МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Званцов Матвей Юрьевич**

Класс: **11**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	15	5

Беловик

Вариант 210109

№1.

$f(n)=4n^3+6n^2+4n+5.$

$f(1)+\ldots+f(14)=4(1^3+\ldots+14^3)+6(1^2+\ldots+14^2)+$
$+4(1+\ldots+14)+14\cdot 5=$
$=4\cdot(1+\ldots+14)^2+6\cdot\dfrac{14(14+1)(2\cdot 14+1)}{6}+4\cdot\dfrac{14\cdot 15}{2}+$
$+14\cdot 5=$
$=4\cdot\left(\dfrac{14(14+1)}{2}\right)^2+14\cdot 15\cdot 29+14\cdot 15\cdot 2+14\cdot 5=$
$=14\cdot 5(14\cdot 3\cdot 15+29\cdot 3+3\cdot 2+1)=$
$=14\cdot 5(630+94)=14\cdot 5(724)=50680.$

Ответ: 50680.

№2.

$\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+|y+8|=1\\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5\end{cases}$, Заметим, что левая часть каждого уравнения состоит из 2 ~~полож~~ неотрицательных чисел: корня и модуля, поэтому решения будут, если

$\begin{cases}\sqrt{x^2+y}\le 1\\ \sqrt{x^2+y-1}\le 5\end{cases}$, $\begin{cases}0\le x^2+y\le 1\\ 0\le x^2+y-1\le 25\end{cases}$, $\begin{cases}0\le x^2+y\le 1\\ 1\le x^2+y\le 26\end{cases}$.

Эта система выполняется только при $x^2+y=1$, подставим ~~это~~ это в исходную систему:

Беловик

№2 (продолжение)

$\begin{cases} \sqrt{1}+|y+8|=1 \\ \sqrt{1-1}+|x+8|=5, \end{cases}$ $\begin{cases} |y+8|=0 \\ |x+8|=5, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-8 \\ x=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-8 \\ x=-13 \end{cases} \end{array} \right.$,

Первая система удовлетворяет $x^2+y=1$, а вторая — нет. Значит, решение — $(-3;-8)$.

Ответ: $(-3;-8)$.

№3.

уравнения:

$x^2+bx+a=0$ и $x^2+cx+(a+1)=0$, пусть их корни x_1, x_2 и x_3, x_4 соответственно.

Тогда по теореме Виета:

$\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$, $\begin{cases} x_3+x_4=-c \\ x_3 \cdot x_4 = a+1. \end{cases}$

Т.к. все корни целые и больше 1 (а также $x_1 \neq x_2$ и $x_3 \neq x_4$, иначе у нас будет у уравнения 1 корень), поэтому

$a = x_1 \cdot x_2 \geq 2 \cdot 3 = 6$ и $a+1 = x_3 \cdot x_4 \geq 2 \cdot 3 = 6$,

$\begin{cases} a \geq 6 \\ a \geq 5, \end{cases}$ $a \geq 6$. А также a — целое число.

Теперь поймём, что ни a, ни $(a+1)$ не могут быть простыми, иначе один из корней будет 1, что не удовлетворяет условию,

а также, что ни a, ни $(a+1)$ не должны быть квадратами простого числа, иначе могут быть корни ~~оди~~ совпадать, или один из них будет 1.

С учётом всего вышесказанного, заключаем, что

СТР.2

Беловик

№ 3 (продолжение)

