МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Дерюгин Тимофей Юрьевич**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	0	0	5	15	15

Вариант 210108

Чистовик

Задача 1

1

$? = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(12)$, если $f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$

Разобьём исходный многочлен на одночлены

$\sum_{n=1}^{k} n^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = a(k)$

$\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = b(k)$

$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2} = c(k)$

Формула суммы последовательностей $A \cdot n \wedge B$ $\Rightarrow f(1) + f(2) + \ldots + f(12)$

$4a(k) - 6b(k) + 4c(k) + 7k$

В нашем случае $k = 12$, т.к. последовательность от 1 до 12

$4 \cdot \frac{144 \cdot 169}{4} - 6\frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} + 4\frac{12 \cdot 13}{2} + 7 \cdot 12 = 24336 - 3900 + 312 + 84 = \boxed{20832}$

Ответ: 20832

Чистовик

②

Задача №2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 & (1) \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 & (2) \end{cases}$$

(1):

$0 \le \sqrt{x^2+y} \le 1$

$0 \le |y+8| \le 1$

$\sqrt{x^2+y} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2+y \le 1 \Rightarrow x^2+y-1 \le 0$, но во 2-ом уравнении (2) системы есть $\sqrt{x^2+y-1} \Rightarrow x^2+y-1 \ge 0$

Получаем, что $0 \le x^2+y-1 \le 0 \Rightarrow x^2+y-1=0$

$x^2+y=1$

Подставляем в систему

$$\begin{cases} 1+|y+8| = 1 \\ 0+|x+8| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y+8| = 0 \\ |x+8| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-8 \\ \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-13 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=-8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-13 \\ y=-8 \end{cases} \end{array}\right. \\ x^2+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=-8 \end{cases} \\ (-3)^2+(-8)=1 \text{ — верно } (x^2+y=1) \\ \begin{cases} x=-13 \\ y=-8 \end{cases} \\ (-13)^2+(-8)=1 \text{ — неверно } (x^2+y=1) \end{array}\right.$$

из полученного ранее

$$\boxed{\begin{cases} x=-3 \\ y=-8 \end{cases}}$$

Ответ: $x=-3$; $y=-8$

3

Чистовик

Задача №3

$x^2+bx+a=-1$
$x^2+cx+a=0$ → имеют по два целых корня, больших 1

Наименьшее a-?

Теорема Виета для 1го уравнения

$x^2+bx+a+1=0$

$x_1+x_2=-b$

$x_1+x_2>2 \Rightarrow -b>2 \Rightarrow b<-2$

x_1x_2 - целое число $\Rightarrow a+1$ ~~[illegible]~~ целое ; $a+1>1 \Rightarrow a>0$

$D=b^2-4(a+1)>0$, т.к. 2 корня и полный квадрат, чтобы корни были целыми

Теорема Виета для 2го уравнение

$x^2+cx+a=0$

$x_1+x_2=-c \Rightarrow c<-2$

x_1x_2-целое $\Rightarrow a$ - целое $\Rightarrow a>1$

$D=c^2-4a>0$ и полный квадрат

$$\begin{cases} b^2>4a+1 \\ c^2>4a \\ b<-2 \\ c<-2 \\ a\in\mathbb{Z};\ a>1 \end{cases}$$

b и c - целые

Посмотрим на различные варианты a:

$a=2$

c^2-4a - полн квадрат
c^2 - полн квадра → c^2 и c^2-8 полные квадраты

Может быть только при $|c|=3$ и $c^2=9$

иначе разности других квадратов не будет $\Rightarrow$

$\Rightarrow |c|=3 \xRightarrow{(c<0)} c=-3 \Rightarrow x^2-3x+2=0$

$x=1$ - корень $\Rightarrow$ не подходит, т.к. $x>1 \Rightarrow a=2$ не подходит

Чистовик

4

Задача №3 (продолжение)

Пусть $a=3$

c^2-4a - квадрат $\Rightarrow c^2-4$ - квадрат $\Rightarrow c=-4 \Rightarrow x^2-4x+3=0$; $x=1$ - корень $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не подходит

