МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Дунаева Полина Андреевна**

Класс: **11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	10	15	0

Вариант 210106 Чистовик страница 1.

Задача 1

$f(n) = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 9$

$f(1) + f(2) + \ldots + f(11) = 4(1^3 + 2^3 + \ldots + 11^3) + 6(1^2 + 2^2 + \ldots + 11^2) +$

$+ 4(1 + 2 + \ldots + 11) + 9 \cdot 11$

1) $1 + 2 + \ldots + 11 = \frac{11 \cdot (11+1)}{2} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$

по формуле суммы арифметической прогрессии

2) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Докажем формулу индукцией по n

База: $n = 1$ $\quad 1^2 = 1 \quad \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$

Переход: пусть мы доказали формулу для $n = k$, докажем для $n = k+1$

$\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$= \frac{(k+1)}{6}\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right) = \frac{k+1}{6}(2k^2 + 7k + 6) = \frac{k+1}{6}(2k+3)(k+2) =$

$= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$ переход доказан

$(1^2 + 2^2 + \ldots + 11^2) = \frac{11 \cdot 12 \cdot (2 \cdot 11 + 1)}{6} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6}$

3) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Докажем эту формулу индукцией по n

База: $n = 1$ $\quad 1^3 = 1$; $\frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1$

Переход: пусть мы доказали для $n = k$, докажем для $n = k+1$

$\underbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4(k+1)) =$

$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ переход доказан

$1^3 + 2^3 + \ldots + 11^3 = \frac{11^2 \cdot 12^2}{4}$

Подставляем полученные значения в исходное выражение

$f(1) + f(2) + \ldots + f(11) = 4 \cdot \frac{11^2 \cdot 12^2}{4} + 6 \cdot \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} + 4 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} + 9 \cdot 11 =$

$= 11^2 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 \cdot 23 + 11 \cdot 24 + 11 \cdot 9 =$

(продолжение см. на стр. 2)

(продолжение см. на стр. 3)

Чистовик страница 2

Задача №1 (продолжение)

$= 11(11\cdot 12^2 + 12\cdot 23 + 24 + 9) = 11(11\cdot 12^2 + 12\cdot 22 + 12 + 33) =$

$= 11(11\cdot 12(12+2) + 45) = 11(11\cdot 12\cdot 14 + 45) =$

$11\cdot 12 = 132$ $\quad = 11(1848 + 45) = 11(1893) = 20823$

$$\begin{array}{r} \times\ 132 \\ 14 \\ \hline +\ 528 \\ 132 \\ \hline 1848 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 1893 \\ 11 \\ \hline +\ 1893 \\ 1893 \\ \hline 20823 \end{array}$$

Ответ: 20823

Задача №2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+y-1 \geq 0 \\ x^2+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y \geq 1$

~~[illegible]~~ $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

Но должно выполняться $\sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1$, а $\sqrt{x^2+y} \geq 1$ (и $|y+3| \geq 0$)

значит равенство возможно только когда в обоих неравенствах $\sqrt{x^2+y} \geq 1$ и $|y+3| \geq 0$ достигается равенство т.е. $x^2+y = 1$ и $|y+3| = 0$

$|y+3| = 0 \Rightarrow y+3 = 0 \Rightarrow y = -3$

$\left.\begin{array}{l} x^2+y = 1 \\ y = -3 \end{array}\right| \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Подставляем во второе уравнение: $\sqrt{x^2+y-1} = \sqrt{1-1} = 0$

Получаем $|x+3| = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+3 = 1 \Rightarrow x = -2 \text{ — подходит} \\ x+3 = -1 \Rightarrow x = -4 \text{ — не подходит т.к. } x = \pm 2 \end{array}\right.$

Значит $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$

(продолжение см. на стр. 3)

Чистовик страница 3

Задача №2 (продолжение)

Мы получили что пара $x=-2$, $y=-3$ единственная возможная, подставим и убедимся что она подходит

$\sqrt{(-2)^2+(-3)} + |-3+3| = \sqrt{4-3} + 0 = \sqrt{1} = 1$

$\sqrt{(-2)^2+(-3)-1} + |-2+3| = \sqrt{4-3-1} + |1| = 0+1 = 1$

Ответ: $x=-2$, $y=-3$

Задача №3

пусть m и n - корни уравнения $x^2+bx+a=-1$ т.е. $x^2+bx+a+1=0$

k и l - корни уравнения $x^2+cx+a=0$

По условию: $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$, $k \neq l$

$m, n, k, l > 1$

По теореме Виета для уравнения $x^2+bx+a+1=0$ получаем $a+1=mn$, а для уравнения $x^2+cx+a=0$ получаем $a=kl$