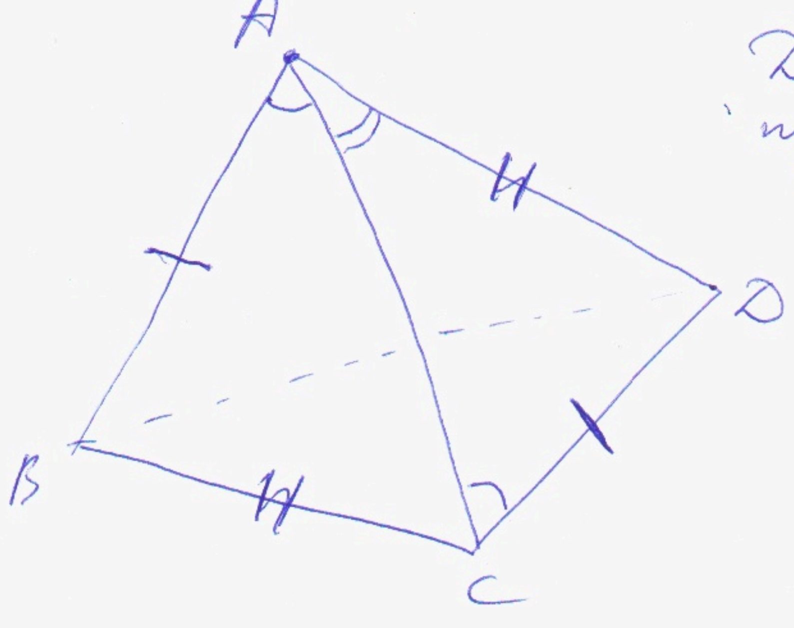
$a=6$ } не подходит,
$a=7$,
$a=8$
$a=9$
$a=10$
$a=11$
$a=12$
$a=13$
$a=14$ ← первое подходящее a.

В самом деле, при $a=14$, $b=-9$, $c=-8$:

$x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=7 \end{array}\right.$ и $x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Ответ: 14.

№ 6.



Дано: $ABCD$ – неправильная пирамида, $\angle BAC + \angle CAD + \angle BAD = 180°$, $S_{BCD}=S$, $AB=CD$, $AD=BC$.

Найти: $S(ABCD)$.

Решение.

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$:

1.) $AB=CD$ } по условию;
2.) $BC=AD$ }
3.) AC – общая сторона.

Значит, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по трём сторонам, поэтому $S_{BAC}=S_{CDA}$ и

№6 (продолжение).

$\angle BAC = \angle DCA$.

Рассмотрим $\triangle BCD$ и $\triangle DAB$:

1.) $BC = DA$ } по условию;
2.) $CD = AB$
3.) BD — общая сторона.

Значит, $\triangle BCD = \triangle DAB$ по трём сторонам, поэтому $\angle DCB = \angle DAB$ и $S_{BAD} = S_{BCD} = S$.

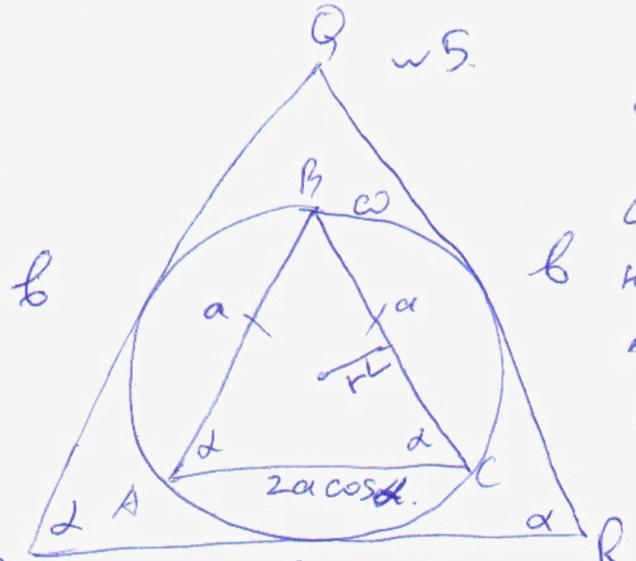
$$S = S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin\angle BCD = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin\angle BAD.$$

$$S_{BAC} = S_{CDA} = \frac{1}{2} CD \cdot DA \cdot \sin\angle CDA = \frac{1}{2} CD \cdot BC \cdot \sin(180^\circ - \angle DAC - \angle DCA) = \frac{1}{2} CD \cdot BC \cdot \sin(180^\circ - \angle DAC - \angle BAC) = \frac{1}{2} CD \cdot BC \cdot \sin\angle BAD = S.$$

Тогда $S(ABCD) = S_{BCD} + S_{ACB} + S_{ACD} + S_{BAD} = 4S$.

