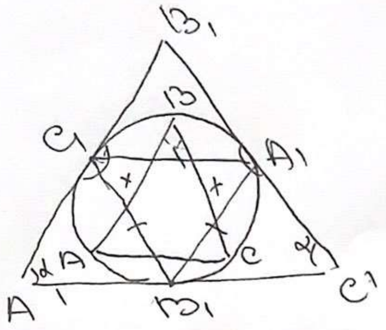


Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $AB=CD=A'B$;
$A'D=BC=A''D$, при этом $AC=A''C$, значит
$\triangle ABC=\triangle CDA''$ - по $3^м$ сторонам, поэтому
$\angle BAC=\angle DCA''=\alpha$, $\angle ACB=\angle CA''D=\alpha$, следовательно
$\angle ABC=\angle CDA''=180^\circ-\alpha-\gamma=\beta$, значит $\triangle BA'D=$
$=\triangle ABC$ - по $2^м$ сторонам и углу между ними,
а $\triangle BCD=\triangle DA'B$ - по $3^м$ сторонам,
следовательно и грани равны =>
=> $S_{поверхн}=4S$

Ответ: $S=4S$

⑤ №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{x} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A'C_1}{C_1B_1} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\frac{B'C_1}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \frac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2 - 2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

т.к $\alpha \in [\cancel{60}\ 30, 60^\circ]$

$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{2 - 2t} = k(t)$

$\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2(1-t)^2} = -\frac{1}{2t^2} +$

$+ \frac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

т.к $2 - 4t < 0$

$k'(t) > 0 \Rightarrow \min(k)$ при $t = \frac{1}{2}$

$\max(x)$ при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$; max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Задача 3 чистовик

Оба уравнения - квадратные, тогда пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения; x_3, x_4 - корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2 — чистовик, вариант 210107

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо $x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

① № 4 чистовик.

Пусть трасса-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$A = (\cos(\frac{\pi}{6}+x); \sin(\frac{\pi}{6}+x))$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины ~~B~~ B по трассе β

$B = (\cos(\frac{2\pi}{3}-x); \sin(\frac{2\pi}{3}-x))$

Но т.к центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отчета связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$B = (2+\cos(\frac{2\pi}{3}-x); \sin(\frac{2\pi}{3}-x))$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2~~ ~~2S~~ $x \geq 2$

② №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2\le 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2\le 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2\le 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2\le 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x = T$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}T\right)^2\le 4$$

$$4-2(\sqrt{3}+1)T+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2T^2\le 4$$

$$2T^2-2(\sqrt{3}+1)T\le 0$$

$$T(T-(\sqrt{3}+1))\le 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x\le\sqrt{2}\le\sqrt{3}+1$, т.к. сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt{3}+1)<0$ всегда

Остается:

$T\le 0$

$\sin x-\cos x\le 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

черновик

№2

$$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$$
$$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

$y = -8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$x_1 = -3$

$\underbrace{9-8-1}_{0} \; \underbrace{-3+8}_{5} = 5$

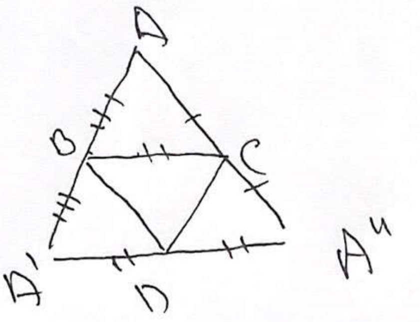
~~$x_2 = 3$~~

$\underbrace{9-8-1}_{0} \quad \underbrace{3+8}_{11} = 11$

№6

черновик

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$



$A'D=A''D=BC$

$AC=A''C$

$\triangle ABC=\triangle CDA''$ - по 3 сторонам

$\angle BAC=\angle DCA''=\alpha$

$\angle ACB=\angle CA''D=\alpha$

$\angle ABC=\angle DA''=180^\circ-\alpha-\gamma=\beta$

$\triangle BA'D=\triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними

$\triangle BCD=\triangle DA'B$ - по 3м сторонам

$S=4S$

черновик

$f(1)+f(2)+f(3)+\dots f(12)$, если $f(n)=$

$=4n^3-6n^2+4n+7$ $\qquad 2n(2n^2-3n+2)+7$

$f(1)=$ ~~4+3~~ $4-6+4+7=11-6+4=15-6=9$

$f(2)=32-24+8+7=23$

$f(3)=108-54+12+7=73$

$f(12)=6912-864+48+7=$

$=5993$

$f(4)=256-96+16+7=137$

$f(5)=500-110+20+7=$

$=417$

$f(6)=864-216+24+7=$

$=679$

$f(7)=1372-294+28+7=$

$=1113$

$f(8)=$ ~~2048~~ $-384+32+7=648$

$=$ ~~3712~~ $+32+7=$

$=$ ~~3055~~ 1703

$f(9)=2916-486+36+7=$

$=2473$

$f(10)$ $4000-600+40+7=$

$=3400$

3447

$f(11)=5324-$

$-726+44+7=$

$=4598+44+7=4649$

черновик

№1 $\overbrace{9+23+73}+\overbrace{137+417+679}+\overbrace{1193+1703+2473}+$

$+\overbrace{3447+4649+5993}= \overbrace{105+1233}+\overbrace{5279+14079}=$

$= 1338+19378=$

$= 20716$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 23 \\ 9 \\ \hline 105 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1113 \\ 1703 \\ 2473 \\ \hline 5289 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3447 \\ 4649 \\ 5993 \\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 467 \\ 679 \\ \hline 1233 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1233 \\ 105 \\ \hline 1338 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{5278} \\ 14089 \\ 5289 \\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378 \\ 1338 \\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y+8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad +y+8 = 1$

О.Д.З

$$\begin{cases} x^2+y > 0 \\ x^2+y-1 > 0 \end{cases}$$

пусть $x^2+y = t$

$\sqrt{t}$ $+$

$\sqrt{t-1}$

$x^2 =$

$y+8 \geq 0$ $\quad y \geq -8$

$y+8 < 0$ $\quad y < -8$

-8 $[-8; +\infty)$

$(-\infty; -8)$

-8

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y + 8 = 1$

$x\sqrt{y} + y + 8 = 1$ $\quad \sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1$ $\quad x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28$ $\quad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1$ $\quad x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$ $\quad \sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

10

$9+7$ $\quad \sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

$-1-8 = 1$

$9+1$ $\quad x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

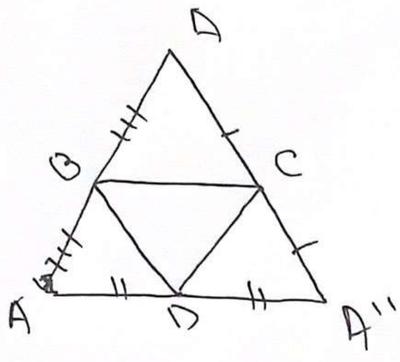
$10 - 8 = 1$

$10-1$

9 $\quad x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

-6.4 $\quad 28$ $\quad 8$ $\quad 28$ $\quad 3$

(6) Задание №6 чистовик



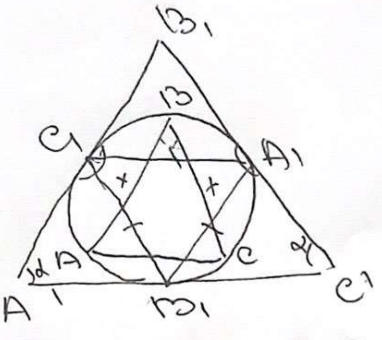
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $AB = CD = A'B$; $A'D = BC = A''D$, при этом $AC = A''C$, значит $\Delta ABC = \Delta CDA''$ - по $3^м$ сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$, $\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$, следовательно $\angle ABC = \angle CDA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$, значит $\Delta BA'D = \Delta ABC$ - по $2^м$ сторонам и углу между ними, а $\Delta BCD = \Delta DA'B$ - по $3^м$ сторонам, следовательно и грани равны $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow S_{поверхн} = 4S$

Ответ: $S = 4S$

(5) №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{x} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A'C_1}{C_1B_1} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\frac{B'C_1}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \frac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2 - 2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

т.к $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{2-2t} = k(t)$

$\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2(1-t^2)} = -\frac{1}{2t^2} +$ т.к $2 - 4t < 0$

$+ \frac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow$ min(k) при $t = \frac{1}{2}$

max(x) при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$, max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Задача 3 чистовик

Оба уравнения – квадратные, тогда пусть x_1, x_2 – корни первого уравнения; x_3, x_4 – корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматривать второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик

вариант 210107

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо $x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим второе уравнение

Если $x = -3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x = 3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x = -3$; $y = -8$

(1) №4

чистовик.

