МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Дударенко Денис Вадимович**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	15	0	15

Чистовик № 1

№ 1.

$f(x) = x^2+10x+20 = x^2+10x+25-5 = (x+5)^2-5$.

$f(f(x)) = (((x+5)^2-5)+5)^2-5 = ((x+5)^2)^2-5 = (x+5)^4-5$

$f(f(f(x))) = ((x+5)^4-5+5)^2-5 = (x+5)^8-5$

$f(f(f(f(x)))) = ((x+5)^8-5+5)^2-5 = (x+5)^{16}-5$

$f(f(f(f(f(x))))) = ((x+5)^{16}-5+5)^2-5 = (x+5)^{32}-5=0$

$\Downarrow$

$(x+5)^{32} = 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+5 = \sqrt[32]{5} \Rightarrow x = \sqrt[32]{5}-5 \\ x+5 = -\sqrt[32]{5} \Rightarrow x = -\sqrt[32]{5}-5 \end{array}\right.$

Ответ: $x = -\sqrt[32]{5}-5;\ \sqrt[32]{5}-5$

Черновик

$$2\pi R < \frac{v_ш - v_в}{v_в} \cdot 4026 = \frac{\frac{2\pi R}{36} \cdot 4026}{v_в} - 4026$$

$$\frac{(2\pi R + 4026) \cdot 36}{\cancel{4026}} \leftarrow \frac{2\pi R}{v_в}.$$

$$4026 \,|\, 72$$

$$30$$

$$2\pi R - v_в \cdot t_2 > 4026$$

$$t_2 < \frac{2\pi R - 4026}{v_в}$$

$$2\pi R = (v_в - v_в)\, t.$$

$$2\pi R > \frac{2\pi R - 4026}{v_в} \cdot \frac{2\pi R}{36} - 2\pi R + 4026$$

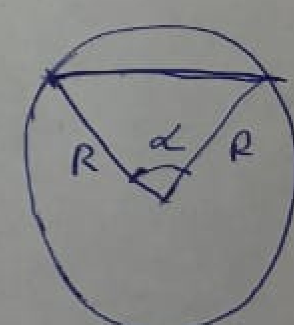
$$2\pi R = L.$$

$$L > \frac{L - 4026}{v_в} \cdot \frac{L}{36} - L + 4026$$

$$\frac{(2L - 4026) \cdot 36}{L} > \frac{L - 4026}{v_в}$$

$$\frac{(2L - 4026) \cdot 36}{L} + \frac{4026}{v_в} > \frac{L}{v_в} > 61$$

$$72$$



$x^2+10x+20=f(x)$ Черновик стр №1

$f(x)=0$, $x=-5\pm\sqrt{25-20}=-5\pm\sqrt{5}$

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=$

$=\sqrt{x-1+1+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1+1-2\sqrt{x-1}}$ $x-1<1$.

$\cancel{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$ $\sqrt{(\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}\cdot 1+1^2}+\sqrt{1-2\sqrt{x-1}\cdot 1+(\sqrt{x-1})^2}=$

$=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2$.

$P(x)=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

$P(-1)=8$ $A-B+C-D+E-1=8$

$P(1)=22$ $A+B+C+D+E+1=22$

$2A+2C+2E=30$

1) $A+C+E=15$

$2B+2D+2=14$

2) $B+D=6$.

$A+C+E=15$

$A=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13$

13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1.

$B=1,2,3,4,5$

5 вар.

$\frac{14\cdot 15}{2}=$

$13\cdot 7=91$, $91\cdot 5=455$, 105

$35\cdot 15=525$

$(13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)\cdot 5=$

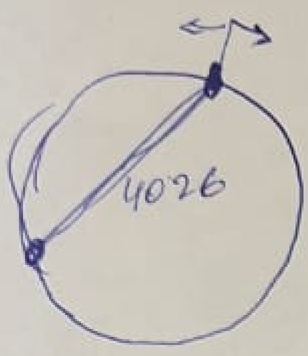
$=\frac{13\cdot 14}{2}\cdot 5=7\cdot 5\cdot 13=455$

$\frac{2\pi R}{v_м} = 36$ мин

Черновик.