Ответ: $4S$.

№5



Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, $\angle BAC = \alpha$, $AB = BC$, ω — круг минимальной площади, описанный около $\triangle ABC$, $\triangle PQR \sim \triangle ABC$, $\triangle PQR$ — $\triangle$ минимальной площади, описанный около ω, $30^\circ \le \alpha \le 60^\circ$, $S_{ABC} = 1$.

Найти: $\min(S(\alpha))$, $\max(S(\alpha))$.

Решение.

Беловик.

№ 5 (продолжение).

Поймём, что ~~круг~~ наименьшей площади, в котором находится полностью $\triangle ABC$ — это круг, ограниченный опис. окр. $\triangle ABC$. В самом деле, из соображения непрерывности можно мало пошевелить круг, ~~...~~ ограниченной опис. окр. $\triangle ABC$, и его площадь увеличится, поэтому ω — круг, ~~опис.~~ огр. опис. окр. $\triangle ABC$.

Теперь поймём, что $\triangle PQR$ описан около ω. В самом деле, если $\triangle PQR$ не является ~~описанным~~ описанным к ω, то можно параллельно перенести его некасающуюся сторону вплоть до касания с ~~кругом~~ ω, тогда площадь $\triangle PQR$ уменьшится, а значит, его площадь будет минимальной, когда он описан около ω.

Пусть R — радиус ω, a, b — стороны AB и PQ, r — радиус впис. окр. $\triangle ABC$, $S = S_{ABC}$.

Тогда $AC = 2a\cos\alpha$, $PR = 2b\cos\alpha$,

$$r = \frac{S}{a(1+\cos\alpha)}.$$

С одной стороны, $R = \dfrac{a \cdot a \cdot 2a\cos\alpha}{4S} = \dfrac{a^3\cos\alpha}{2S}$, с другой, ~~R=~~ из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle PQR$:

$$\frac{R}{r} = \frac{b}{a}, \text{ откуда } b = a \cdot \frac{R}{r} = a \cdot \frac{\frac{a^3\cos\alpha}{2S}}{\frac{S}{a(1+\cos\alpha)}} =$$

$$= \frac{a^5(\cos^2\alpha + \cos\alpha)}{2S^2}.$$

Беловик.

№ 5 (продолжение).

Т.к. R - радиус впис. окр. $\triangle PQR$, то.

$$R = \frac{S_{PQR}}{b(1+\cos\alpha)}, \quad S(\alpha) = S_{PQR} = R\, b(1+\cos\alpha) =$$

$$= \frac{a^3\cos\alpha}{2S} \cdot \frac{a^5(\cos^2\alpha+\cos\alpha)}{2S^2} \cdot (1+\cos\alpha) =$$

$$= \frac{a^8(\cos^2\alpha+\cos\alpha)^2}{4S^3}.$$

Также найдём, что $S = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) =$
$= a^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, откуда $a^2 = \frac{S}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$,

$$S(\alpha) = \frac{(a^2)^4(\cos^2\alpha+\cos\alpha)^2}{4S^3} = \frac{S^4\cos^2\alpha(1+\cos\alpha)^2}{4S^3\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha} =$$

$$= \frac{S}{4}\left(\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha}\right) = \frac{S}{4}\cdot\left(\frac{1+\cos\alpha}{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}\right)^2 =$$

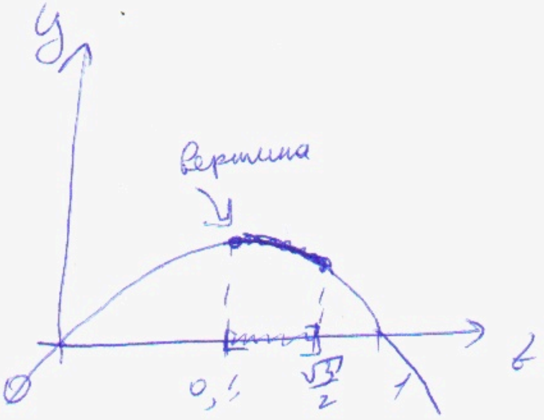
$$= \frac{S}{4}\cdot\left(\frac{1}{(1-\cos\alpha)\cos\alpha}\right)^2.$$