Пусть трасса-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Направим ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right); \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим центр окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины ~~B~~ B по трассе β

$$B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Но т.к. центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отсчета связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = \left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2~~ ~~25~~ $x \geq 2$

(2) №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt3}{2}\sin x-\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt3}{2}\sin x\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt3+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2 \leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x = T$

$$\left(2-\frac{\sqrt3+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}T\right)^2 \leq 4$$

$$4-2(\sqrt3+1)T+\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)^2T^2 \leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt3+1)T \leq 0$$

$$T(T-(\sqrt3+1)) \leq 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x \leq \sqrt2 \leq \sqrt3+1$, т.к. сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt3+1)<0$ всегда

Остается:

$T \leq 0$

$\sin x-\cos x \leq 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$ $y = -8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

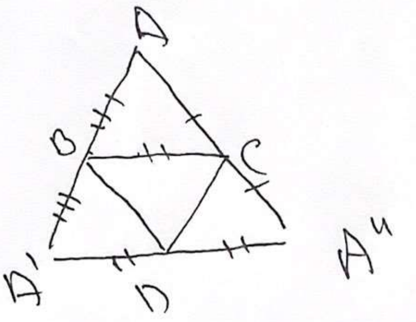
$x_1 = -3$

$\underset{0}{9-8-1} \quad \underset{5}{-3+8} = 5$

~~$x_2 = 3$~~

$\underset{0}{9-8-1} \quad \underset{11}{3+8} = 11$

№6 черновик



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$A'D = A''D = BC$

$AC = A''C$

$\Delta ABC = \Delta CDA''$ - по 3 сторонам

$\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$

$\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$

$\angle ABC = \angle DA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$

$\Delta BA'D = \Delta ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними

$\Delta BCD = \Delta DA'B$ - по 3м сторонам

$S = 4S$

черновик

$f(1)+f(2)+f(3)+\dots f(12)$, если $f(n)=$

$=4n^3-6n^2+4n+7$ $\quad 2n(2n^2-3n+2)+7$

$f(1)=$ ~~4+3-~~ $4-6+4+7=11-6+4=15-6=9$

$f(2)=32-24+8+7=23$

$f(3)=108-54+12+7=73$

$f(12)=6912-864+48+7=$

$=5993$

$f(4)=256-96+16+7=137$

$f(5)=500-110+20+7=$

$=417$

$f(6)=864-216+24+7=$

$=679$

$f(7)=1372-294+28+7=$

$=1113$

$f(8)=$ ~~2048~~ $-384+32+7=$

$=$ ~~3713~~ $+32+7=$

$=$ ~~3855~~ 1703

$f(9)=2916-486+36+7=$

$=2473$

$f(10)$ $4000-600+40+7=$

$=3400$

3447

$f(11)=5324-$

$-726+44+7=$

$=4598+44+7=4649$

черновик

№1 $9+23+73+137+417+679+1113+1703+2473+$
$+3447+4649+5993= 105+1233+5289+14089=$

$= 1338+19378=$

$= 20716$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 23 \\ 9 \\ \hline 105 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1113 \\ 1703 \\ 2473 \\ \hline 5289 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3447 \\ 4649 \\ 5993 \\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 467 \\ 679 \\ \hline 1233 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1233 \\ 105 \\ \hline 1338 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{5278} \\ 14089 \\ 5289 \\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378 \\ 1338 \\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y + 8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad +y+8 = 1$

О.Д.З

$$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t}$ +

$\sqrt{t-1}$

$x^2 =$

$y+8 \geq 0$ $\quad y \geq -8$

$y+8<0$ $\quad y<-8$

-8 $[-8;+\infty)$

$(-\infty;-8)$

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y + 8 = 1$

$x\sqrt{y} + y + 8 = 1$ $\quad \sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1$ $\quad x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28$ $\quad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1$ $\quad x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$ $\quad \sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

$9+7$ $\quad \sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

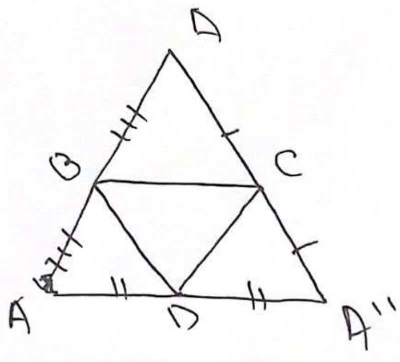
$-1-8 = 1$

$10 - 8 = 1$ $\quad 9+1$ $\quad x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10-1$

9 $\quad x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

⑥ Задание №6 чистовик



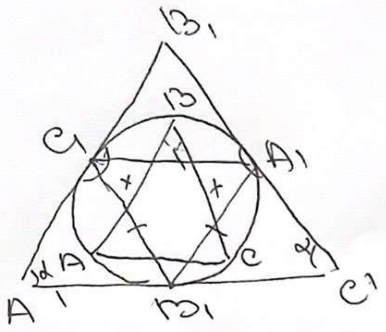
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $AB = CD = A'B$; $A'D = BC = A''D$, при этом $AC = A''C$, значит $\Delta ABC = \Delta CDA''$ - по $3^м$ сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$, $\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$, следовательно $\angle ABC = \angle CDA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$, значит $\Delta BA'D = \Delta ABC$ - по $2^м$ сторонам и углу между ними, а $\Delta BCD = \Delta DA'B$ - по $3^м$ сторонам, следовательно и грани равны => ~~S...~~

=> $S_{поверхн} = 4S$

Ответ: $S = 4S$

⑤ №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \dfrac{B_1C_1}{x} = \dfrac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{A'C_1}{C_1B_1} = \dfrac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \dfrac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\dfrac{B'C_1}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \dfrac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \dfrac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \dfrac{1}{2\cos\alpha} + \dfrac{1}{2 - 2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2-2t} = k(t)$ т.к $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \dfrac{-1}{2t^2} + \dfrac{1}{2(1-t)^2} = -\dfrac{1}{2t^2} +$ т.к $2 - 4t < 0$

$+ \dfrac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow$ $\min(k)$ при $t = \frac{1}{2}$

$\max(x)$ при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$; max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

④ Задача 3 чистовик

Оба уравнения - квадратные, тогда пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения; x_3, x_4 - корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик

вариант 210107

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо

$x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x = -3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x = 3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x = -3; y = -8$

(1) № 4 чистовик.

Пусть трассы-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему, связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Направим ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда, уравнение движения машины A, по трассе α

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right); \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины B по трассе β

$$B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Но т.к. центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отчёта, связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = \left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е $x \geq 2$

② №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$
$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2 \leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x = T$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}T\right)^2 \leq 4$$

$$4-2(\sqrt{3}+1)T+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2T^2 \leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt{3}+1)T \leq 0$$

$$T(T-(\sqrt{3}+1)) \leq 0$$

Заметим, что $T = \sin x-\cos x \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{3}+1$, т.к сумма $\cos x+\sin x$ максимальна, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt{3}+1)<0$ всегда

Остается:

$T \leq 0$

$\sin x-\cos x \leq 0$

Это неравенство выполняется ~~всегда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

$y = -8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

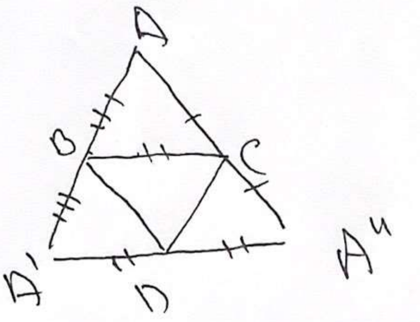
$x_1 = -3$

$\underbrace{9-8-1}_{0} + \underbrace{|-3+8|}_{5} = 5$

~~$x_2 = 3$~~

$\underbrace{9-8-1}_{0}$ $\underbrace{3+8}_{11} = 11$

№6 черновик



$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$A'D=A''D=BC$

$AC=A''C$

$\triangle ABC=\triangle CDA''$ - по 3 сторонам

$\angle BAC=\angle DCA''=\alpha$

$\angle ACB=\angle CA''D=\alpha$

$\angle ABC=\angle DA''=180^\circ-\alpha-\gamma=\beta$

$\triangle BA'D=\triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ним

$\triangle BCD=\triangle DA'B$ - по 3м сторонам

$S=4S$

черновик

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots f(12)$, если $f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$