$\begin{cases} a=k\cdot l \\ a+1=mn \end{cases}$ k, l, m, n - целые, поэтому a и $a+1$ тоже целые. при этом т.к. $k \neq l$ и $m \neq n$ и $k, l, m, n > 1$, получаем, что у чисел a и $a+1$ есть хотя-бы 2 делителя отличных от 1 и самого числа, т.е. числа a и $a+1$ не могут быть простыми

$a=kl$ Без ограничения общности пусть $k \leq l$

По условию $k>1 \Rightarrow k \geq 2$, $\left.\begin{matrix} l \neq k \\ l \geq k \end{matrix}\right| \Rightarrow l \geq k+1 \geq 3$

$a=kl \geq 2\cdot 3 = 6$

$a=6$ не подходит т.к. тогда $a+1=7$ - простое

$a=7$ не подходит т.к. $a=7$ - простое

$a=8$ не подходит т.к. $a+1=9=3\cdot 3$ не представимо в виде mn где $m \neq n$ и $m, n > 1$, $m, n \in \mathbb{Z}$

(продолжение см. на стр. 4)

Чистовик страница 4

Задача №3 (продолжение)

$a=9$ не подходит т.к. 9 не представимо в виде kl, где $k \neq l$ и $k, l > 1$, $k, l \in \mathbb{Z}$

$a=10$ не подходит т.к. $a+1=11$ - простое

$a=11$ не подходит т.к. простое

$a=12$ не подходит т.к. $a+1=13$ - простое

$a=13$ не подходит т.к. простое

Значит все целые $a \leq 13$ не подходят, поэтому $a \geq 14$

Приведем пример для $a=14$.

Возьмем $b=-8$, $c=-9$

$x^2+bx+a=-1$ приобретает вид $x^2-8x+14=-1$

$x^2-8x+15=0$

$(x-3)(x-5)=0$ $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$ - 2 целых корня больших 1

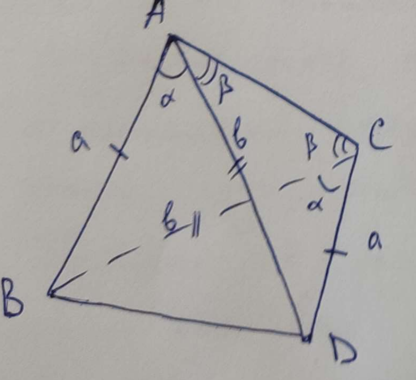
$x^2+cx+a=0$ приобретает вид $x^2-9x+14=0$

$x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$ $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=7 \end{array}\right.$ - 2 целых корня больших 1

Ответ: 14.

Задача №6.



Обозначим $AB=CD=a$; $BC=AD=b$

Обозначим $\angle BAD=\alpha$; $\angle CAD=\beta$

По условию $\angle BAD+\angle CAD+\angle BAC=180^\circ$

$\angle BAC=180^\circ-\angle BAD-\angle CAD=180^\circ-\alpha-\beta$

$\left.\begin{array}{l} AB=CD=a \\ AD=BC=b \\ BD \text{ - общая} \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ABD=\triangle BCD$ по 3 сторонам

$\Downarrow$

$\angle BCD=\angle BAD=\alpha$

$S_{BCD}=S_{ABD}=\frac{AB\cdot AD\cdot \sin\angle BAD}{2}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$

(продолжение см на стр. 5)

Чистовик страница 5

Задача №6 (продолжение)

$$\left.\begin{array}{l} AB = CD = a \\ BC = AD = b \\ AC - \text{общая} \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC \text{ по 3 сторонам}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle ACB = \angle DAC = \beta$$

в $\triangle ABC$: $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - \beta =$

$= 180^\circ - 180^\circ + \alpha + \beta - \beta = \alpha$

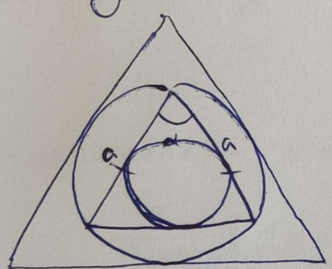
$S_{ADC} = S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC}{2} = \dfrac{1}{2} ab \sin\alpha$

$S = S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ADC} + S_{ABC} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} ab \sin\alpha = 4 S_{BCD}$

Получаем $S_{BCD} = \dfrac{S}{4}$

Ответ: $\dfrac{S}{4}$

Задача №5. Обозначим $S_1 = 1$ – площадь исходного треугольника



S_2 – площадь большого треугольника, подобного исходному.