Пусть $a=4$

c^2-4a - квадрат $\Rightarrow \begin{cases} c^2=25 \\ c<0 \end{cases} = c=-5$

$x^2-5x+4=0$; $x=1$ - корень $\Rightarrow$ не подходит

$\Downarrow$

Предположение: таких a не существует

Пусть $a=k$; $k\in\mathbb{Z}$; $k>1$

$\Rightarrow c^2-4k$ - полный квадрат $\Rightarrow c^2=k^2+2k+1=(k+1)^2$,

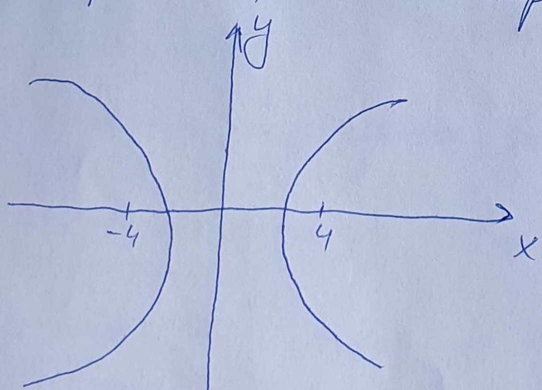
иначе c^2-4k не будет квадратом $\Rightarrow x^2-(k+1)\cdot x+k=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1$ - это корень $\Rightarrow$ не подходит $\Rightarrow$ таких a не существует.

Ответ: таких a не существует

Замечание:

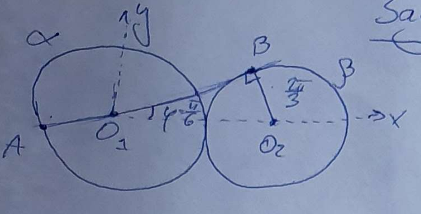
$x^2-y^2=4$ в N-ых числах не может иметь более 1-го решения, т.к. это гипербола с графиком:



Чистовик

5

Задача №4



$t_1 = t_2 = 2\tau$ время прохождения круга

t - ? такое, что расстояние $\leq D$

$\sin\varphi = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

Относительно O_1; $\frac{2\pi \text{ рад}}{2\tau} = \pi$ рад/τ – угловая скорость автомобиля

$$\begin{cases} r_A = R \\ \varphi_A = \frac{7\pi}{6} + \pi\tau \end{cases}$$

Относительно O_2

$$\begin{cases} r_B = R \\ \varphi_B = \frac{2\pi}{3} - \pi\tau \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x_A &= R\cos\left(\frac{7\pi}{6} + \pi\tau\right) \\ y_A &= R\sin\left(\frac{7\pi}{6} + \pi\tau\right) \\ x_B &= 2R + R\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\tau\right) \\ y_B &= R\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\tau\right) \end{aligned}\right.$$

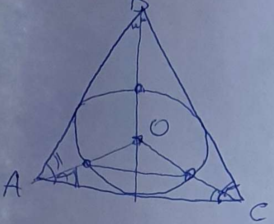
Пусть L – расстояние между автомобилями A и B

$$L^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left(2R + R\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\tau\right) - R\cos\left(\frac{7\pi}{6} + \pi\tau\right)\right)^2 + \left(R\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\tau\right) - R\sin\left(\frac{7\pi}{6} + \pi\tau\right)\right)^2 = \ldots\ldots$$

6

Чистовик

Задача N5



$S=1 \quad 30^\circ \le \alpha \le 60^\circ$

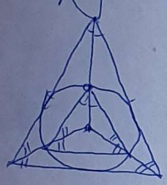
Пусть O - центр круга => его радиус

$R \le \min(\rho(O,AB), \rho(O,BC), \rho(O,AC))$,

где ρ - расстояние от точки до стороны =>

=> $R \le$ радиус вписанной окружности => круг - вписанный =>

=> вершины полученного треугольника - точки пересечения вписанной окружности и биссектрис исходного треугольника



$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH = 1 \Rightarrow AC \cdot BH = 2$

$\frac{R}{\frac{AC}{2}} = tg\frac{\alpha}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{2} AC\, tg\frac{\alpha}{2}$

$\frac{\frac{AC}{2}}{OC} = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow OC = \frac{AC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{KM}{AC} = \frac{OM}{OC} = \frac{R}{\frac{AC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{R}{AC} \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$\frac{KM}{AC} = \frac{R}{AC} \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2} AC\, tg\frac{\alpha}{2}}{AC} \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$

$\frac{KM}{AC} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ коэфф. подобия