$2n(2n^2 - 3n + 2) + 7$

$f(1) = 4 - 6 + 4 + 7 = 11 - 6 + 4 = 15 - 6 = 9$

$f(2) = 32 - 24 + 8 + 7 = 23$

$f(3) = 108 - 54 + 12 + 7 = 73$

$f(12) = 6912 - 864 + 48 + 7 = 5993$

$f(4) = 256 - 96 + 16 + 7 = 137$

$f(5) = 500 - 110 + 20 + 7 = 417$

$f(6) = 864 - 216 + 24 + 7 = 679$

$f(7) = 1372 - 294 + 28 + 7 = 1113$

$f(8) = \cancel{2048} - 384 + 32 + 7 = 648$

$= \cancel{1664} + 32 + 7 = 1703$

$f(9) = 2916 - 486 + 36 + 7 = 2473$

$f(10)$ $4000 - 600 + 40 + 7 = 3400$ 3447

$f(11) = 5324 - 726 + 44 + 7 = 4598 + 44 + 7 = 4649$

$$\frac{32 - 24}{8} \qquad \frac{27 \cdot 4}{108} \qquad \frac{121 \cdot 6}{726} \qquad \frac{64 \cdot 4}{256} \qquad \frac{16 \cdot 6}{96} \qquad \frac{36 \cdot 6}{216} \qquad \frac{216 \cdot 4}{864}$$

$$\frac{1331 \cdot 4}{5324} \qquad \frac{121 \cdot 11}{1331} \qquad \frac{49 \cdot 6}{294} \qquad \frac{343 \cdot 4}{1372} \qquad \frac{64 \cdot 8}{512} \qquad \frac{512 \cdot 4}{2048} \qquad \frac{64 \cdot 6}{384}$$

$$\frac{144 \cdot 12}{1728} \qquad \frac{1728 \cdot 4}{6912} \qquad \frac{144 \cdot 6}{864} \qquad \frac{125 \cdot 4}{500} \qquad \frac{25 \cdot 6}{110} \qquad \frac{729 \cdot 4}{2916} \qquad \frac{81 \cdot 6}{486} \qquad \frac{81 \cdot 9}{729}$$

$$\frac{256 - 216}{648} \qquad \frac{500 - 110}{390} \qquad \frac{648 + 31}{679} \qquad \frac{1372 - 294}{1078} \qquad \frac{1078 + 35}{1113} \qquad \frac{1664 + 39}{1703}$$

$$\frac{4096 - 384}{3712} \qquad \frac{3712 + 39}{3751} \qquad \frac{2916 - 486}{2430} \qquad \frac{2430 + 43}{2473} \qquad \frac{6912 - 919}{5993}$$

$$\frac{864 + 55}{919} \qquad \frac{5324 - 726}{4598} \qquad 23 + 9 = 32 \qquad 108 - 54 = 54 \qquad 112 + 7 = 119 \qquad 256 - 96 + 16 = 176$$

черновик

№1 $\overbrace{9+\underbrace{23+73}}+\overbrace{137+417+679}+\overbrace{1113+1703+2473}+$

$+\overbrace{3447+4649+5993}=\overbrace{105+1233}+\overbrace{5289+14089}=$

$=1338+19378=$

$=20716$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 23 \\ 9 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1113 \\ 1703 \\ 2473 \\ \hline 5289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3447 \\ 4649 \\ 5993 \\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 467 \\ 679 \\ \hline 1233 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1233 \\ 105 \\ \hline 1338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{5278} \\ 14089 \\ 5289 \\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378 \\ 1338 \\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y+8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad +y+8 = 1$

О.Д.З

$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t} \quad +$

$\sqrt{t-1}$

$x^2 =$

$y+8 \geq 0 \qquad y \geq -8$

$y+8 < 0 \qquad y < -8$

$-8 \quad [-8; +\infty)$

$(-\infty; -8)$

-8

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y+8 = 1$

$x\sqrt{y} + y+8 = 1 \qquad \sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1 \qquad x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28 \qquad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

28

3

$\sqrt{x^2+y} + y+8 = 1 \qquad x + y^{\frac{1}{2}} + y+8$

$\sqrt{x^2+y-1} + x+8 = 5$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$

10

$9+7$

$\sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

$-1-8 = 1$

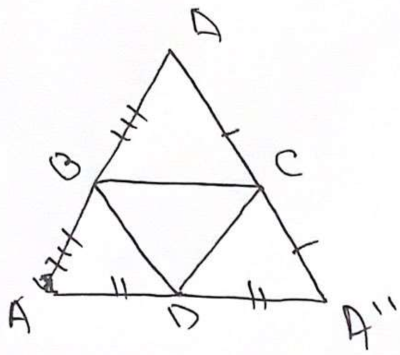
$9+1 \qquad x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10 - 8 = 1$

$10-1$

$9 \qquad x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

⑥ Задание №6 чистовик



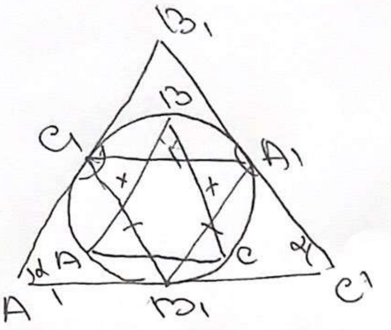
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $AB = CD = A'B$, $A'D = BC = A''D$, при этом $AC = A''C$, значит $\triangle ABC = \triangle CDA''$ — по 3м сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$, $\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$, следовательно $\angle ABC = \angle CDA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$, значит $\triangle BA'D = \triangle ABC$ — по 2м сторонам и углу между ними, а $\triangle BCD = \triangle DA'B$ — по 3м сторонам, следовательно и грани равны =>

=> $S_{\text{поверхн}} = 4S$

Ответ: $S = 4S$

(5) №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \dfrac{B_1C_1}{x} = \dfrac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{A'C_1}{C_1B_1} = \dfrac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \dfrac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\dfrac{B'C_1}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \dfrac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \dfrac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \dfrac{1}{2\cos\alpha} + \dfrac{1}{2 - 2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

т.к $\alpha \in [\cancel{30^\circ}\,30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2 - 2t} = k(t)$ $\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \dfrac{-1}{2t^2} + \dfrac{1}{2(1-t^2)} = -\dfrac{1}{2t^2} +$ т.к $2 - 4t < 0$

$+ \dfrac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow$ $\min(k)$ при $t = \frac{1}{2}$

$\max(x)$ при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$; max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Задача 3 чистовик

Оба уравнения - квадратные, тогда пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения; x_3, x_4 - корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик

вариант 210107

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо

$x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

1 №4 чистовик.

Пусть трасс-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему, связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Направим ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right); \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины ~~В~~ B по трассе β

$$B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Но т.к. центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отчёта, связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = \left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2~~ ~~25~~ $x \geq 2$

(2) №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2\leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2\leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x=T$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}T\right)^2\leq 4$$

$$4-2(\sqrt{3}+1)T+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2T^2\leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt{3}+1)T\leq 0$$

$$T(T-(\sqrt{3}+1))\leq 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x\leq\sqrt{2}\leq\sqrt{3}+1$, т.к. сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt{3}+1)<0$ всегда

Остается:

$T\leq 0$

$\sin x-\cos x\leq 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

$y = -8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$x_1 = -3$

$\underbrace{9-8-1}_{0} + \underbrace{-3+8}_{5} = 5$

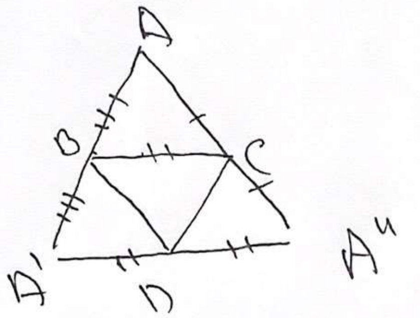
$\cancel{x_2 = 3}$

$\underbrace{9-8-1}_{0}$ $\quad \underbrace{3+8}_{11} = 11$

№6

черновик

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



$A'D = A''D = BC$

$AC = A''C$

$\triangle ABC = \triangle CDA''$ - по 3 сторонам

$\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$

$\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$

$\angle ABC = \angle DA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$

$\triangle BA'D = \triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними

$\triangle BCD = \triangle DA'B$ - по 3м сторонам

$S = 4S$

черновик

$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots f(12)$, если $f(n) =$

$= 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$ $\qquad 2n(2n^2 - 3n + 2) + 7$

$f(1) = \cancel{4+3} \; 4 - 6 + 4 + 7 = 11 - 6 + 4 = 15 - 6 = 9$

$f(2) = 32 - 24 + 8 + 7 = 23$

$f(3) = 108 - 54 + 12 + 7 = 73$

$f(12) = 6912 - 864 + 48 + 7 =$

$= 5993$

$f(4) = 256 - 96 + 16 + 7 = 137$

$f(5) = 500 - 110 + 20 + 7 =$

$= 417$

$f(6) = \cancel{48}\; 864 - 216 + 24 + 7 =$

$= 679$

$f(7) = 1372 - 294 + 28 + 7 =$

$= 1113$

$f(8) = \cancel{2008}\;2048 - 384 + 32 + 7 = 648$

$= \cancel{3713} + 32 + 7 =$ 1664

$= \cancel{3025}$ 1703

$f(9) = 2916 - \cancel{426}\; 36 + 7 =$ 2473

$f(10)$ $4000 - 600 + 40 + 7 =$ 3400 3447

$f(11) = 5324 -$

$- 726 + 44 + 7 =$

$= 4598 + 44 + 7 = 4649$

$121 \cdot 6 = 726$; $1331 \cdot 4 = 5324$; $121 \cdot 11 = 1331$; $1372 - 294 = 1078$; $1078 + 35 = 1113$; $64 \cdot 8 = 512$; $512 \cdot 4 = 2048$; $2048 \cdot 2 = 4096$; $64 \cdot 6 = 384$; $4096 - 384 = 3712$; $3712 - 39 = 3751$ [?]; $729 \cdot 4 = 2916$; $81 \cdot 6 = 486$; $1664 + 39 = 1703$