Т.к. треугольники подобны, то

$S_2 = \dfrac{S_2}{1} = \dfrac{S_2}{S_1} = k^2$, где k – коэффициент подобия второго треугольника к первому.

Очевидно, что наименьший по площади круг в который поместится треугольник – это круг, ограниченный его описанной окружностью, а наименьший треугольник подобный исходному, в который поместится данный круг, описан около этой окружности.

Обозначим R – радиус опис. окр. исходного треугольника, а r – радиус его впис. окружности. Тогда R – радиус впис. окр. большого треугольника, поэтому $k = \dfrac{R}{r}$

Обозначим a – боковая сторона исходного треугольника, тогда

$1 = S_1 = \dfrac{1}{2} a^2 \sin\alpha \Rightarrow a^2 = \dfrac{2}{\sin\alpha}$

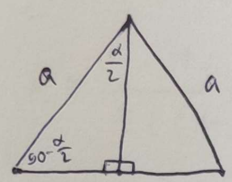
(продолжение см. на стр. 6)

Чистовик страница 6

Задача №5 (продолжение)

По теореме синусов $2R = \frac{a}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}$ т.к. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ - угол при основании равноб. треугольника с углом при вершине равным α $\frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

$$R = \frac{a}{2\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$



Проведем в ~~в~~ исходном треугольнике высоту к основанию, которая будет и медианой и биссектрисой.
Тогда длина основание равна $2 \cdot a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

Полупериметр этого треугольника: $\frac{a + a + 2a\sin\frac{\alpha}{2}}{2} = a + a\sin\frac{\alpha}{2}$

Получаем: $1 = S_1 = r \cdot p = r \cdot (a + a\sin\frac{\alpha}{2})$

Значит $r = \frac{1}{a + a\sin\frac{\alpha}{2}}$

Получаем $\frac{R}{r} = \frac{\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{1}{a + a\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a(a + a\sin\frac{\alpha}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2(1 + \sin\frac{\alpha}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ (=)

подставляем $a^2 = \frac{2}{\sin\alpha}$

(=) $\frac{\frac{\cancel{2}}{\sin\alpha}(1 + \sin\frac{\alpha}{2})}{\cancel{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\underbrace{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}_{\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}}} =$

$= \frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2})} = \frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}(1 - \sin\frac{\alpha}{2})(1 + \sin\frac{\alpha}{2})}$ (=)

т.к. $\alpha \in [60^\circ; 120^\circ]$, то $\frac{\alpha}{2} \in [30^\circ; 60^\circ]$ $\Rightarrow 1 > \sin\frac{\alpha}{2} > 0$

$1 + \sin\frac{\alpha}{2} > 0$

$1 - \sin\frac{\alpha}{2} > 0$

(=) $\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}(1 - \sin\frac{\alpha}{2})}$

Обозначим $t = \sin\frac{\alpha}{2}$

т.к. $\frac{\alpha}{2} \in [30^\circ; 60^\circ]$, то

$t = \sin\frac{\alpha}{2} \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$

(см. продолжение на стр. 7)

Чистовик страница 7

Задача №5 (продолжение)

$$k = \frac{R}{r} = \frac{1}{2t(1-t)} \qquad t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$S_2 = k^2 = \frac{1}{2^2t^2(1-t)^2} = \frac{1}{4t^2(1-t)^2}$$

Заметим, что т.к. $k > 0$, то максимальное и мин. значение $S_2 = k^2$ достигается при макс. и мин. значении k соответственно.

$k = \frac{1}{2t(1-t)}$ Найдем производную функции $k(t) = \frac{1}{2t(1-t)}$

$$k'(t) = -\frac{1}{(2t(1-t))^2} \cdot (2t - 2t^2)' = -\frac{1}{(2t(1-t))^2}(-4t+2) =$$

$$= \frac{4t-2}{(2t(1-t))^2}$$

Заметим, что т.к. $t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, то

$t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 4t - 2 \geq 0$

$2t(1-t) \neq 0 \Rightarrow (2t(1-t))^2 > 0$

Значит, что при $t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $k'(t)$ определена и > 0.