$v_м = \frac{2\pi R}{36}$

$\frac{2\pi R}{v_в} \in (61; 72)$



1) $t_1(v_в + v_в) = 2\pi R$

$4026 < v_в \cdot t_1 \qquad t_1 > \frac{4026}{v_в}.$

2) $2\pi R = t_2(v_м - v_в)$

$t_2 \cdot v_в > 4026$

• 2 случая

$t_2 > \frac{4026}{v_в}.$

$2\pi R < \frac{v_в + v_м}{v_в} \cdot 4026.$

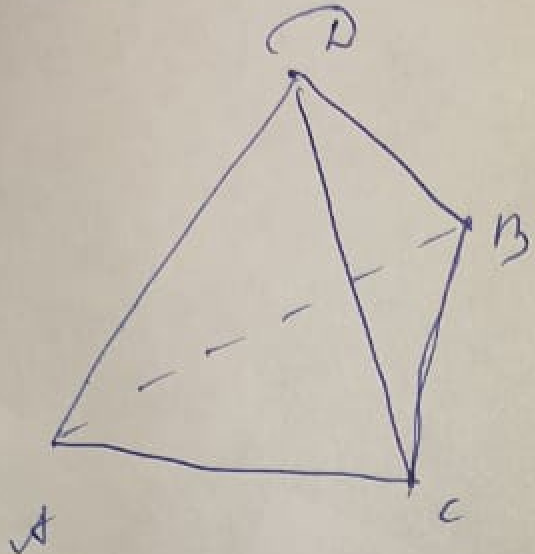
$2\pi R < 4026 + \frac{4026 \cdot v_м}{v_в} = 4026 + \frac{4026 \cdot \pi R}{18 v_в}.$