$32 - 24 = 8$; $27 \cdot 4 = 108$; $108 - 54 = 54$; $64 \cdot 4 = 256$; $256 - 96 = 160$ [?]; $16 \cdot 6 = 96$; $36 \cdot 6 = 216$; $216 \cdot 4 = 864$; $864 - 216 = 648$; $648 + 19 = 667$ [?]; $49 \cdot 7 = 343$; $49 \cdot 6 = 294$; $500 - 110 = 390$; $125 \cdot 4 = 500$; $25 \cdot 6 = 150$ [?] / 110; $648 + 31 = 679$; $390 + ... $; $144 \cdot 12 = 1728$; $1728 \cdot 4 = 6912$; $144 \cdot 6 = 864$; $343 \cdot 4 = 1372$; $6912 - 919 = 5993$ [?]

$5324 - 726 = 4598$; $864 + 55 = 919$; $81 \cdot 9 = 729$; $2916 - 486 = 2430$; $2430 + 43 = 2473$; $6912 - 919 = 5993$

черновик

№1 $9+23+73+137+417+679+1113+1703+2473+$
$+3447+4649+5993=105+1233+5289+14089=$
$=1338+19378=$
$=20716$

$$\begin{array}{r}73\\23\\9\\\hline 105\end{array}\qquad \begin{array}{r}1113\\1703\\2473\\\hline 5289\end{array}\qquad \begin{array}{r}3447\\4649\\5993\\\hline 14089\end{array}$$

$$\begin{array}{r}137\\467\\679\\\hline 1233\end{array}\qquad \begin{array}{r}1233\\105\\\hline 1338\end{array}\qquad \begin{array}{r}\cancel{5278}\\14089\\5289\\\hline 19378\end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r}19378\\1338\\\hline 20716\end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y+8$

$\sqrt{t-1}$

$1+ \quad +y+8 = 1$

О.Д.З. пусть $x^2+y=t$

$$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

$\sqrt{t}$ $+$

$\sqrt{t-1}$

$x^2 =$

$y+8 \geq 0$ $\quad y \geq -8$

$y+8<0$ $\quad y<-8$

-8 $[-8; +\infty)$

$(-\infty; -8)$ -8

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y+8 = 1$

$x\sqrt{y} + y+8 = 1$ $\quad \sqrt{y}=t$

$xt + t^2+8 = 1$ $\quad x\sqrt{y}$

$t^2+xt+8 = 1$

$t^2+xt+7=0$

$D = x^2-4\cdot 7 = x^2-28$ $\quad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

28

3

$\sqrt{x^2+y} + y+8 = 1$ $\quad x+y^{\frac{1}{2}}+y+8$

$\sqrt{x^2+y-1} + x+8 = 5$

$\sqrt{x^2+y} - y-8 = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} - x-8 = 5$

10

$9+7$

$-1-8 = 1$

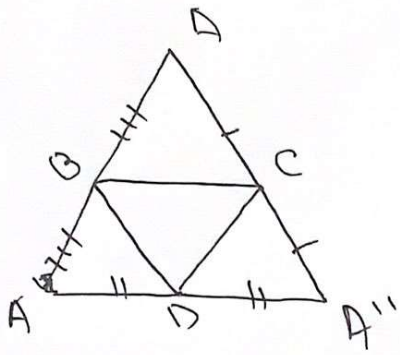
$9+1$ $\quad x+y^{\frac{3}{2}}+8 = 1$

$10-8 = 1$

$10-1$

9 $\quad x+\sqrt{y^3}+8 = 1$

⑥ Задание №6 чистовик



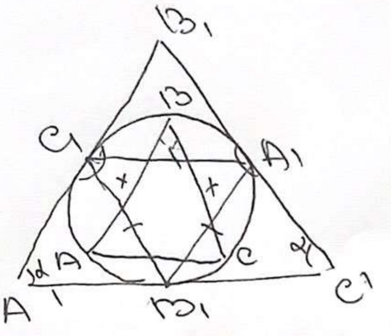
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $AB=CD=A'B$; $A'D=BC=A''D$, при этом $AC=A''C$, значит $\triangle ABC=\triangle CDA''$ - по 3м сторонам, поэтому $\angle BAC=\angle DCA''=\alpha$, $\angle ACB=\angle CA''D=\alpha$, следовательно $\angle ABC=\angle CDA''=180^\circ-\alpha-\gamma=\beta$, значит $\triangle BA'D=\triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними, а $\triangle BCD=\triangle DA'B$ - по 3м сторонам, следовательно и грани равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{поверхн}=4S$

Ответ: $S=4S$

(5) №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{x} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A'C_1}{C_1B_1} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\frac{B'C_1}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \frac{1}{2-2\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2-2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

т.к $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{2-2t} = k(t)$ $\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2(1-t)^2} = -\frac{1}{2t^2} +$ т.к $2-4t<0$

$+ \frac{1}{2-4t+2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow \min(k)$ при $t = \frac{1}{2}$

$\max(x)$ при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$; max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Задача 3 чистовик

Оба уравнения – квадратные, тогда пусть x_1, x_2 – корни первого уравнения; x_3, x_4 – корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик

вариант 210103

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо $x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

(Г) №4 чистовик.

Пусть трасса-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right); \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины ~~B~~ B по трассе β

$$B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Но т.к. центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отсчета связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = \left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2~~ ~~2π~~ $x \geq 2$

(2) №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2 \leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x = T$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}T\right)^2 \leq 4$$

$$4-2(\sqrt{3}+1)T+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2T^2 \leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt{3}+1)T \leq 0$$

$$T(T-(\sqrt{3}+1)) \leq 0$$

Заметим, что $T = \sin x-\cos x \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{3}+1$, т.к сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt{3}+1)<0$ всегда

Остается:

$T \leq 0$

$\sin x-\cos x \leq 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$$
$$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

$y = -8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$x_1 = -3$

$9-8-1 \quad -3+8 = 5$

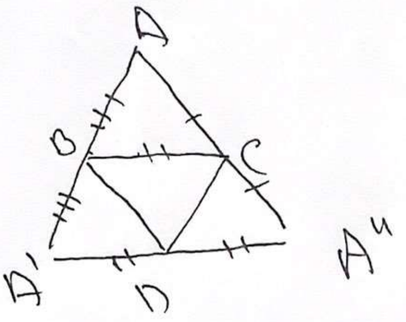
$0 \quad 5$

~~$x_2 = 3$~~

$9-8-1 \quad 3+8 = 11$

$0 \quad 11$

№6 черновик



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$A'D = A''D = BC$

$AC = A''C$

$\triangle ABC = \triangle CDA''$ - по 3 сторонам

$\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$

$\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$

$\angle ABC = \angle DA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$

$\triangle BA'D = \triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними

$\triangle BCD = \triangle DA'B$ - по 3м сторонам

$S = 4S$

черновик

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots f(12)$, если $f(n) =$

$= 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$ $\qquad 2n(2n^2 - 3n + 2) + 7$

$f(1) = 4 - 6 + 4 + 7 = 11 - 6 + 4 = 15 - 6 = 9$

$f(2) = 32 - 24 + 8 + 7 = 23$

$f(3) = 108 - 54 + 12 + 7 = 73$

$f(12) = 6912 - 864 + 48 + 7 =$

$= 5993$

$f(4) = 256 - 96 + 16 + 7 = 137$

$f(5) = 500 - 110 + 20 + 7 =$

$= 417$

$f(6) = 864 - 216 + 24 + 7 =$

$= 679$

$f(7) = 1372 - 294 + 28 + 7 =$

$= 1113$

$f(8) = \cancel{2048} - 384 + 32 + 7 = 648$

$= 1664 + 32 + 7 =$

$= 1703$

$f(9) = 2916 - 486 + 36 + 7 =$

2473

$f(10) = 4000 - 600 + 40 + 7 =$

3400

3447

$f(11) = 5324 -$

$- 726 + 44 + 7 =$

$= 4598 + 44 + 7 = 4649$

черновик

№1 $\overbrace{9+23+73}+\overbrace{137+417+679}+\overbrace{1193+1703+2473}+$
$+\overbrace{3447+4649+5993} = \overbrace{105+1233}+\overbrace{5289+14089} =$