Заметим, что экстремумы будут достигаться там, где экстремум $\left(\frac{1}{(1-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}\right)^2$, а т.к. под квадратом при $30^\circ \le \alpha \le 60^\circ$ положительное число, то нужно экстремум $\frac{1}{(1-\cos\alpha)\cos\alpha}$, а для этого экстремум $-\cos^2\alpha+\cos\alpha$ при $30^\circ \le \alpha \le 60^\circ$: $0{,}5 \le \cos\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Смотрим график $y = -t^2 + t$, где $t = \cos\alpha$:

Беловик.

№5 (продолжение)



Значит, $\cos\alpha = 0{,}5$ ($\alpha = 60°$) — максимум $y = -b^2 + b$, это соответствует $\min(S(\alpha)) =$

$$= \frac{S}{4}\left(\frac{1}{(1-0{,}5)0{,}5}\right)^2 = 4S = 4\cdot 1 = 4.$$

А $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\alpha = 30°$) — минимум $y = -b^2 + b$, это соответствует $\max(S(\alpha)) =$

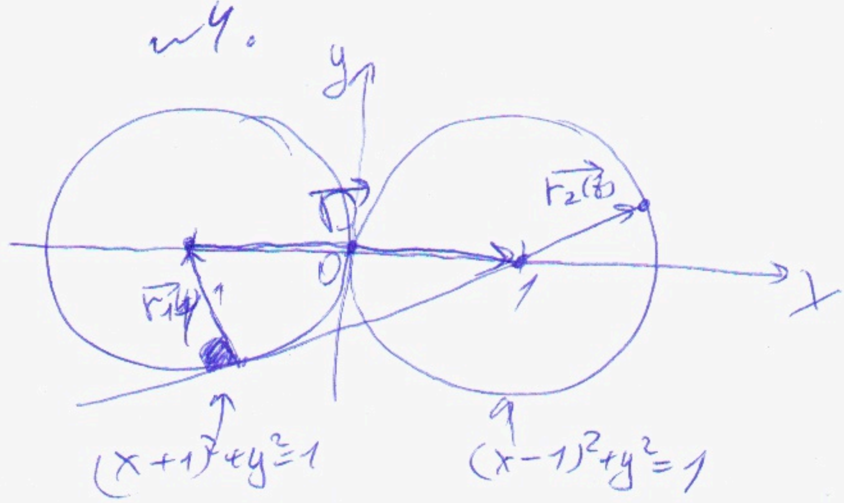
$$= \frac{S}{4}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \frac{S}{4}\cdot\left(\frac{4}{2\sqrt{3}-3}\right)^2 = \frac{S}{4}\left(\frac{4(2\sqrt{3}+3)}{3}\right)^2 =$$

$$= 4S\cdot\frac{12+12\sqrt{3}+9}{9} = 4S\,\frac{7+4\sqrt{3}}{3} = \frac{28+16\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: 4; $\frac{28+16\sqrt{3}}{3}$.

№4.

Рисунок:

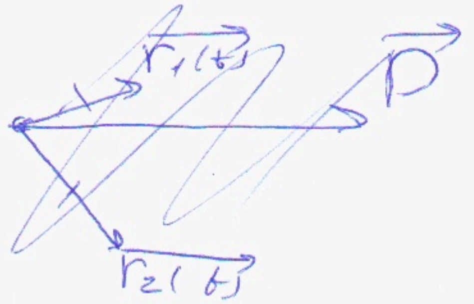


Беловик.

№4 (продолжение).