$\frac{(2\pi R - 4026) \cdot 36}{4026} < \frac{2\pi R}{v_в} < 72$

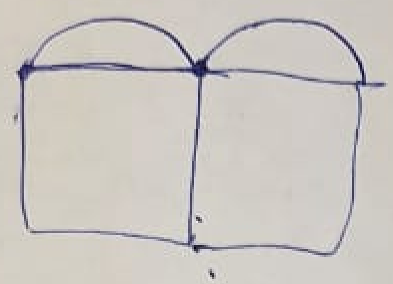
$\pi R - 2013 < 4026$

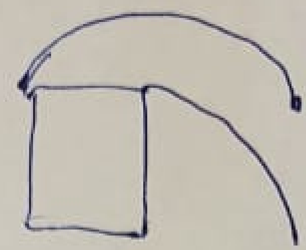
$\pi R < 6039.$

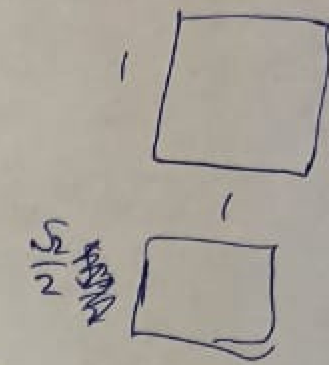
Черновик

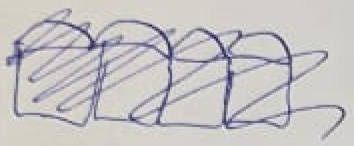


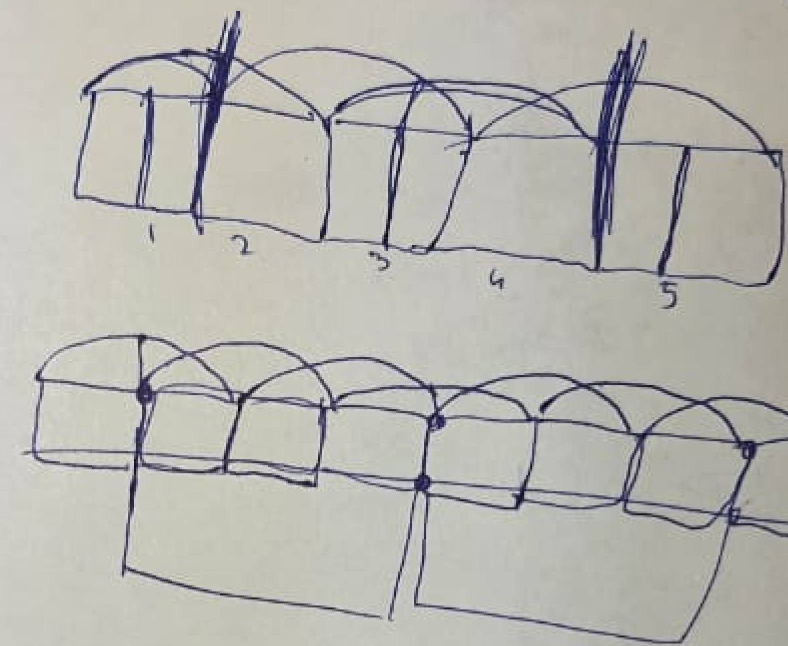
Черновик



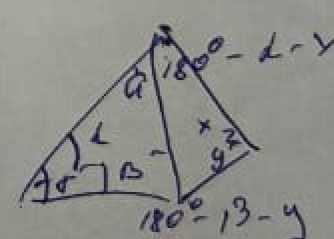








№4.



$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\, 61 \\ \hline 36 \\ 216 \\ \hline 2196 \end{array}$$

$180° - a - y$

$$\begin{array}{r} 61 \\ -\,36 \\ \hline 25 \end{array}$$

Черновик

$~~v_м~~ \quad v_м \cdot 36 = 2\pi R. \qquad м / мин.$

$61 < \frac{2\pi R}{v_в} \; \frac{<}{~~=~~} \; 72 \qquad \Rightarrow v_м = \frac{\pi R}{18}$

$t_2 = \frac{4026}{v_в}$

$\frac{\pi R}{18} \cdot \frac{4026}{v_в} \neq ~~2\pi R~~ \quad ~~v_м~~ \; 4026 = 2\pi R.$

$\begin{cases} 2\pi R - v_в \cdot t_2 = 4026 \\ v_м \cdot t_2 = 2\pi R + v_в \cdot t_2 \end{cases} \qquad t_2 = \frac{2\pi R - 4026}{v_в}$

$\frac{\pi R}{18} \cdot \frac{2\pi R - 4026}{v_в} = 2\pi R + 2\pi R - 4026$

$\pi R = a, \quad v_в = b$

$~~2a~~ - \frac{a}{18} \cdot \frac{4026}{b} = a - 4026.$

$\frac{a \cdot (2a - 4026)}{18 \cdot b} = 4a - 4026.$

$\frac{a}{18b} = \frac{(a - 4026)}{4026}$

$\frac{(a - 4026)}{4026}(2a - 4026) = 4a - 4026$

$2a^2 - 3 \cdot 4026a + 4026^2 = 4 \cdot 4026\, a - 4026^2$

$2a^2 - 7 \cdot 4026a + 2 \cdot 4026^2 = 0$

$a = \frac{7 \cdot 4026 \pm \sqrt{49 \cdot 4026^2 - 16 \cdot 4026^2}}{2 \cdot 2}$

Черновик

2022 →
2022

2021 2024

2 2
H 4
4 4

2 2
2 2
H 4
H 4

44
H4 H H.
44 →
44 ←
4H
→ 44

→ 3;3
2;3 ←
→ 2;2
1; ←

2k1 → 2k-1; 1

2k-2; 1 ←
...

2;2 → 2;1
1;

4;

4;2
4;3
5;2
4+2k; 2
4; 2+2k.