Значит при $t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $k(t) \uparrow$.

$$S_{2\,min} = (k_{min})^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$S_{2\,max} = (k_{max})^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})}\right)^2 = \frac{1}{3(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{3\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4}} = \frac{4}{3(2-\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3(4+3-\cancel{8}4\sqrt{3})} = \frac{4}{21 - 12\sqrt{3}} =$$

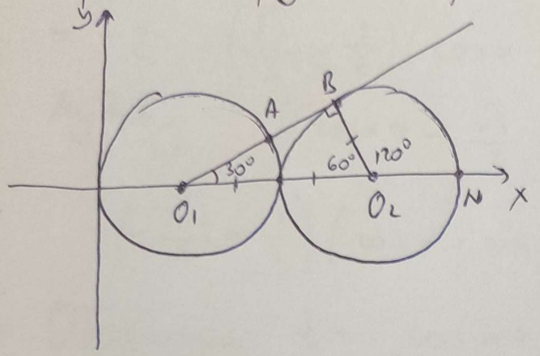
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7 + 4\sqrt{3}}{49 - 48} = \frac{4(7 + 4\sqrt{13})}{3} = \frac{28 + 16\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $S_{max} = \frac{28 + 16\sqrt{3}}{3}$; $S_{min} = 4$

Чистовик страница 8

Задача №4

Примем радиус трасс за 1.



Введем систему координат

O_1 - центр первой трассы, O_2 - второй.

$O_1(1;0)$, $O_2(3;0)$

Окружности с центрами в O_1 и O_2 и радиусом 1 - это трассы α и β соответственно, касаются в точке $(2;0)$

O_1B - касательная ко второй окружности $\Rightarrow O_2B \perp O_1B$

$O_2B = 1$; $O_1O_2 = 2 = 2 \cdot O_2B \Rightarrow \sin \angle BO_1O_2 = \frac{BO_2}{O_1O_2} = \frac{1}{2}$

Значит $\angle BO_1O_2 = 30°$; $\angle BO_2O_1 = 90° - 30° = 60° \Rightarrow \angle NO_2B = 120°$

Т.к. обе машины проезжают всю трассу за час, то их угловые скорости равны. Пусть за какое-то время они сместились на угол α от изначального положения (A - по часовой стрелке, B - против); $\alpha \in [0°; 360°]$, найдем координаты машин A и B и вычислим длину AB.

A сместился на угол α по часовой стрелке, тогда его координаты:

по x: $1 + \cos(30° - \alpha) = 1 + \cos 30° \cos\alpha + \sin 30° \sin\alpha =$

$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$

по y: $\sin(30° - \alpha) = \sin 30° \cos\alpha - \cos 30° \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

B сместился на угол α против часовой стрелки, его координаты:

по x: $3 + \cos(120° + \alpha) = 3 + \cos 120° \cos\alpha - \sin 120° \sin\alpha =$

$= 3 - \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

по y: $\sin(120° + \alpha) = \sin 120° \cos\alpha + \sin\alpha \cos 120° =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$

$AB^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2$

(см. продолжение на стр. 9)

Чистовик страница 9

Задача №4 (продолжение)

$A_x - B_x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - 3 + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha =$

$= -2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$A_y - B_y = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha =$

$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)(\cos\alpha + \sin\alpha) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\cos\alpha + \sin\alpha)$

Обозначим $t = \cos\alpha + \sin\alpha$

$AB^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t - 2\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t\right)^2 =$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 t^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t + 4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 t^2 =$

$= t^2\left(\frac{3}{4} + \cancel{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \cancel{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t + 4 =$

$= t^2\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t + 4 =$

$= 2t^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t + 4$

Мы хотим найти при каких положениях машин $AB \geq 2$ т.к. 2 - диаметр трассе, значит нам надо $AB^2 \geq 4$

$2t^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t + 4 \geq 4$

$2t^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t \geq 0$

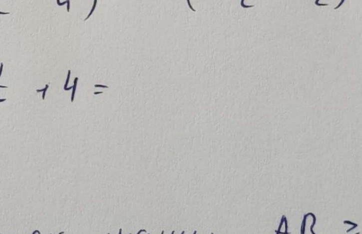
$t^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t \geq 0$

$t^2 - (\sqrt{3} + 1)t \geq 0$

$t(t - \sqrt{3} - 1) \geq 0$

$t = \underbrace{\cos\alpha}_{\underbrace{\leq 1}_{<\sqrt{3}}} + \underbrace{\sin\alpha}_{\leq 1} < \sqrt{3} + 1$

Значит $t - \sqrt{3} - 1 < 0$ при $\forall \alpha$



(см. продолжение на стр. 10)

Т.е. мы ищем $t \leq 0$.

