МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Грицык Александра Сергеевна**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	15	0

Черновик

① $f(x) = x^2 + 10x + 20$ $D = 100 - 40 = 60 = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 4 \cdot 15$

$f(f(f(f(f(x))))) = 0$ $x_{1,2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -5 \pm \sqrt{15}$

$x^2 + 10x + 20 = (x + (-5 + \sqrt{15}))(x - (-5 - \sqrt{15})) =$

$= (x + 5 - \sqrt{15})(x + 5 + \sqrt{15})$

$x = 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + \dots + 2^{-2021}$

$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$

$x > 0$

$x - 4 > 0$

$x > 4$

$x \geq 4\sqrt{x-4}$

$x^2 \geq 16(x-4)$

$P(x) = x^5 + Ax^4$

$x = 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + \dots + 2^{-2021}$

$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = ?$

$x = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2021}}$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{2^{2021}}$ образ. геом. прогрессию!!!

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2021}} - 1\right)}{1/2 - 1} = 1 - \frac{1}{2^{2021}}$

$\Rightarrow \boxed{x = 8 - \frac{1}{2^{2021}}}$ Пусть $t = \sqrt{x-4}$, $t^2 = x - 4 \Leftrightarrow x = t^2 + 4$; $t \geq 0$;

$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = \sqrt{t^2 + 4 + 4t} + \sqrt{t^2 + 4 - 4t} = \sqrt{(t+2)^2} + \sqrt{(t-2)^2} =$

$= \boxed{|t+2| + |t-2|}$

Т.к. $t \geq 0$, то $|t+2| = t + 2$. Из $x = 8 - \frac{1}{2^{2021}}$ $x < 8 \Rightarrow$

$t = \sqrt{x-4} < \sqrt{8-4} = 2 \Rightarrow |t-2| = 2 - t$

$|t+2| + |t-2| = t + 2 + 2 - t = 4$

$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ $P(-1) = 8$; $P(1) = 22$

~~$P(-1) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 8$,~~

~~$P(1) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 22$~~

$\begin{cases} P(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 8, \\ P(1) = 1 + A + B + C + D + E = 22 \end{cases}$

$+ \begin{cases} A - B + C - D + E = 9, (1) \\ A + B + C + D + E = 21 (2) \end{cases}$ $2A + 2C + 2E = 30$

$\underline{A + C + E = 15}$

Подставили в (1)

$15 - B - D = 9$

$6 = B + D$

$\begin{cases} A + C + E = 15, \\ B + D = 6 \end{cases}$ Дано, что ~~все~~ A, B, D, C и E - целые числа. Тогда $A + C$ могут быть равны 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14. E принимает тогда опр. значение соотв условию. Тогда, если $A + C = W$, то $W \in [2; 14]$ и W ~~тоже~~ – целое число.

Аналогично, B может быть 1; 2; 3; 4; 5; ~~6; 7; 8~~, когда D принимает.

(Булгаев)

② $x = 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + \dots + 2^{-2024} = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2024}}$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{2^{2024}}$ образуют геометрическую прогрессию. $\Rightarrow$ их сумма равна:

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2024}} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = -\left(\frac{1}{2^{2024}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{2^{2024}}$

Тогда $\boxed{x = 8 - \frac{1}{2^{2024}}}$.

Пусть $t = \sqrt{x-4}$, $t^2 = x - 4 \Leftrightarrow x = t^2 + 4 \left(t \geq 0\right) \Rightarrow$

$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = \sqrt{t^2+4+4t} + \sqrt{t^2+4-4t} = \sqrt{t^2+4t+4} + \sqrt{t^2-4t+4} =$

$= \sqrt{(t+2)^2} + \sqrt{(t-2)^2} = |t+2| + |t-2|$

Т.к. $t \geq 0$, то $|t+2| = t+2$. Из $x = 8 - \frac{1}{2^{2024}}$ видно, что $x < 8 \Rightarrow$

$t = \sqrt{x-4} < \sqrt{8-4} \Leftrightarrow t < 2 \Rightarrow |t-2| = 2 - t$

Тогда $|t+2| + |t-2| = t + 2 + 2 - t = 4$

Ответ: 4.

③ Т.к. известно, что $P(-1) = 8$, $P(1) = 22$, то:

$$\begin{cases} P(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 8, \\ P(1) = 1 + A + B + C + D + E = 22 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$+ \begin{cases} A - B + C - D + E = 9, \ (i) \\ A + B + C + D + E = 21 \ (ii) \end{cases}$$

$2A + 2C + 2E = 30$

$A + C + E = 15$

Подставляем $A + C + E = 15$ в (i): $15 - B - D = 9$;

$B + D = 6 \Rightarrow \begin{cases} A + C + E = 15, \\ B + D = 6 \end{cases}$

Дано, что A, B, C, D, E - целые числа. Значит, A+C могут быть равны только 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14. Тогда E принимает определенное значение, соответствующее условию. Пусть $A + C = w$, где $w \in [2; 14]$ и w - целое число. Тогда A может принимать значения $1; 2; 3 \dots; w-1;$. И для каждого A существует соответствующее значение C. Тогда вариантов будет:

$1 + 2 + 3 + \dots + 13 = \frac{13+1}{2} \cdot 13 = 7 \cdot 13 = 91.$

Аналогично, B может быть 1; 2; 3; 4; 5, когда D принимает соответствующее значение, чтобы $B + D = 6$. Всего вариантов 5.