2;2 → 2;1
← 1;1
→ 1;0

Черновик

$f(x)=x^2+10x+20=(x+5)^2-5$

$f(f(x))=((x+5)^2-5+5)^2-5=(x+5)^4-5$

$f(f(\overset{f(x)}{x}))=(x+5)^8-5$

$f(f(f(f(x))))=(x+5)^{32}-5=0$

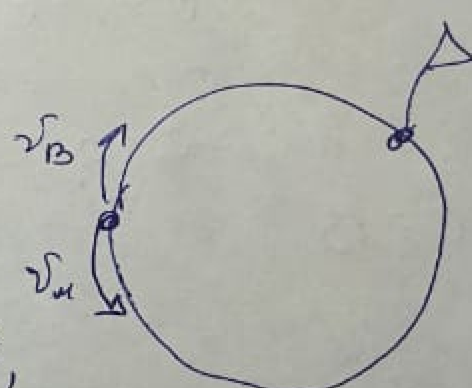
$(x+5)^{32}=5$

$x+5=\pm\sqrt[32]{5}$

$x=\pm\sqrt[32]{5}-5$

R, $v_В$, $v_М$

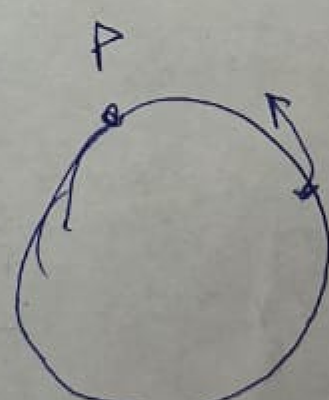
трасса $2\pi R$.



1) $\leftarrow$ $\rightarrow$

$v_В \cdot t_1 = 2\pi R - v_м \cdot t_1$

$v_В \cdot t_1 = 4026.$



2) $\leftarrow$ $\leftarrow$

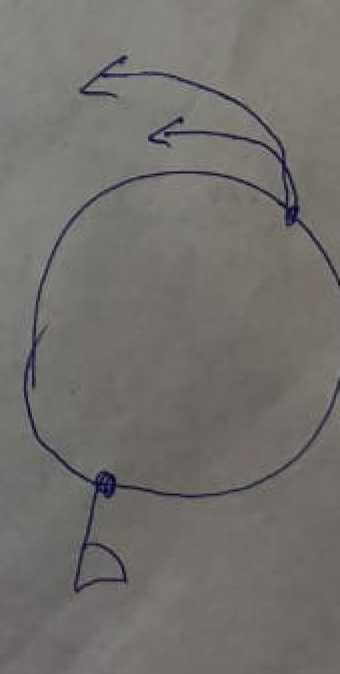
$v_м \cdot t_2 = 2\pi R + v_В \cdot t_2$

$v_В \cdot t_2 = 4026.$

$t_1 = t_2$

$$\begin{cases} v_м \cdot t_1 = 2\pi R + v_В \cdot t_1 \\ v_В \cdot t_1 = 2\pi R - v_м \cdot t_1 \end{cases}$$

$v_В = 0$ $\varnothing$



$v_м \cdot t_2 = 2\pi R + v_В \cdot t_2$

$2\pi R - v_В \cdot t_2 = 4026.$

Чистовик №2 стр №2

№2

$x = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-2021} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2021}} =$

$= 1 + \frac{2^{2020} + 2^{2019} + 2^{2018} + \ldots + 2^1 + 1}{2^{2021}}$

$2^{2020} + 2^{2019} + \ldots + 2^1 + 2^0 = 2^{2021} - 1$ => доказательство ниже

$x = 1 + \frac{2^{2021} - 1}{2^{2021}} = 2 - \frac{1}{2^{2021}}$

$A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1) + 1 + 2\sqrt{x-1}} +$

$+ \sqrt{x - 1 + 1 - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{x-1} \cdot 1 + 1^2} +$

$+ \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1^2} = |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1|$

т.к. $\sqrt{x-1} > 0$, то $|\sqrt{x-1} + 1| = \sqrt{x-1} + 1$

т.к. $\sqrt{x-1} < 1$, т.к. $x < 2$, т.к. $x = 2 - \frac{1}{2^{2021}}$, то

$|\sqrt{x-1} - 1| = 1 - \sqrt{x-1}$

$A = |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| = \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 = 2$