Тогда вектор расстояния между автомобилями:

$$\vec{d} = \vec{r_1(t)} + \vec{D_0} + \vec{r_2(t)},$$



Пусть радиус окр. равен 1, t_0 — полчаса из усл. тогда, t

$$\vec{r_1}(t) \cdot \vec{r_2(t)} = r_{1x_1}(t) \cdot r_{2x_2}(t) + r_{1y_1}(t) \cdot r_{2y_2}(t) =$$

$$= \cos\left(30^\circ - \frac{t}{t_0} \cdot 360^\circ\right) \cdot \cos\left(60^\circ - \frac{t}{t_0} \cdot 360^\circ\right) +$$

$$+ \sin\left(30^\circ - \frac{t}{t_0} \cdot 360^\circ\right) \cdot \sin\left(60^\circ - \frac{t}{t_0} \cdot 360^\circ\right) =$$

$$= \cos\left(\cancel{360 - \frac{t}{t_0}} \; 30^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = |\vec{r_1(t)}| \cdot |\vec{r_2(t)}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha =$$

№7.

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}\right)^{2021}$$

Поймём, что у нас не будет после раскрытия скобок слагаемых $\sqrt{ab}$, где a, b, c — $3; 5; 7$. В самом деле, если таковое будет, то оно могло получиться в результате перемножения $\sqrt{a}^x$, $\sqrt{b}^y$, $\sqrt{c}^z$, где x — неч. число, y — нечётное, z — чётное, но тогда $x+y+z$ — чётное число, а 2021 — нечётное, значит, все числа будут кратны: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ и $\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7}$.

Черновик

(1) $f(n) = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5$

$\cancel{4\cdot(-125) + 6\cdot 25 - 4\cdot 5 + 5 =}$

$\cancel{= 25(6-20) - 3\cdot 5 =}$

$=$

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 =$

$= (1 + \ldots + n)^2$

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} \leq 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} \leq 5 \end{cases}$

$|y+8| \leq 1$, $-1 \leq y+8 \leq 1$

$-9 \leq y \leq -7$

$|x+8| \leq 5$, $-5 \leq x+8 \leq 5$

$-13 \leq x \leq -3$

$\begin{cases} 0 \leq x^2+y \leq 1 \\ 0 \leq x^2+y-1 \leq 25 \end{cases}$,

$\begin{cases} 0 \leq x^2+y \leq 1 \\ 1 \leq x^2+y \leq 26 \end{cases}$,

$x^2+y=1$

$\begin{cases} 1 + |y+8| = 1 \\ |x+8| = 5 \end{cases}$, $\rightarrow \begin{cases} y = -8 \\ \left[\begin{array}{l} x = -13 \\ x = -3 \end{array} \right. \end{cases}$,

$\begin{cases} x = -3 \\ y = -8 \end{cases}$

$14 \times 5 = 70$

14×15

$7 \times 30 = 210$

$210 \times 3 = 630$

$31 \times 3 = 93$

$630 + 94 = 724$

$724 \times 7 = 5068$

$724 \times 5 = 3620$

(7)

3. a, b, c: $\begin{cases} x^2+bx+a=0 \\ x^2+cx+a=-1 \end{cases}$ ← имеют по 2 целых корня, все корни > 1.

$\min(a) = ?$

$$\begin{cases} x^2+bx+a=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right. \\ x^2+cx+(a-1) \iff \left[\begin{array}{l} x=x_3 \\ x=x_4 \end{array}\right. \end{cases}$$

целые, ≥ 2

$4 \leq x_1 \cdot x_2 = a$

$4 \leq x_3 \cdot x_4 = a-1$

$a \geq 5$

~~a=4~~:

$a=5$, невозм

$a=6$, невозм,

$a=7$ невозм

$a=8$ невозм

$a=9$ не подх

$x^2+bx+9=0$ — $x_1=3$, $x_2=3$

$x^2+cx+8=0$, — $x_3=2$, $x_4=4$

$a=10$, $\varnothing$

$a=11$, $\varnothing$

$a=12$, $\varnothing$

$a=13$, $\varnothing$

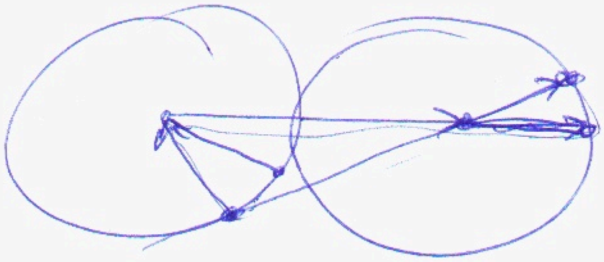
$a=14$, $\varnothing$

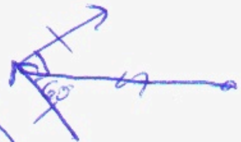
$a=15$ ✓

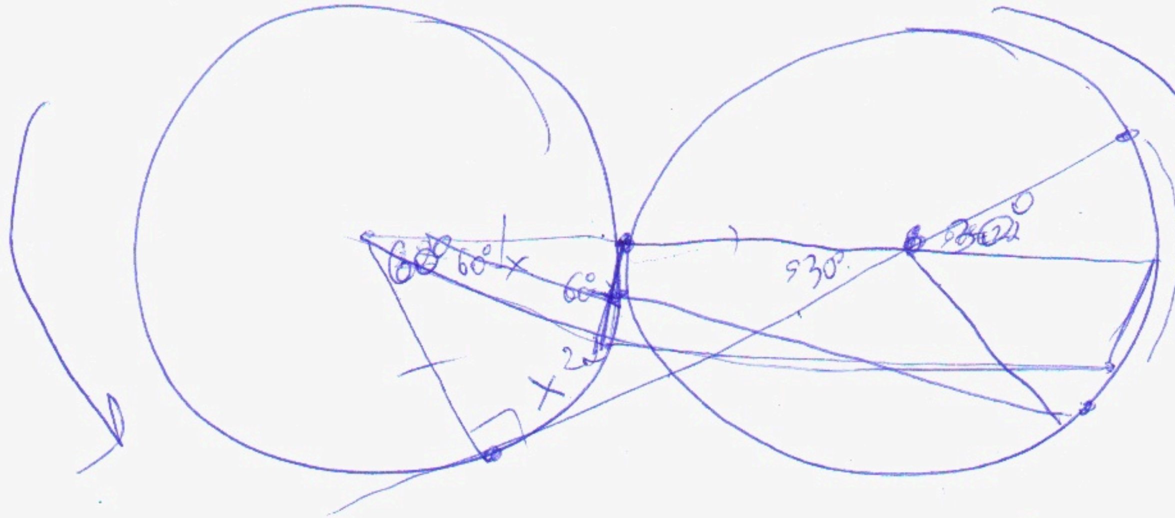
4. α и β одинакового радиуса;

2

Черновик:





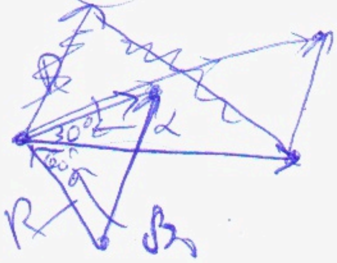


Пусть t времени прошло (из t_0):