$\cos\alpha + \sin\alpha \leq 0$

$\alpha \in [0; 2\pi]$

~~Заметим, что при $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ оба слагаемых ≥ 0 и хотя бы одно не равно 0, т.к. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow$~~

Чистовик страница 10

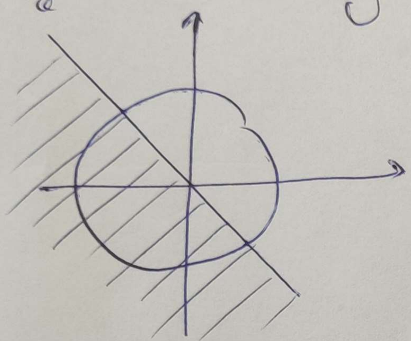
Задача №4 (продолжение)

$\cos\alpha + \sin\alpha \leq 0$ Изобразим тригонометрическую окружность

Т.к. $\cos\alpha$ - координата точки по x, $\sin\alpha$ - координата по y, то

$\cos\alpha + \sin\alpha \leq 0$ это $x+y \leq 0$ т.к. $y \leq -x$ - это

область под прямой $y = -x$. В неё попадает ровно половина тригонометрической окружности, а значит точки A и B будут на расстоянии ≥ 2 ровно половину времени (т.к. подходит ровно половина значений угла смещения) т.е. $\frac{1}{2} \cdot 1$ ч т.е. 30 минут



Ответ: 30 мин

Черновик
стр. 11

$f(1)+f(2)+\ldots+f(11)$ $\quad f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$

$4(1^3+2^3+3^3+\ldots+11^3)+6(1^2+2^2+\ldots+11^2)+4(1+2+\ldots+11)+9\cdot 11$

$1+2+\ldots+11=\frac{11\cdot 12}{2}=66$

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad \underbrace{1^2+2^2}_{5}=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{6}=5$ ✓

$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$

$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6n+6}{6}\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)=$

$=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)=\frac{n+1}{6}((n+2)(2n+3))=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

переход есть

$1^3+2^3+\ldots+n^3=\boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$ $\quad 1^3=1$, $1^3+2^3=9$, $1^3+2^3+3^3=36$ $\quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)=$

$=\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ ✓

$4(1^3+\ldots+11^3)+6(1^2+\ldots+11^2)+4(1+\ldots+11)+9\cdot 11=$

$=4\cdot\frac{11^2\cdot 12^2}{4}+6\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}+\frac{11\cdot 12}{2}\cdot 4+99=$

$=11^2\cdot 12^2+11\cdot 12\cdot 23+11\cdot 12\cdot 2+99=\ldots$

$=$

$\frac{4}{3(2-\sqrt{3})^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4+3-4\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=$

$=\frac{4}{3}\cdot\frac{7+4\sqrt{3}}{\cancel{49-48}}=\frac{28+16\sqrt{3}}{3}$

Черновик стр. 12

$\sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1$

$\sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1$

$\cancel{4y+3}$ $x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1$

$\sqrt{x^2+y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} = 1$

$|y+3| = 0 \Rightarrow y = -3$

$x^2+y = 1$

$x^2 = 4 \quad x = \pm 2$

$\sqrt{x^2+y-1} = 0 \quad |x+3| = 1$

$\left[\begin{array}{l} x+3 = 1 \\ x+3 = -1 \end{array}\right.$ $x = 2$ не подходит, $x = -2$ ок.

$$\boxed{\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}}$$

$x^2+bx+a = -1$

$x^2+cx+a = 0$

имеют по 2 целых корня, больших 1

min a = ?