$\triangle KLM$ и $\triangle ABC = \sin\frac{\alpha}{2}$

$\begin{cases} \frac{S(\alpha)}{S_{ABC}} = \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ S(ABC) = 1 \end{cases} \Rightarrow S(\alpha) = \sin^2\frac{\alpha}{2}$. При $30^\circ \le \alpha \le 60^\circ$ $\sin\alpha$ это строго возрастающая функция =>

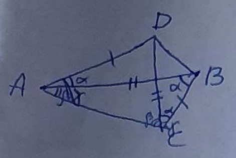
$\Rightarrow \min S(\alpha) = \sin^2\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sin^2(15^\circ) = \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \boxed{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$\max S(\alpha) = \sin^2\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \sin^2(30^\circ) = \sin^2\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Ответ: $\min S(\alpha) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$; $\max S(\alpha) = \frac{1}{4}$

Чистовик

Задача №6



$\angle\alpha=\angle DAB$
$\angle\beta=\angle BAC$
$\angle\gamma=\angle DAC$
$\Big\}\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$S_{BCD}=S$; $S_{ABC}+S_{BCD}+S_{ADC}+S_{ADB}=?$

$AB=CD$; $AD=BC$

I Рассмотрим треугольники ADB и DBC
Они равны по 3-м сторонам: $AB=DC$; $AD=CB$; BD-общая сторона
Значит $S_{ADB}=S_{DBC}=S$; $\alpha=\angle DAB=\angle DCB$

II Рассмотрим треугольники ADC и ABC
Они равны по 3-м сторонам: $AD=BC$; $AB=DC$; AC-общая сторона
Значит $S_{ABC}=S_{ADC}$; $\beta=\angle BAC=\angle DCA$; $\gamma=\angle DAC=\angle BCA$

III Рассмотрим треугольник ABC
В нем $\angle BAC=\beta$; $\angle BCA=\gamma$
Вспомним, что по условию $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \Rightarrow \alpha=180-\beta-\gamma$
$\Rightarrow \angle ABC=\alpha$

IV Заметим, что $\Delta ABC=\Delta DCB$ по 2-м сторонам и углу между ним, значит $S_{ABC}=S_{BCD}=S$
Из II и I $S_{ABC}=S_{ADC}$; $S_{ADB}=S_{DBC} \Rightarrow S_{ABC}=S_{ADC}=S_{ADB}=S_{DBC}=S$

V S поверхности пирамиды $=S_{ABC}+S_{ADC}+S_{BCD}+S_{ABD}=\boxed{4\cdot S}$

Ответ: 4S

Чистовик

8

Задание №7

$(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021} \overset{?}{=} n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot7\cdot11}$

$n; m; k; l \in N$

$1<\sqrt{\frac{11}{7}}\frac{k}{m}<1+10^{-500}$

$(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021}$ каждое слагаемое при раскрытии скобок имеет вид:

$C_{2021}^{a}C_{2021-a}^{b}(\sqrt{5})^{a}(\sqrt{7})^{b}(\sqrt{11})^{2021-a-b}$, где $a; b\in N\cup\{0\}$

$\begin{cases} 0\le a\le 2021 \\ 0\le b\le 2021-a \end{cases}$

Ясно, что $C_{2021}^{a}; C_{2021-a}^{b}\in N$

Если a - четно, то $(\sqrt{5})^{a}\in N$ и $2021-a-b\equiv 1-b \pmod 2$, т.е. имеет противоположную четность с b

Получаем:

1) a - четно
b - нечетно
$2021-a-b$ - четно $\Big\}$ $(\sqrt{5})^{a}\in N$, $(\sqrt{11})^{2021-a-b}\in N$

$\Rightarrow$ получаем слагаемое вида $c\cdot\sqrt{7}$

2) a - четное
b - четное
$2021-a-b$ - нечетное $\Big\}\Rightarrow d\sqrt{11}$

3) a - нечетное
b - четно
$2021-a-b$ - четно $\Big\}\Rightarrow l\sqrt{5}$

Чистовик

9

Задание №7 (продолжение)

4) а - нечетно
в - нечетно
2021 - а - в - нечетно } $\not\exists \sqrt{5 \cdot 7 \cdot 11}$