Итого: $91 \cdot 5 = 455$.

Ответ: 455.

собств. знач., при $D>0$.

Если $A+C=W$, где $2 \le W \le 14$, то A может принимать значение 1; 2; 3 ...; W-1 (!!! это 13 случаев). И для каждого A существует соответствующее значение C.

Тогда всего вариантов $W = A+C$: $1+2+3+\dots+13 = \frac{13+1}{2} \cdot 13 = 13 \cdot 7 = 91$.

Всего вариантов $91 \cdot 5 = 455$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times\ 5 \\ \hline 455 \end{array}$$

- $f(x) = x^2+10x+20 = x^2+10x+25-5 = (x+5)^2-5 = y$

$f(f(f(f(f(x))))) = 0$

$f(f(x)) = (y+5)^2-5 = \left((x+5)^2-5+5\right)^2-5 = (x+5)^4-5 = a$

$f(f(f(x))) = (x+5)^2-5 = \left((x+5)^4+5-5\right)^2-5 = (x+5)^8-5$

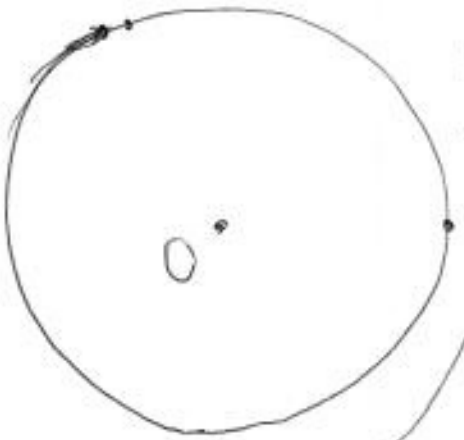
Аналогично вычисляя получаем

$f(f(f(f(f(x))))) = (x+5)^{32}-5 = 0$

$(x+5)^{32} = 5$

$x+5 = \pm\sqrt[32]{5}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt[32]{5} - 5$



пост. скорость

велосипедист: V_1

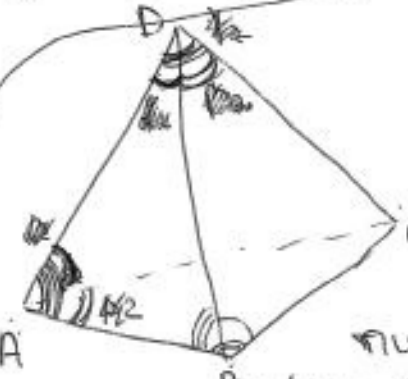
мотоциклист: V_2

4028м

38мин

64мин

(·)O - центр окружности



A и B C и D

$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = S$

$S_{пов} = ?$

$\Rightarrow$ по 3-му признаку $\triangle$ равны $\Rightarrow S_{пов} = 2S$

сумма плоских углов в пирамиде: $180 \cdot 4 = 720$

$\angle B \triangle$ 180°.

Т.к. $\angle$ при вершинах C и D равны, и A и B одинак. то сумма углов при вершинах A и C равно $720/2 = 360°$

Т.к. в $\triangle$ сумма равна 180, то сумма углов 4х вершин равна

① $f(x) = x^2 + 10x + 20 = x^2 + 10x + 25 - 5 = (x+5)^2 - 5 = y$

$f(fx) = (y+5)^2 - 5 = ((x+5)^2 - 5 + 5)^2 - 5 = (x+5)^4 - 5 = a$

$f(f(fx)) = (a+5)^2 - 5 = (x+5)^8 - 5$

$\Rightarrow f(f(f(f(f(x))))) = (x+5)^{32} - 5 = 0$

$(x+5)^{32} = 5$

$x+5 = \pm\sqrt[32]{5}$

$x_1 = \sqrt[32]{5} - 5$

$x_2 = -\sqrt[32]{5} - 5$

Ответ: $x_1 = \sqrt[32]{5} - 5$ и $x_2 = -\sqrt[32]{5} - 5$.

⑥ Т.к. пирамида состоит из 4х треугольников и в каждом сумма углов равна 180°, то сумма всех плоских углов в пирамиде равно $180 \cdot 4 = 720°$.

Т.к. сумма углов при вершинах C и D и A и B одинаковая, то сумма углов при вершинах A и C равна $720/2 = 360°$. Но сумма углов в треугольнике равна 180° $\Rightarrow$ сумма углов вершин равна. По третьему признаку все четыре треугольника в пирамиде равны.