$= 1338 + 19378 =$

$= 20716$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 23 \\ 9 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1113 \\ 1703 \\ 2473 \\ \hline 5289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3447 \\ 4649 \\ 5993 \\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 467 \\ 679 \\ \hline 1233 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1233 \\ 105 \\ \hline 1338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{5278} \\ 14089 \\ 5289 \\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378 \\ 1338 \\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y + 8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad + y + 8 = 1$

О.Д.З

$$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t}$ $+$

$\sqrt{t-1}$

$x^2 =$

$y+8 \geq 0$ $\quad y \geq -8$

$y+8 < 0$ $\quad y < -8$

-8 $[-8; +\infty)$

$(-\infty; -8)$

-8

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y + 8 = 1$

$x\sqrt{y} + y + 8 = 1$ $\quad \sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1$ $\quad x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28$ $\quad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

-28

28

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1$ $\quad x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

10

$9+7$

$-1-8 = 1$

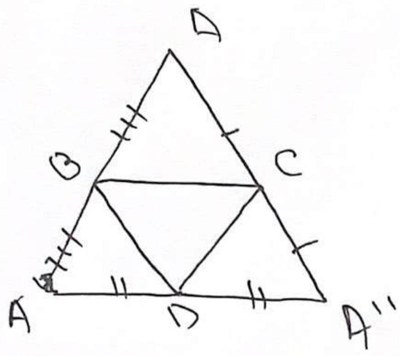
$9+1$ $\quad x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10 - 8 = 1$

$10 - 1$

9 $\quad x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

⑥ Задание №6 чистовик



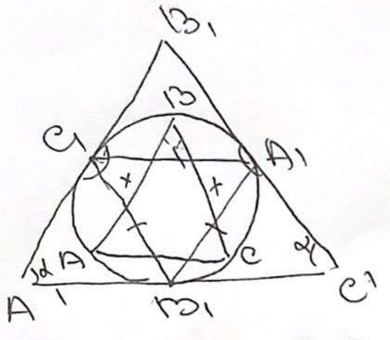
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $AB = CD = A'B$; $A'D = BC = A''D$, при этом $AC = A''C$, значит $\triangle ABC = \triangle CDA''$ - по $3^м$ сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$, $\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$, следовательно $\angle ABC = \angle CDA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$, значит $\triangle BA'D = \triangle ABC$ - по $2^м$ сторонам и углу между ними, а $\triangle BCD = \triangle DA'B$ - по $3^м$ сторонам, следовательно и грани равны =>

=> $S_{поверхн} = 4S$

Ответ: $S = 4S$

(5) №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{x} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A'C_1}{C_1B_1} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\frac{B'C_1}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \frac{1}{2-2\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2-2\cos\alpha}$

Замена $\cos\alpha = t$

т.к. $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{2-2t} = k(t)$

$\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2(1-t)^2} = -\frac{1}{2t^2} +$

т.к. $2-4t<0$

$+ \frac{1}{2-4t+2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow \min(k)$ при $t = \frac{1}{2}$

$\max(x)$ при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$; max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

④ Задача 3 чистовик

Оба уравнения – квадратные, тогда пусть x_1, x_2 – корни первого уравнения; x_3, x_4 – корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик

вариант 210107

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо $x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

(1) № 4 чистовик.

Пусть трасс-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трасс β. Перейдем в систему связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right); \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машин ~~B~~ B по трассе β

$$B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Но т.к центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отчета связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = \left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2~~ ~~2≤~~ $x \geq 2$

② №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\tfrac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\tfrac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

$\leq d$

Решим

$$\left(2+\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\tfrac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\tfrac{\pi}{6}+x\right)\right)^2\leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\tfrac{2\pi}{3}\sin\cos\tfrac{2\pi}{3}-\sin\tfrac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\tfrac{\pi}{6}\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\tfrac{1}{2}\cos x-\tfrac{\sqrt3}{2}\sin x-\tfrac{\sqrt3}{2}\cos x-\tfrac12\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}\cos x-\tfrac12\sin x-\tfrac12\cos x+\tfrac{\sqrt3}{2}\sin x\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\tfrac{\sqrt3+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2\leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x = T$

$$\left(2-\tfrac{\sqrt3+1}{2}T\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3-1}{2}T\right)^2\leq 4$$

$$4-2(\sqrt3+1)T+\left(\tfrac{\sqrt3+1}{2}\right)^2T^2+\left(\tfrac{\sqrt3-1}{2}\right)^2T^2\leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt3+1)T\leq 0$$

$$T(T-(\sqrt3+1))\leq 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x\leq\sqrt2\leq\sqrt3+1$, т.к сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt3+1)<0$ всегда

Остается:

$T\leq 0$

$\sin x-\cos x\leq 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

$y = -8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

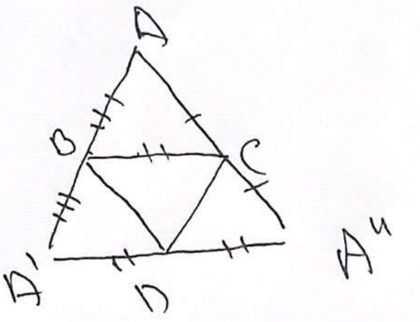
$x_1 = -3$

$\underbrace{9-8-1}_{0} + \underbrace{|-3+8|}_{5} = 5$

~~$x_2 = 3$~~

$\underbrace{9-8-1}_{0}$ $\underbrace{3+8}_{11} = 11$

№6 черновик



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$A'D = A''D = BC$

$AC = A''C$

$\triangle ABC = \triangle CDA''$ – по 3 сторонам

$\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$

$\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$

$\angle ABC = \angle DA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$

$\triangle BA'D = \triangle ABC$ – по 2м сторонам и углу между ними

$\triangle BCD = \triangle DA'B$ – по 3м сторонам

$S = 4S$

черновик

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots f(12)$, если $f(n) =$

$= 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$ $\quad 2n(2n^2 - 3n + 2) + 7$

$f(1) = 4 - 6 + 4 + 7 = 11 - 6 + 4 = 15 - 6 = 9$

$f(2) = 32 - 24 + 8 + 7 = 23$

$f(3) = 108 - 54 + 12 + 7 = 73$

$f(12) = 6912 - 864 + 48 + 7 =$

$= 5993$

$f(4) = 256 - 96 + 16 + 7 = 137$

$f(5) = 500 - 110 + 20 + 7 =$

$= 417$

$f(6) = 864 - 216 + 24 + 7 =$

$= 679$

$f(7) = 1372 - 294 + 28 + 7 =$

$= 1113$

$f(8) = 2048 - 384 + 32 + 7 = 648$

$= 1664 + 32 + 7 =$

$= 1703$

$f(9) = 2916 - 486 + 36 + 7 =$

2473

$f(10)$ $4000 - 600 + 40 + 7 =$

3400

3447

$f(11) = 5324 -$

$- 726 + 44 + 7 =$

$= 4598 + 44 + 7 = 4649$

черновик

№1 $9+23+73+137+417+679+1113+1703+2473+$
$+3447+4649+5993=105+1233+5289+14089=$

$=1338+19378=$

$=20716$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 23 \\ 9 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1113 \\ 1703 \\ 2473 \\ \hline 5289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3447 \\ 4649 \\ 5993 \\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 467 \\ 679 \\ \hline 1233 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1233 \\ 105 \\ \hline 1338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{5278} \\ 14089 \\ 5289 \\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378 \\ 1338 \\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y + 8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad + y + 8 = 1$

О.Д.З

$$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t}$ $\quad +$

$\sqrt{t-1}$ $\quad x^2 =$

$y+8 \geq 0$ $\quad y \geq -8$

$y+8<0$ $\quad y<-8$

-8 $\quad [-8; +\infty)$

$(-\infty; -8)$

-8

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y + 8 = 1$

$x\sqrt{y} + y + 8 = 1$ $\quad \sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1$ $\quad x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28$ $\quad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1$ $\quad x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