~~Ответ: 2~~ Доказать, что $2^{2020} + 2^{2019} + \ldots + 2^0 = 2^{2021} - 1$

Докажем, что $B = 2^{2021} - 2^{2020} - 2^{2019} - \ldots - 2^0 = \underline{1}$

$2^{2021} - 2^{2020} = 2^{2020}(2-1) = 2^{2020}$ => $B = 2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \ldots - 2^0$

$2^{2020} - 2^{2019} = 2^{2019}$, а налогично $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$

⇓

$B = 2^{2021} - 2^{2020} - \ldots - 2^0 = 2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \ldots - 2^0 = 2^{2019} - 2^{2018} -$

$- 2^{2017} - \ldots - 2^0 = \ldots = 2^1 - 2^0 = 1$ => $B = 1$ => ч.т.д.

Ответ: 2

№3

$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$P(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 8$

$\Downarrow$

$A - B + C - D + E = 9$

$P(1) = 1 + A + B + C + D + E = 22$

$\Downarrow$

$A + B + C + D + E = 21$

$\Downarrow$

$\begin{cases} A+B+C+D+E = 21 \\ A-B+C-D+E = 9 \end{cases}$, где $A, B, C, D, E \in N$

$\Downarrow$

$2A + 2C + 2E = 30 \Rightarrow \begin{cases} A+C+E = 15 \\ B+D = 6 \end{cases}$

$2B + 2D = 12 \Rightarrow$

Рассмотрим 2-е уравнение:
т.к. $B, D \in N$, то они могут принимать значение 1, 2, 3, 4, 5.
Тогда при всех различных B, $D = 6 - B$, значит нужно посмотреть все различные B - 5 вариантов

$B = 1; 2; 3; 4; 5$

$D = 5; 4; 3; 2; 1$

Рассмотрим 1-е уравнение:

$A + C + E = 15$.

любая из этих ~~букв~~ букв может принимать значение от 1 до 13.

Рассмотрим все различные A и найдем кол-во вариантов C, E при каждом значении.

Чистовик №4

1) При $A = 1$.

~~Вз~~ $C + E = 14$, аналогично с ~~в~~ прошлым случаем. C и E принимают значения от 1 до 13, $E = 14 - C \Rightarrow$ 13 вариантов.

2) При $A = 2$

$C + E = 13$, аналогично, $C; E \in [1; 12] \Rightarrow$ 12 вар.

...

i) При $A = i$

$C + E = 15 - i$; $C, E \in [1; 14-i] \Rightarrow 14 - i$ вар

...

13) При $A = 13$

$C + E = 2$; $\Rightarrow C = E = 1$. - 1 вариант

Значит кол-во вариантов во втором:

$$13 + 12 + 11 + \ldots + 1 = \frac{13 \cdot (13+1)}{2} = 13 \cdot 7$$

т.к. количество вариантов (B и D) и (A, C, E) не зависят друг от друга, то кол-во вариантов многочленов:

$$13 \cdot 7 \cdot 5 = 13 \cdot 35 = 455.$$

Ответ: 455.

Чистовик № 5

№ 4

Обозначим $v_в$ – скорость велосипедиста, $v_м$ – скорость мотоцикла, R – радиус

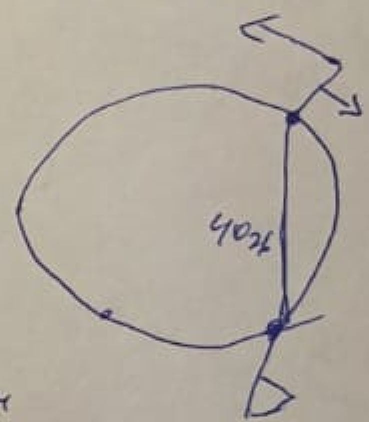
Тогда длина трассы $2\pi R$.

$2\pi R = v_м \cdot 36 \Rightarrow v_м = \frac{2\pi R}{36}$

$61 < \frac{2\pi R}{v_в} < 72$.