$x^2+bx+a+1 = (x-n)(x-m)$ $\quad n, m, k, l \in \mathbb{Z}$

$x^2+cx+a = (x-k)(x-l)$ $\quad m, n, k, l > 1$

$b = -(n+m)$

$a+1 = mn$

$c = -(k+l)$

$a = kl$

$a+1 = mn$

$a = kl$

$k \neq l \quad a \geq 6 = 2 \cdot 3$

$m \neq n \quad 7 \neq mn$

a: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

× (т.к. 7), ×, × (т.к. 9), ×, × (т.к. 11), ×, × (т.к. 13), ×

$a = 2 \cdot 7 = 14$

$a+1 = 3 \cdot 5 = 15$

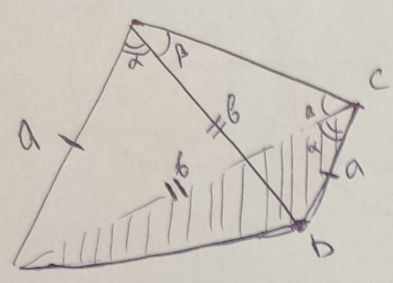
$\cancel{x^2 - 9x + 14 = -1}$

$x^2 - 9x + 14 = 0 = (x-2)(x-7)$

$x^2 - 8x + 15 = 0 = (x-3)(x-5)$

$\boxed{14 \quad 15}$

Черновик стр. 13



S - площадь поверхности

AB = CD

AD = BC

△ ABD = △ DCB по 3 сторонам

△ CDA = △ ABC по 3 сторонам

$$S = 2S_{BCD} + 2S_{ABC}$$

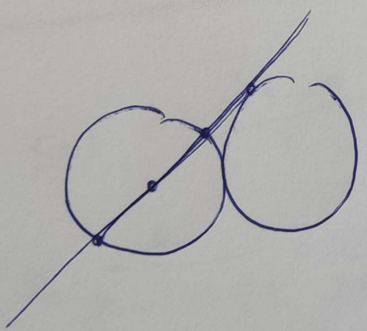
$$S_{BCD} = \frac{1}{2} a b \sin\alpha = S_{ABD}$$

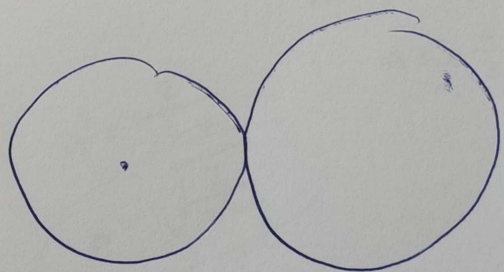
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin(180^\circ - \beta - (180 - \alpha - \beta)) =$$

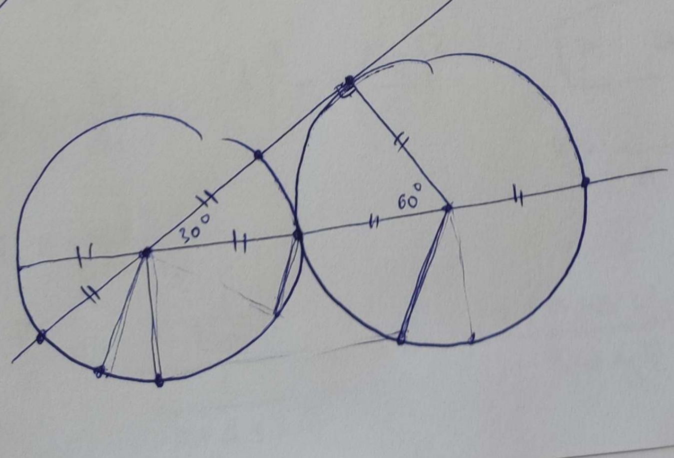
$$= \frac{1}{2} ab \sin(\cancel{180^\circ} - \cancel{\beta} - \cancel{180^\circ} + \alpha + \cancel{\beta}) = \frac{1}{2} ab\sin\alpha$$

$$\boxed{S = 4S_{BCD}} \qquad S_{BCD} = \frac{1}{4}S$$

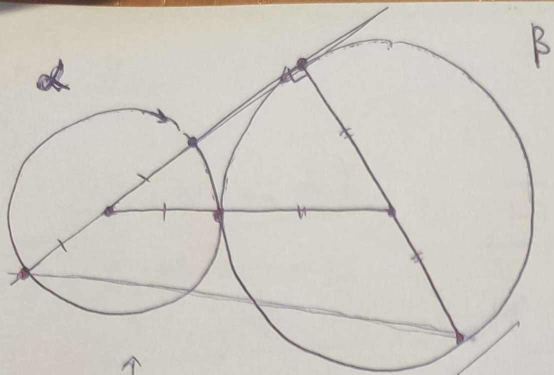
$$(\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11})^{2021}$$