$\sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

$9+7$

$-1-8=1$

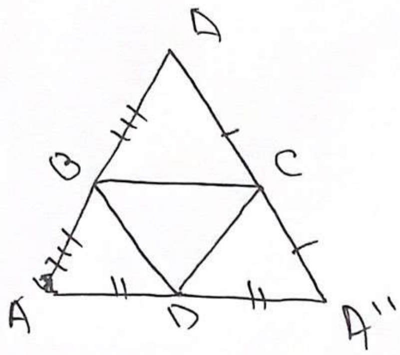
$10-8=1$

$9+1$ $\quad x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10-1$

9 $\quad x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

⑥ Задание №6 чистовик



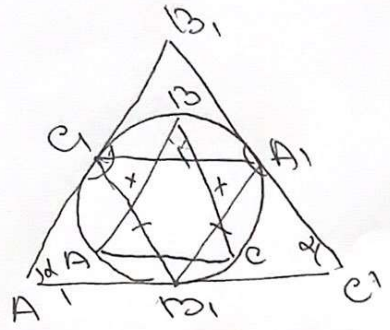
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $AB=CD=A'B$; $A'D=BC=A''D$, при этом $AC=A''C$, значит $\triangle ABC=\triangle CDA''$ - по 3м сторонам, поэтому $\angle BAC=\angle DCA''=\alpha$, $\angle ACB=\angle CA''D=\alpha$, следовательно $\angle ABC=\angle CDA''=180^\circ-\alpha-\gamma=\beta$, значит $\triangle BA'D=$ $=\triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними, а $\triangle BCD=\triangle DA'B$ - по 3м сторонам, следовательно и грани равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{поверхн}=4S$

Ответ: $S=4S$

(5) №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \dfrac{B_1C_1}{x} = \dfrac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{A'C_1}{C_1B_1} = \dfrac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x\ \dfrac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\dfrac{B'C_1}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \dfrac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \dfrac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \dfrac{1}{2\cos\alpha} + \dfrac{1}{2 - 2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

т.к $\alpha \in [30, 60^\circ]$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2 - 2t} = k(t)$

$\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \dfrac{-1}{2t^2} + \dfrac{1}{2(1-t)^2} = -\dfrac{1}{2t^2} +$ т.к $2 - 4t < 0$

$+ \dfrac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow$ $\min(k)$ при $t = \frac{1}{2}$

$\max(x)$ при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$; max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Задача 3 чистовик

Оба уравнения - квадратные, тогда пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения; x_3, x_4 - корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a = 16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик
вариант 210107

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо

$x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

① № 4 чистовик.

Пусть трасса-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Направим ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда, уравнение движения машины A по трассе α

$$A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right); \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\right)$$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины ~~B~~ B по трассе β

$$B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\right)$$

Но т.к. центр трассы β находится на расстояние 2 от центра O, то в системе отчета связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\right)$$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2~~ ~~2~~ $x \geq 2$

(2) №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

$\leq d$

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2\leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt3}{2}\sin x-\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt3}{2}\sin x\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt3+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2\leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x = T$

$$\left(2-\frac{\sqrt3+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}T\right)^2\leq 4$$

$$4-2(\sqrt3+1)T+\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)^2T^2\leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt3+1)T\leq 0$$

$$T(T-(\sqrt3+1))\leq 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x\leq\sqrt2\leq\sqrt3+1$, т.к сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt3+1)<0$ всегда

Остается:

$T\leq 0$

$\sin x-\cos x\leq 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

$y=-8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

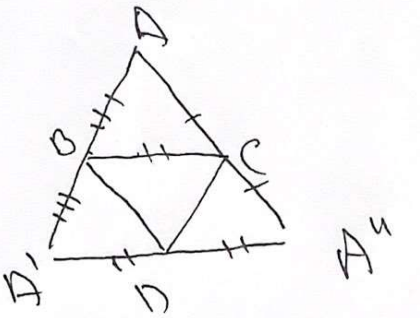
$x_1 = -3$

$\underbrace{9-8-1}_{0} + \underbrace{-3+8}_{5} = 5$

~~$x_2 = 3$~~

$\underbrace{9-8-1}_{0}$ $\quad \underbrace{3+8}_{11} = 11$

№6 черновик



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$A'D = A''D = BC$

$AC = A''C$

$\triangle ABC = \triangle CDA''$ - по 3 сторонам

$\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$

$\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$

$\angle ABC = \angle DA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$

$\triangle BA'D = \triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними

$\triangle BCD = \triangle DA'B$ - по 3м сторонам

$S = 4S$

черновик

$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots f(12)$, если $f(n) =$

$= 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$ $\quad 2n(2n^2 - 3n + 2) + 7$

$f(1) = \cancel{4+3} \quad 4 - 6 + 4 + 7 = 11 - 6 + 4 = 15 - 6 = 9$

$f(2) = 32 - 24 + 8 + 7 = 23$

$f(3) = 108 - 54 + 12 + 7 = 73$

$f(12) = 6912 - 864 + 48 + 7 =$

$= 5993$

$f(4) = 256 - 96 + 16 + 7 = 137$

$f(5) = 500 - 110 + 20 + 7 =$

$= 417$

$f(6) = 864 - 216 + 24 + 7 =$

$= 679$

$f(7) = 1372 - 294 + 28 + 7 =$

$= 1113$

$f(8) = \cancel{2048} - 384 + 32 + 7 = 648$

$= \cancel{1664} + 32 + 7 =$

$= 1703$

$f(9) = 2916 - 486 + 36 + 7 =$

$= 2473$

$f(10)$ $\quad 4000 - 600 + 40 + 7 =$

$= 3400$

3447

$f(11) = 5324 -$

$- 726 + 44 + 7 =$

$= 4598 + 44 + 7 = 4649$

$$\begin{array}{r} 32 \\ -24 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 121 \\ \times 6 \\ \hline 726 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1331 \\ \times 4 \\ \hline 5324 \end{array} \quad \begin{array}{r} 121 \\ \times 11 \\ \hline 1331 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1372 \\ -294 \\ \hline 1078 \\ +35 \\ \hline 1113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 4 \\ \hline 108 \\ -54 \\ \hline 54 \\ +12 \\ \hline 66 \\ +7 \\ \hline 73 \end{array} \quad \begin{array}{r} 64 \\ \times 4 \\ \hline 256 \\ -96 \\ \hline 160 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ \times 6 \\ \hline 216 \\ \times 4 \\ \hline 864 \\ -216 \\ \hline 648 \\ +31 \\ \hline 679 \end{array} \quad \begin{array}{r} 500 \\ -110 \\ \hline 390 \end{array} \quad \begin{array}{r} 125 \\ \times 4 \\ \hline 500 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 6 \\ \hline 110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \\ \times 4 \\ \hline 6912 \end{array} \quad \begin{array}{r} 144 \\ \times 6 \\ \hline 864 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6912 \\ -919 \\ \hline 5993 \end{array} \quad \begin{array}{r} 864 \\ +55 \\ \hline 919 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 6 \\ \hline 294 \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \\ \times 4 \\ \hline 1372 \end{array} \quad \begin{array}{r} 64 \\ \times 8 \\ \hline 512 \\ \times 4 \\ \hline 2048 \end{array} \quad \begin{array}{r} 64 \\ \times 6 \\ \hline 384 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1664 \\ +39 \\ \hline 1703 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4096 \\ -384 \\ \hline 3712 \\ +39 \\ \hline 3751 \end{array} \quad \begin{array}{r} 81 \\ \times 9 \\ \hline 729 \\ \times 4 \\ \hline 2916 \end{array} \quad \begin{array}{r} 81 \\ \times 6 \\ \hline 486 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2916 \\ -486 \\ \hline 2430 \\ +43 \\ \hline 2473 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5324 \\ -726 \\ \hline 4598 \end{array}$$

черновик

№1 $9+23+73+137+417+679+1113+1703+2473+$
$+3447+4649+5993 = 105+1233+5289+14089=$
$=1338+19378=$
$=20716$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 23 \\ 9 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1113 \\ 1703 \\ 2473 \\ \hline 5289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3447 \\ 4649 \\ 5993 \\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 467 \\ 679 \\ \hline 1233 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1233 \\ 105 \\ \hline 1338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{5278} \\ 14089 \\ 5289 \\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378 \\ 1338 \\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y + 8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad + y + 8 = 1$

О.Д.З.

$$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t}$ $+$

$\sqrt{t-1}$ $x^2 =$

$y+8 \geq 0$ $y \geq -8$

$y+8 < 0$ $y < -8$

-8 $[-8; +\infty)$

$(-\infty; -8)$

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y + 8 = 1$

$x\sqrt{y} + y + 8 = 1$ $\sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1$ $x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28$ $(x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1$ $x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

$\sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

$9 + 7$

$-1 - 8 = 1$

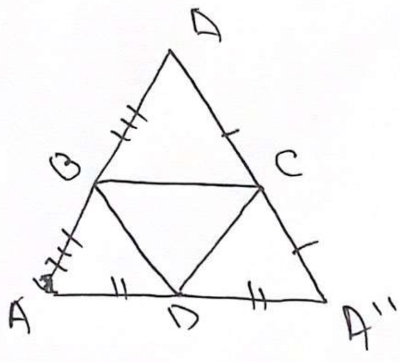
$9 + 1$ $x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10 - 8 = 1$