Рассмотрим оба варианта движения:

1) В ~~в~~ разные стороны



мотоцикл прошел – $t_1 \cdot v_м$

велосипед – $t_1 \cdot v_в$

$t_1 (v_в + v_м) = 2\pi R \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi R}{v_в + v_м}$

Велосипед проехал $v_в \cdot t_1 \leq 4026$

$4026 \geq \frac{v_в \cdot 2\pi R}{v_в + v_м}$

2) В одну сторону

мотоцикл – $t_2 \cdot v_м$

вел. – $t_2 \cdot v_в$

$t_2 = \frac{2\pi R}{v_м - v_в} \Rightarrow$ велосип. проехал $\frac{v_в \cdot 2\pi R}{v_м - v_в}$

Найдем границы $v_м - v_в$

$\frac{2\pi R}{36} - \frac{2\pi R}{61} \leq v_м - v_в \leq \frac{2\pi R}{36} - \frac{2\pi R}{72} = \frac{2\pi R}{72}$

4

$\frac{2\pi R \cdot 25}{2196} \Rightarrow t_2 = \frac{2\pi R}{v_м - v_в}$

Чистовик 6 стр №6

$$\Rightarrow \frac{2196 \cdot 2\pi R}{25 \cdot 2\pi R} \le t_2 \le \frac{2\pi R}{2\pi R} \cdot 72 = 72$$

$$\shortparallel$$

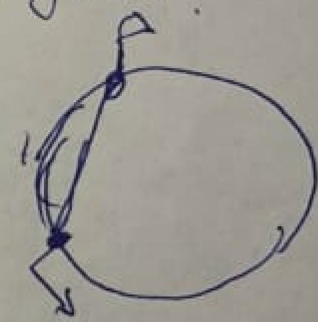
$$\frac{2196}{25}.$$

Рассмотрим расстояние, который прошел мотоц.

$$\frac{2196}{25} \cdot \frac{2\pi R}{36} \le L = t_2 \cdot \frac{2\pi R}{36} \le 4\pi R.$$

~~2196 > 1,5~~ Значит мотоцикл проехал более ~~…~~ 1,5, но менее 2х кругов.

Значит $v_м \cdot \frac{\pi 17 R}{v_м - v_в} \le 2\pi + 4026$

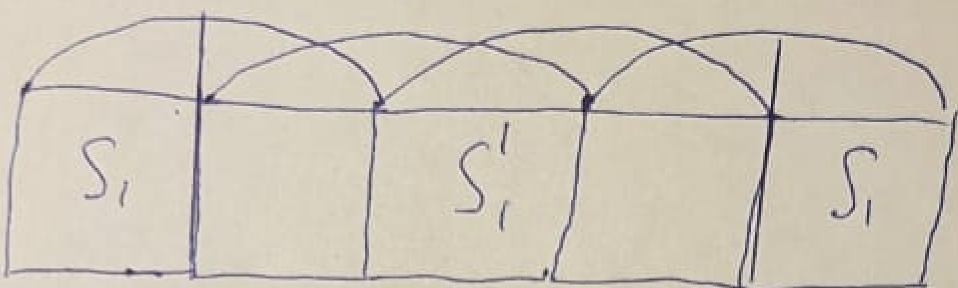


$$\begin{cases} \frac{2\pi R}{v_м - v_в} \cdot v_м \le 2\pi + 4026 \\ \frac{2\pi R}{v_м + v_в} \cdot v_в \le 4026. \\ v_м = \frac{2\pi R}{36} \end{cases}$$

№ 5.