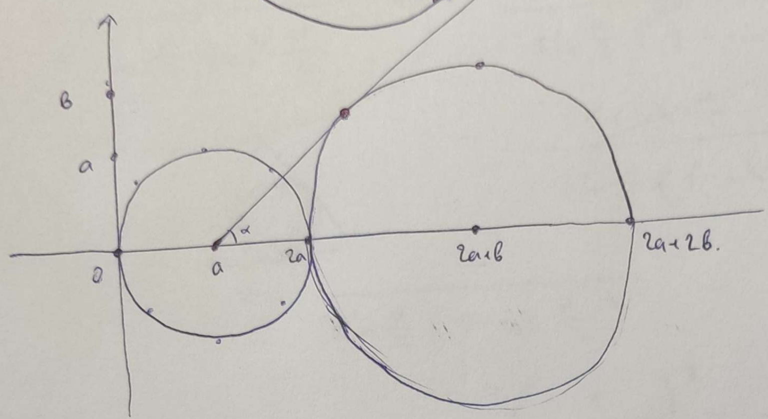




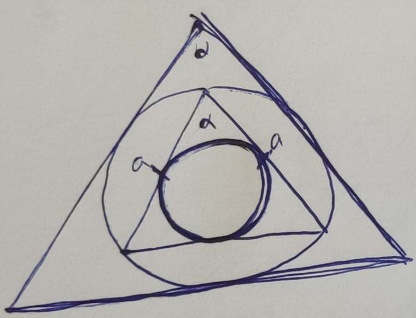


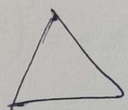
в Черновик стр. 14.

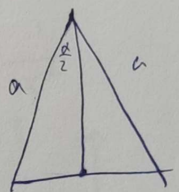




$\sin\alpha =$







$a\sin\frac{\alpha}{2}$

$$a^2 = \frac{2}{\sin\alpha}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}$$

$$S=1 \Rightarrow \frac{a^2\sin\alpha}{2} = 1$$

$$R = \frac{a}{2\sin(90-\frac{\alpha}{2})} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}}{2\cos(\frac{\alpha}{2})}$$

$$r = \frac{S_1}{p}$$

$$\boxed{p = a + a\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$S_2 = \frac{S_2}{S_1} = (k)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$r = \frac{1}{a + a\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{1}{a+a\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a(a+a\sin\frac{\alpha}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

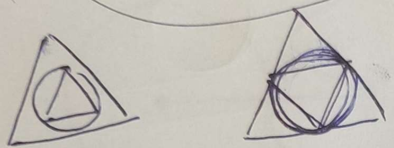
Чернови стр. 15

$a^2=\frac{2}{\sin\alpha}$

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{2}{\sin\alpha}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cancel{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}}=$$



$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{2x(1-x)}$$

$$\left(\frac{1}{x-x^2}\right)'=-\frac{1}{(x-x^2)^2}\cdot(-2x+1)=$$

x от $\frac{1}{2}$ до $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

<0

$$=-\frac{-2x+1}{(x-x^2)^2}\quad \begin{matrix}<0\\>0\end{matrix} \Rightarrow >0 \quad \uparrow$$

$-2x+1<0$

$x>\frac{1}{2}$

$-2x+1<0$

$2x-1>0$

$x>\frac{1}{2}$ ✓

min в $\frac{1}{2}$

max в $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)^2=16$$

$$\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^2=\frac{1}{\frac{3}{4}\frac{(1-\sqrt{3})^2}{4}}=$$