$10 - 1$

9 $x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

(6) Задание №6 чистовик



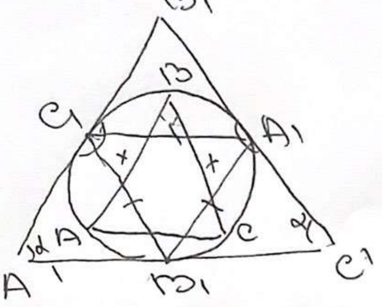
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $AB = CD = A'B$; $A'D = BC = A''D$, при этом $AC = A''C$, значит $\Delta ABC = \Delta CDA''$ - по $3^м$ сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$, $\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$, следовательно $\angle ABC = \angle CDA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$, значит $\Delta BA'D = \Delta ABC$ - по $2^м$ сторонам и углу между ними, а $\Delta BCD = \Delta DA'B$ - по $3^м$ сторонам, следовательно и грани равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{поверхн} = 4S$

Ответ: $S = 4S$

5 №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{x} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A'C_1}{C_1B_1} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\frac{B'C_1}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \frac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2 - 2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{2-2t} = k(t)$ т.к $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2(1-t^2)} = -\frac{1}{2t^2} +$ т.к $2 - 4t < 0$

$+ \frac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow$ min(k) при $t = \frac{1}{2}$

max(x) при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$; max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Задача 3 чистовик

Оба уравнения - квадратные, тогда пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения; x_3, x_4 - корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматреть второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(5) Задание №2

чистовик

вариант 21|0|07

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо

$x^2+y-1 \geq 0.$

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

① № 4

чистовик.

Пусть трассы-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему, связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Направим ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$A = (\cos(\frac{\pi}{6}+x);\ \sin(\frac{\pi}{6}+x))$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим цент окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнения движения машины ~~B~~ B по трассе β

$B = (\cos(\frac{2\pi}{3}-x);\ \sin(\frac{2\pi}{3}-x))$

Но т.к центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отчета связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$B = (2+\cos(\frac{2\pi}{3}-x);\ \sin(\frac{2\pi}{3}-x))$

Теперь мы можем записать формулу расстояние между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е ~~2~~ ~~2≤~~ $x \geq 2$

(2) №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2 \leq 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\pi\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt3}{2}\sin x-\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt3}{2}\sin x\right)^2\leq 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt3+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2\leq 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x = T$

$$\left(2-\frac{\sqrt3+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}T\right)^2\leq 4$$

$$4-2(\sqrt3+1)T+\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)^2T^2\leq 4$$

$$2T^2-2(\sqrt3+1)T\leq 0$$

$$T(T-(\sqrt3+1))\leq 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x\leq\sqrt2\leq\sqrt3+1$, т.к сумма $\cos x+\sin x$ максимальна, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt3+1)<0$ всегда

Остается:

$T\leq 0$

$\sin x-\cos x\leq 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

черновик

№2

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$

ОДЗ

$x^2+y-1 \ge 0$

$x^2+y \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \ge 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \ge 1 + |y+8|$

$1 \ge 1 + |y+8|$ $\qquad y=-8$

$0 \ge |y+8|$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

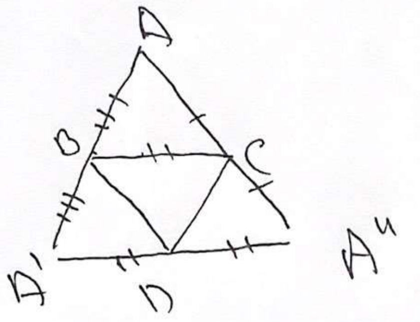
$x_1 = -3$

$\underbrace{9-8-1}_{0} + \underbrace{|-3+8|}_{5} = 5$

~~$x_2 = 3$~~

$\underbrace{9-8-1}_{0}$ $\qquad \underbrace{3+8}_{11} = 11$

№6 черновик



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$A'D = A''D = BC$

$AC = A''C$

$\Delta ABC = \Delta CDA''$ – по 3 сторонам

$\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$

$\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$

$\angle ABC = \angle DA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$

$\Delta BA'D = \Delta ABC$ – по 2м сторонам и углу между ними

$\Delta BCD = \Delta DA'B$ – по 3м сторонам

$S = 4S$

черновик

f(1) + f(2) + f(3) + ... f(12), если f(n) =

$= 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$ $\quad 2n(2n^2 - 3n + 2) + 7$

f(1) = 4 − 6 + 4 + 7 = 11 − 6 + 4 = 15 − 6 = 9

f(2) = 32 − 24 + 8 + 7 = 23

f(3) = 108 − 54 + 12 + 7 = 73

f(12) = 6912 − 864 + 48 + 7 =

= 5993

f(4) = 256 − 96 + 16 + 7 = 137

f(5) = 500 − 150 + 20 + 7 =

= 417

f(6) = 864 − 216 + 24 + 7 =

= 679

f(7) = 1372 − 294 + 28 + 7 =

= 1113

f(8) = 2048 − 384 + 32 + 7 = 648

= 1664 + 32 + 7 =

= 1703

f(9) = 2916 − 486 + 36 + 7 =

= 2473

f(10) = 4000 − 600 + 40 + 7 =

= 3400

= 3447

f(11) = 5324 −

− 726 + 44 + 7 =

= 4598 + 44 + 7 = 4649

121 · 6 = 726

1331 · 4 = 5324

121 · 11 = 1331

1331 · 4 = 5324

1372 − 294 = 1078; 1078 + 35 = 1113

64 · 8 = 512; 512 · 4 = 2048

64 · 6 = 384

4096 − 384 = 3712; 3712 + 39 = 3751

729 · 4 = 2916

81 · 6 = 486

1664 + 39 = 1703

343 · 4 = 1372

81 · 9 = 729

2916 − 486 = 2430; 2430 + 43 = 2473

5324 − 726 = 4598

6912 − 919 = 5993

144 · 2 = 288; 144 · 12 = 1728; 1728 · 4 = 6912

144 · 6 = 864

864 + 55 = 919

32 − 24 = 8

27 · 4 = 108; 108 − 54 = 54

64 · 4 = 256; 256 − 96 = 160

16 · 6 = 96

36 · 6 = 216; 216 · 4 = 864

864 − 216 = 648; 648 + 31 = 679

49 · 6 = 294; 7 · 49 = 343

500 − 110 = 390

125 · 4 = 500

25 · 6 = 150

черновик

№1 $9+23+73+137+417+679+1193+1703+2473+$
$+3447+4649+5993=105+1233+5289+14089=$
$=1338+19378=$
$=20716$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 23 \\ 9 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1113 \\ 1703 \\ 2473 \\ \hline 5289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3447 \\ 4649 \\ 5993 \\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 467 \\ 679 \\ \hline 1233 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1233 \\ 105 \\ \hline 1338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{5278} \\ 14089 \\ 5289 \\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378 \\ 1338 \\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y + 8$

$\sqrt{t-1}$

$1t + y+8 = 1$

О.Д.З

$$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t}$ +

$\sqrt{t-1}$

$x^2 =$

$y+8 \geq 0$ $y \geq -8$

$y+8<0$ $y<-8$

-8 $[-8;+\infty)$

$(-\infty;-8)$ -8

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y+8 = 1$

$x\sqrt{y} + y+8 = 1$ $\sqrt{y} = t$

$xt + t^2 + 8 = 1$ $x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28$

$(x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

28

3

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1$

$x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

10

$9+7$

$\sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

$-1-8 = 1$

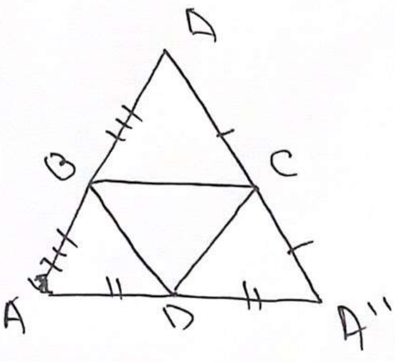
$10-8 = 1$

$9+1$ $x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10-1$

9 $x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$

⑥ Задание №6 чистовик



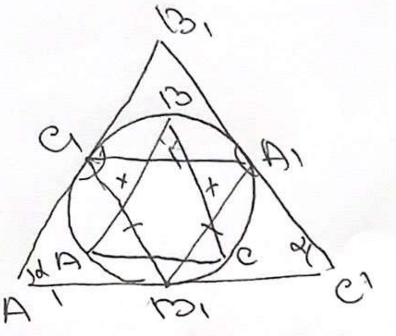
Разложим грани пирамиды на плоскость:

1) по условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $AB = CD = A'B$; $A'D = BC = A''D$, при этом $AC = A''C$, значит $\triangle ABC = \triangle CDA''$ - по 3м сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle DCA'' = \alpha$, $\angle ACB = \angle CA''D = \alpha$, следовательно $\angle ABC = \angle CDA'' = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$, значит $\triangle BA'D = \triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними, а $\triangle BCD = \triangle DA'B$ - по 3м сторонам, следовательно и грани равны => ~~[illegible]~~