$180° - x + 30° =$
$= 210° - x.$

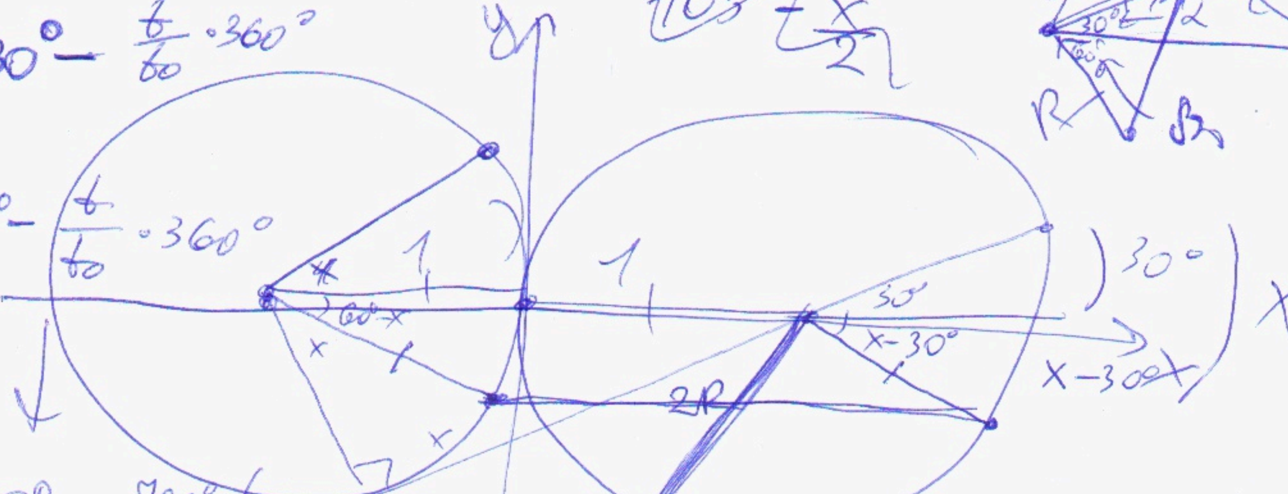
$\vec{d} = \vec{r_1}(t) + \vec{B} + \vec{r_2}(t)$