$\Rightarrow S_{пов.} = S + S = 2S$

Ответ: $2S$.

⑤ Рассмотрим первое кантование первого квадрата:

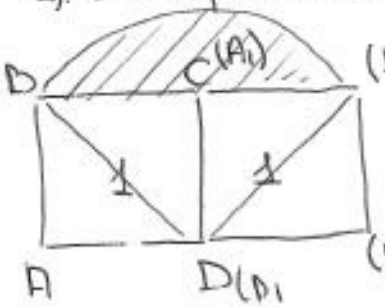
1). Оно проходит на вершине D $\Rightarrow$ BD = 1 - самое длинное расстояние;

2). $S_{сектора\ BDB_1} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$

3) $S_{\triangle BDB_1} = \frac{\sqrt{1}}{4} = \frac{1}{2}$

4) $S_{сегмента} = \frac{\pi}{4} - S_{\triangle BDB_1} = \frac{\pi - 2}{4}$

5). Пусть $S_п$ - площадь пересечения сегментов.



Тогда площадь окраски $5 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\pi - 2}{4} - 3 \cdot S_{п_1} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + 4\pi - 12 S_{п_1}) = S_1 = \frac{5}{2} + \pi - 2 - 3S_{п_1}$

Рассмотрим первое кантование второго квадрата:

1) $S_{сектора\ B'D'B_1'} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{\pi}{60}$

2) $S_{\triangle B'D'B_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

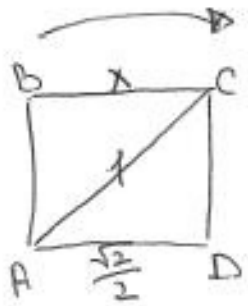
3) $S_{сегмента} = \frac{\pi}{60} - \frac{1}{32}$

$S_2 = 26 \cdot \frac{1}{16} + 25 \cdot \left(\frac{\pi}{60} - \frac{1}{32}\right) - 24 \cdot S_п/8 = \frac{13}{8} + \frac{\pi}{4} - \frac{25}{32} - 3S_п$

$S_{ч1} - S_2 = \frac{5}{2} + \pi - 2 - 3S_{п_1} - \frac{13}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{25}{32} + 3S_{п_1} = \frac{3\pi}{4} - 12$

Черновик

5

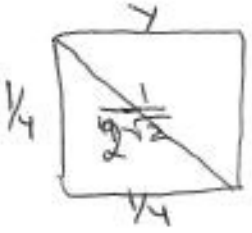


$1^2 = x^2 + x^2$

$1 = 2x^2$

$\frac{1}{2} = x^2 \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ сторона первого квадрата равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$S = \frac{1}{16}$

$P = 1$

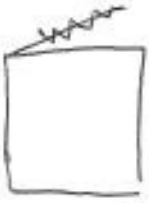
$1 = 4y$

$y = 1/4 \quad \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4\cdot 2}$

$\Rightarrow$ сторона второго квадрата равна 1/4

4р.

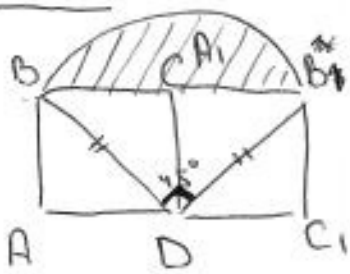
25 сегментов 25р. $\Rightarrow$ 26 квадр.



Первое кантование: на вершине D

$BD = 1$ ((·)B самая дальняя от (·)D)

Найдем S сектора $BDB_1 = \frac{\pi\cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$ (45°)



$\angle BDB_1 = \pi/4$

$180 - 45 = 135$

$S_{\triangle BDB} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin BDB_1 = \frac{1}{2}\cdot$

S_1 сегмента $= \pi/4 - S_{\triangle BDB_1} = \pi/4 - \pi/2$

S_π - площадь пересеч. сегментов.

Площадь окраски: $S_1 = 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} + 4\cdot\frac{\pi-\sqrt{2}}{4} - 3\cdot S_{\pi_1} =$

$= \frac{5\sqrt{2}}{4} + \pi - \sqrt{2} - 3S_{\pi_1} = \frac{5\sqrt{2}+4\pi-4\sqrt{2}-12S_{\pi_1}}{4} = \frac{\sqrt{2}+4\pi-12S_{\pi_1}}{4}$

$32 \times 4 = 128$

$S_2 =$

$\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$S = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$

$P = 1$

$16 \times 5 = 80$

$1 = 4y$

$y = 1/4$

$40 + 12$

$\frac{5}{2} - 2 - \frac{13}{8} + \frac{25}{32}$

$26 - 16 = 200$ | 16

$\frac{80-64-52+25}{32} =$

26 16

13 8

$65 + 52 = 117$

$117 - 105 = 12$