$$=\frac{16}{3(2-\sqrt{3})^2}$$

$28+16\sqrt{3}>48$

$16\sqrt{3}>20$

$4\sqrt{3}>5$

$48>25$

$3(2-\sqrt{3})^2<1$

$(2-\sqrt{3})^2<\frac{1}{3}$

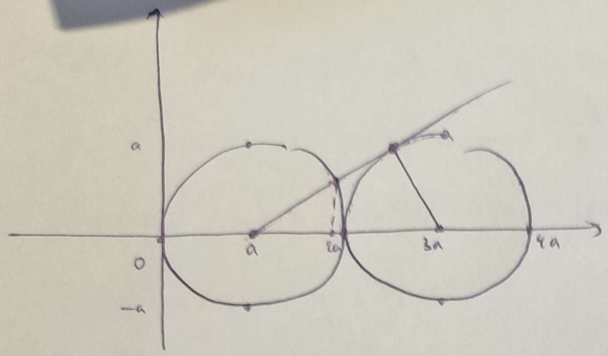
$2-\sqrt{3}<\frac{\sqrt{3}}{3}$

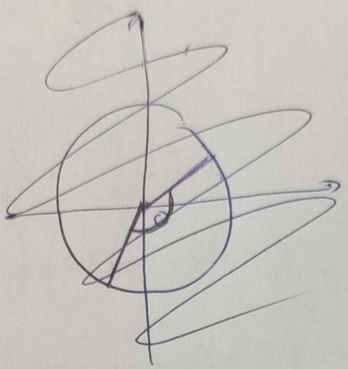
$2<\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}$

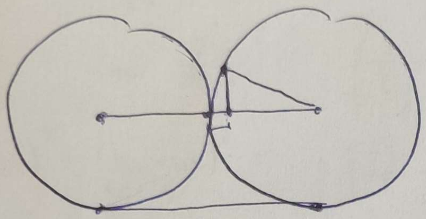
$\frac{6}{4}<\sqrt{3}$

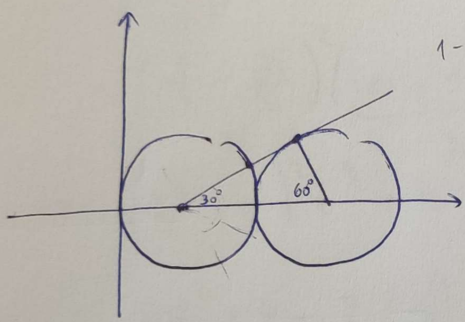
$1,5<\sqrt{3}$ ✓

Черновка стр. 16









$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

от прехам α°

координати A

α от 0 до 360°

A: $x: 1 + \cos(30^\circ - \alpha)$

$y: \sin(30^\circ - \alpha)$

B: $x: 3 + \cos(120^\circ + \alpha)$

$y: \sin(120^\circ + \alpha)$

$\cos(30^\circ - \alpha) = \cos 30^\circ \cos\alpha + \sin 30^\circ \sin\alpha = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}$

$\cos(120^\circ + \alpha) = \cos 120^\circ \cos\alpha - \sin 120^\circ \sin\alpha = -\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$x_1 - x_2 = -2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\sin\alpha =$

$= \boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)(\cos\alpha + \sin\alpha) - 2}$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{4} - 2 =$

$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$

Черновик стр. 17

~~cos~~ $\sin(30^\circ - \alpha) = \sin 30^\circ \cos\alpha - \cos 30^\circ \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$\sin(120^\circ + \alpha) = \sin 120^\circ \cos\alpha + \cos 120^\circ \sin\alpha =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$

$y_1 - y_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\alpha - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\sin\alpha =$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\underbrace{(\cos\alpha + \sin\alpha)}_{t} - 2\right)^2 +$

$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \underbrace{(\cos\alpha + \sin\alpha)}_{t}^2 =$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 t^2 + 4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 t^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t =$

$= 2t^2 + 4 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t \overset{?}{\geq} 2$

$t^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t + 2 \geq 1$

$t^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t + 1 \geq 0$

$D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 < 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2} - 3 < 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2} < 3$

Чистовик / страница 10 Черновик стр. 18

Задача № 4 (продолжение)

Значит $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ не подходит

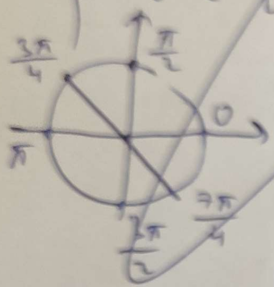
При $\alpha \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ оба слагаемых ≤ 0, поэтому и сумма ≤ 0, значит $\alpha \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ подходит.

При $\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4})$ $\quad \sin\alpha \geq 0$

$\cos\alpha \leq 0$

но при этом $|\sin\alpha| > |\cos\alpha|$

значит $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$



При $\alpha \in$

$11^2 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 \cdot 23 + 11 \cdot 24 + 11 \cdot 9$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 121 \\ \hline 144 \\ 288 \\ 144 \\ \hline 17424 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ \times\ 23 \\ \hline 396 \\ 264 \\ \hline 3036 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 264 \\ 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17424 \\ 3036 \\ \hline 20460 \\ 264 \\ \hline 20724 \\ 99 \\ \hline 20823 \end{array}$$