=> $S_{поверхн} = 4S$

Ответ: $S = 4S$

(5) №5 чистовик



1) $AB = x = BC = AC_1 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{x} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} =$

$= \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)} \Rightarrow A_1C_1 = x \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A'C_1}{C_1B_1} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} \Rightarrow A'C_1 = C_1B_1 \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} =$

$= x\, \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}$

$\frac{B'C_1}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow B'C_1 = x\, \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} + \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} +$

$+ \frac{1}{2 - 2\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2 - 2\cos\alpha}$ Замена $\cos\alpha = t$

т.к. $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$

$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{2 - 2t} = k(t)$ $\Rightarrow t \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$k'(t) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2(1-t)^2} = -\frac{1}{2t^2} +$ т.к. $2 - 4t < 0$

$+ \frac{1}{2 - 4t + 2t^2}$

$k'(t) > 0 \Rightarrow$ min(k) при $t = \frac{1}{2}$

max(x) при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: min при $t = \frac{1}{2}$, max при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Задача 3 чистовик

Оба уравнения - квадратные, тогда пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения; x_3, x_4 - корни второго уравнения. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} a+1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Из системы получаем, что четность двух произведений корней различна, тогда одно из них нечетное, тогда минимальное нечетное произведение это 15 (как произведение двух минимальных различных нечетных чисел больше 1; 3; 5)

Тогда $a = 3 \cdot 5 = 15$ (если рассматривать второй вариант, то получим $a=16$, а нас интересует минимум)

Ответ: 15

(3) Задание №2

чистовик

вариант 210108

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Для того, чтобы второе уравнение имело действительные решения, необходимо

$x^2+y-1 \geq 0$.

Значит $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Подставим это в первое уравнение

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

Но при этом модуль $|y+8| \geq 0 \Rightarrow |y+8| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -8$. Подставим это в первое уравнение

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 1+8 = 9$

$x = \pm 3$

Проверим втое уравнение

Если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - подходит

Если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не подходит

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

(1) № 4 чистовик.

Пусть трасса-окружности с $r=1$. Трасса α находится левее трассы β. Перейдем в систему, связанную с центром трассы α. (центр окружности α назовем O). Направим ось Ox в сторону центра трассы β. Угол между осью Oy и машиной $A = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение движения машины A по трассе α

$A = (\cos(\frac{\pi}{6}+x); \sin(\frac{\pi}{6}+x))$

Теперь рассмотрим машину B. Обозначим центр окружности β за O_1, тогда угол между O_1x и машиной B будет равен $\frac{2\pi}{3}$. Уравнение движения машины ~~B~~ B по трассе β

$$B = (\cos(\frac{2\pi}{3}-x); \sin(\frac{2\pi}{3}-x))$$

Но т.к. центр трассы β находится на расстоянии 2 от центра O, то в системе отсчета, связанной с O уравнение движения машины B будет выглядеть так

$$B = (2+\cos(\frac{2\pi}{3}-x); \sin(\frac{2\pi}{3}-x))$$

Теперь мы можем записать формулу расстояния между этими машинами, которая будет зависеть только от x. По условию это расстояние должно быть не больше диаметра, т.е. ~~2~~ ~~2≤~~ $x \geq 2$

(2) №4 чистовик

$$|AB| = \sqrt{\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2}$$

≤ 2

Решим

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2\le 4$$

$$\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)^2$$

$$+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2\le 4$$

$$\left(2-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2\le 4$$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x-\cos x)\right)^2\le 4$$

Обозначим $\sin x-\cos x=\cancel{t}\ T$

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}T\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}T\right)^2\le 4$$

$$4-2(\sqrt{3}+1)T+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2T^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2T^2\le 4$$

$$2T^2-2(\sqrt{3}+1)T\le 0$$

$$T(T-(\sqrt{3}+1))\le 0$$

Заметим, что $T=\sin x-\cos x\le\sqrt{2}\le\sqrt{3}+1$, т.к сумма $\cos x+\sin x$ максимальная, когда они равны. Тогда скобка $(T-\sqrt{3}+1)<0$ всегда

Остается:

$T\le 0$

$\sin x-\cos x\le 0$

Это неравенство выполняется ~~когда~~ ~~ровно~~ на половине круга. Значит, ровно половину времени от двух часов расстояние между ними было не больше диаметра трассы

Ответ: 60 минут

№2 черновик

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$

ОДЗ

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

$1 = \sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1 + |y+8|$

$1 \geq 1 + |y+8|$

$0 \geq |y+8|$

$y = -8$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$x_1 = -3$

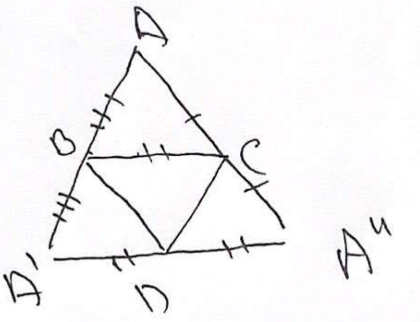
$\underbrace{9-8-1}_{0} + \underbrace{-3+8}_{5} = 5$

~~$x_2 = 3$~~

$\underbrace{9-8-1}_{0}$ $\quad \underbrace{3+8}_{11} = 11$

№6

черновик



$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$A'D=A''D=BC$

$AC=A''C$

$\triangle ABC=\triangle CDA''$ - по 3 сторонам

$\angle BAC=\angle DCA''=\alpha$

$\angle ACB=\angle CA''D=\alpha$

$\angle ABC=\angle DA''=180^\circ-\alpha-\gamma=\beta$

$\triangle BA'D=\triangle ABC$ - по 2м сторонам и углу между ними

$\triangle BCD=\triangle DA'B$ - по 3м сторонам

$S=4S$

черновик

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots f(12)$, если $f(n)=$

$=4n^3-6n^2+4n+7$ $\quad 2n(2n^2-3n+2)+7$

$f(1)=4-6+4+7=11-6+4=15-6=9$

$f(2)=32-24+8+7=23$

$f(3)=108-54+12+7=73$

$f(12)=6912-864+48+7=$

$=5993$

$f(4)=256-96+16+7=137$

$f(5)=500-110+20+7=$

$=417$

$f(6)=864-216+24+7=$

$=679$

$f(7)=1372-294+28+7=$

$=1113$

$f(8)=\cancel{2048}-384+32+7=648$

$=1664+32+7=$

$=1703$

$f(9)=2916-486+36+7=$

2473

$f(10)$ $4000-600+40+7=$

3400

3447

$f(11)=5324-$

$-726+44+7=$

$=4598+44+7=4649$

2048

5993

черновик

№1 $\overbrace{9+23+73}+\overbrace{137+417+679}+\overbrace{1193+1703+2473}+$

$+\overbrace{3447+4649+5993}=\overbrace{105+1233}+\overbrace{5279+14079}=$

$=1338+19378=$

$=20716$

$$\begin{array}{r} 73\\ 23\\ 9\\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1113\\ 1703\\ 2473\\ \hline 5289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3447\\ 4649\\ 5993\\ \hline 14089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137\\ 467\\ 679\\ \hline 1233 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1233\\ 105\\ \hline 1338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{5278}\\ 14079\\ 5289\\ \hline 19378 \end{array}$$

1338

$$\begin{array}{r} 19378\\ 1338\\ \hline 20716 \end{array}$$

№ 2

черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} + y + 8$

$\sqrt{t-1}$

$1 + \quad + y + 8 = 1$

О.Д.З

$$\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

пусть $x^2+y=t$

$\sqrt{t}$ $\quad +$

$\sqrt{t-1}$ $\quad x^2=$

$y+8 \geq 0$ $\quad y \geq -8$

$y+8<0$ $\quad y<-8$

-8 $\quad [-8;+\infty)$

$(-\infty;-8)$

$(x^2+y)^{\frac{1}{2}} + y + 8 = 1$

$x\sqrt{y} + y + 8 = 1$ $\quad \sqrt{y}=t$

$xt + t^2 + 8 = 1$ $\quad x\sqrt{y}$

$t^2 + xt + 8 = 1$

$t^2 + xt + 7 = 0$

$D = x^2 - 4 \cdot 7 = x^2 - 28$ $\quad (x^2)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x^2+y} + y + 8 = 1$ $\quad x + y^{\frac{1}{2}} + y + 8$

$\sqrt{x^2+y} - y - 8 = 1$ $\quad \sqrt{x^2+y-1} + x + 8 = 5$

$-1-8=1$ $\quad \sqrt{x^2+y-1} - x - 8 = 5$

$10-8=1$ $\quad 9+1 \quad x + y^{\frac{3}{2}} + 8 = 1$

$10-1$

$9 \quad x + \sqrt{y^3} + 8 = 1$