Сумма таких слагаемых будет нечетной:
$n\sqrt{5} + m\sqrt{7} + k\sqrt{11} + l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}$; $n, m, k, l \in \mathbb{N}$ ▨

Черновик

№2

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2+y+1} + |x+8| = 5$

$1 \geq \sqrt{x^2+y} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2+y \leq 1$

$0 \leq \sqrt{x^2+y+1} \Rightarrow x^2+y+1 \geq 0 \Rightarrow x^2+y \leq 1$

$\Rightarrow x^2+y=1$

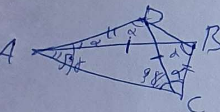
$\begin{cases} |y+8| = 0 \\ |x+8| = 5 \end{cases}$

Ответ...

№1

~~Последовательность при $k \geq 12$~~

№6



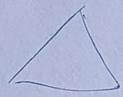
$\alpha+\beta+\gamma=180$

По 3-м сторонам $\triangle ABD = \triangle DBC$

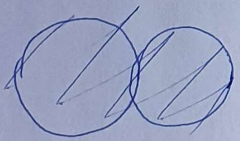
По 3-м сторонам $\triangle ADC = \triangle ABC$

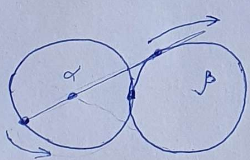
$S_{BCD} = S \Rightarrow S_{ABD} = S$.

~~$a+b+$~~

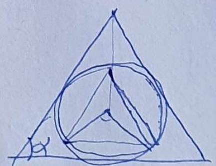


№4





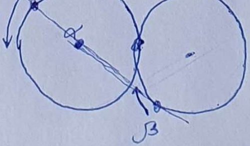
№5

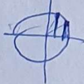


$v = \frac{S}{2}$

$S = 2\pi r$

$v = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$





~~$\frac{1}{2} ab \sin\alpha = 1$~~

$\frac{1}{2} ab\sin\alpha = (2a+b)r$

$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 4R = \frac{abc}{S(\alpha)}$

$2S\sin\alpha = (2a+b)k^3$

$ab\sin\alpha = 2$

$r = \frac{\frac{1}{2}ab\sin\alpha}{2a+b} = \frac{abc \cdot k^3}{45}$

11

Черновик

N1.

$f(1)+f(2)+f(3)+\dots f(12)$, если $f(n)=4n^3-6n^2+4n+7$

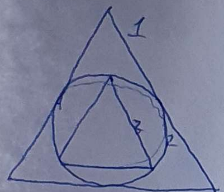
$\sum_{n=1}^{n} n^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = a(k)$

$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2} = c(k)$

$\sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = b(k)$

в эти формулы все подставлено при $k=12 \to$ ответ...

N5

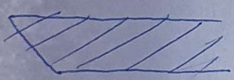


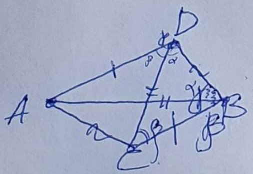
$S_1 = 1$

$S_1 = pr = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha$

$r = \frac{\frac{1}{2}ab\sin\alpha}{P} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin\alpha}{\dots}$

N6

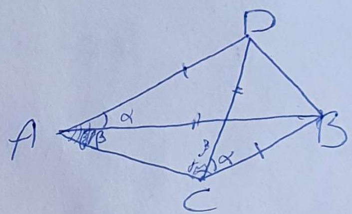




$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$BCD=S$

$S=\frac{1}{2}$



$S_{ABC}=S_{ADC}$

$S_{BCD}=S_{ABD}=S \Rightarrow S_{общ}=4S$

N2

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+|y+8|=1\\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5\end{cases}$$

$x^2+y-1\geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1-y$

$\sqrt{t}+|y+8|=1$

$y\geq -8$: $\sqrt{t}+y+8=1$, $\sqrt{t}+y=-7$, $y\leq -7$, $y\in[-7;-8]$

$y<-8$: $\sqrt{t}-y-8=1$, $\sqrt{t}-y=9$

$\sqrt{t-1}+|x+8|=5$

$x\geq -8$: $\sqrt{t-1}+x+8=5$, $\sqrt{t-1}+x=-3$, $x\leq -3$

$x<-8$: $\sqrt{t-1}-x-8=5$, $\sqrt{t-1}-x=13$

смотрим на ОС.