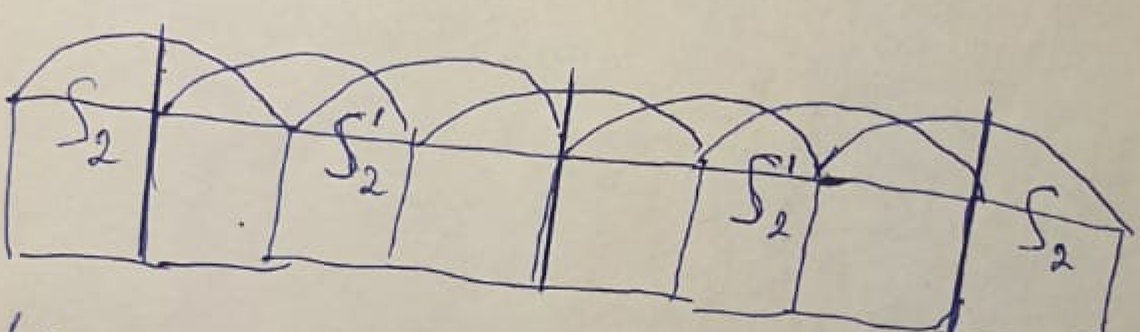
Рассмотрим площади, которые будут отражены в обоих случаях.

1)



5 раз, т.к. каждая сторона по разу и он вернулся на 1 опять

2)



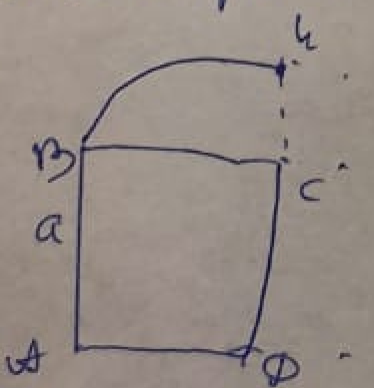
Аналогично 7 переворотов.

Рассмотрим фигуру площадью S_1', ограниченную двумя кривыми. Она равна $S_1' = 2S_2'$, ~~…~~ подобным фигурам из 2 случае. Относятся как квадрат подобия: $k^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Значит нужно найти: $S_1 \cdot 2 - S_2 \cdot 2$

т.к. $S^1_{цел} - S^2_{цел} = S_1' + S_1 \cdot 2 - S_2' \cdot 2 - S_2 \cdot 2 = 2(S_1 - S_2)$

Рассмотрим площади данных кусочков, где сторона a.



ВЧ - это сектор окружности с центром в точке Ф и радиусом $a\sqrt{2}$

Чистовик № 8 стр № 8

$S_{ВИФ} = S_{окр} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = S_{окр} \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8} \cdot \cancel{2}\pi \cdot (a\sqrt{2})^2 =$

$= \frac{a^2\pi}{4}.$

$S_{АВД} = \frac{1}{2} АВ \cdot \cancel{В} АД = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow$

$S_{АВИД} = \frac{a^2(\pi+2)}{4}.$

Значит: $2(S_1 - S_2) = \frac{2 \cdot (\pi+2)}{4}(a_1^2 - a_2^2) =$

$= \frac{(\pi+2)}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi+2}{2} = \frac{\pi+2}{4}$

Ответ: $\frac{\pi+2}{4}.$

№7.

В начале у Тани 2 четных числа: 2022, 2024.
Рассмотрим тактику, когда Таня будет делать эти 2 числа одинаковыми. То есть, на первом ходу она сделает 2024 -> 2024-2=2022 и Коле прибудет 2 одинаковых числа.
Пусть Таня отдала ему числа k; k., тогда Коля отдает ей числа k; k-a, где k:a, так. так на 2 числа он повлиять не может, а одно он должен уменьшить. Значит Таня делает числа k-a; k-a. Так как k:a.
Значит только Таня может убрать последнее кол-во камней, так как если она отдала числа t; t, то ей придет число t; 0 и она так же делает 2 одинаковых числа 0; 0.
Ответ: Таня.

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников „Ломоносов"
Ректору МГУ имени М. В. Ломоносова
академику В. А. Садовничему
ученика 11 Б класса МБОУ „Школы №4"
в городе Ростове-на-Дону, пер. Крепостной 139
Дударенко Дениса Вадимовича

Апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные баллы 60 за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что баллы выставлены не правильно, считаю что 1, 2, 3, 5 задачи должны быть оценены в 15 балов, а 4 задача в ~~10~~ 5-10, потому что написан правильный ход решения более чем на половину, просто не до конечного ответа.

01.04.2021