$105° - \frac{x}{2}$



$30° - \frac{t}{t_0} \cdot 360°$

$60° - \frac{t}{t_0} \cdot 360°$



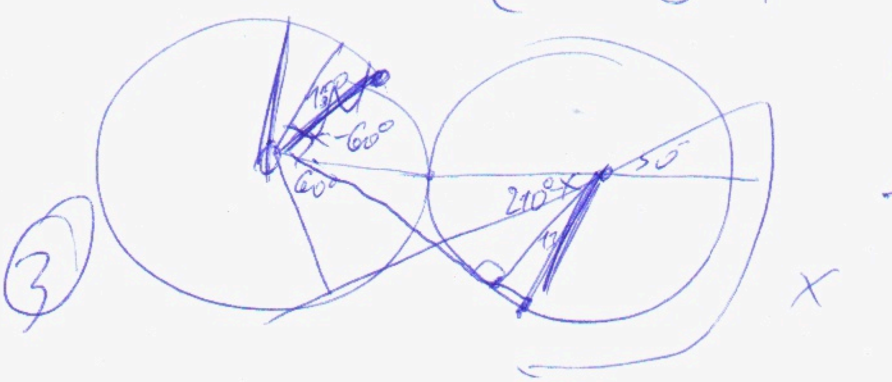
$90° - \frac{720° t}{t_0}$

$(x+1)^2 + y^2 = 1$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

$60° - x = x - 30°;$

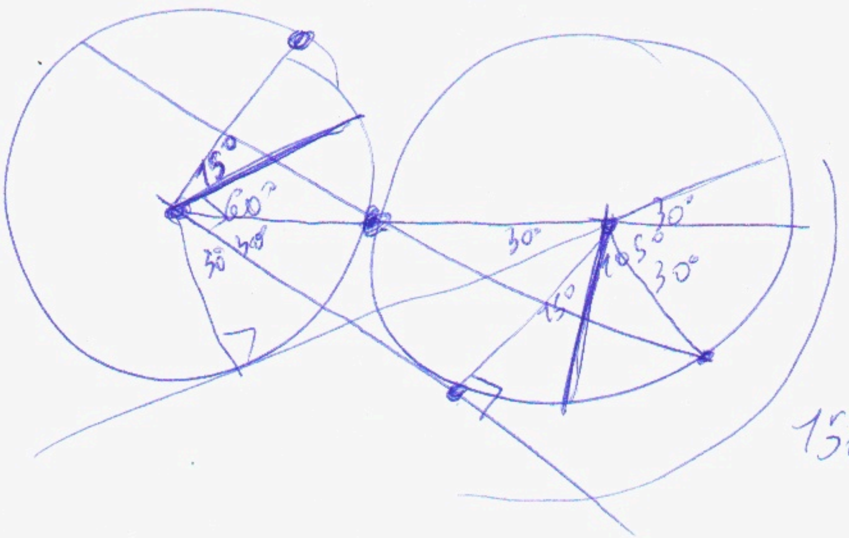
$x = 45°.$



$210° - x = x - 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 135°$

$$\begin{array}{r} 137 \\ -\ 60 \\ \hline 75 \end{array}$$

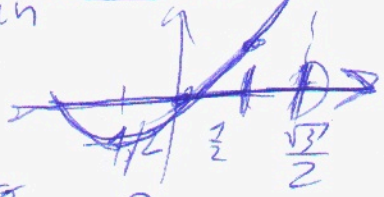


150°

x^2+x

$x_0 = -\frac{1}{2}$

min



$$S(\alpha) = \frac{a^8 \cdot \cos\alpha(1+\cos\alpha)^2}{2S^3} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot (1+\cos\alpha)}{2S^2}$$

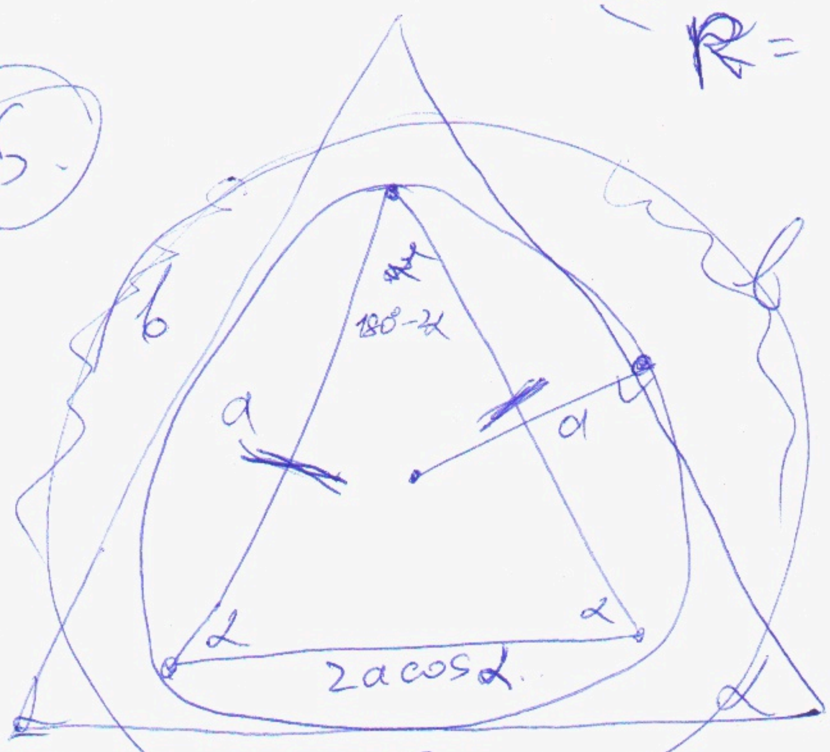
$$= \frac{a^8}{4S^3}\left(\cos^2\alpha + \cos\alpha\right)^2$$

$$\frac{b}{a} = \frac{R}{r} = \frac{\frac{a^3\cos\alpha}{2S}\cdot a(1+\cos\alpha)}{S} = \frac{a^4(\cos\alpha+1)\cdot\cos\alpha}{2S^2}$$

$$\frac{S(\alpha)}{b(1+\cos\alpha)}$$

$$R = \frac{2a^3\cos\alpha}{4S} = \frac{a^3\cos\alpha}{2}$$

5.



$$b = \frac{a^3(\cos^2\alpha+\cos\alpha)}{2S^2}$$

$S' = 1$

$$\frac{a^2}{2}\cdot\sin 2\alpha = a^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$S = \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha = a^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

4

~~2b cos α~~

$$r = \frac{S}{a(1+\cos\alpha)}$$

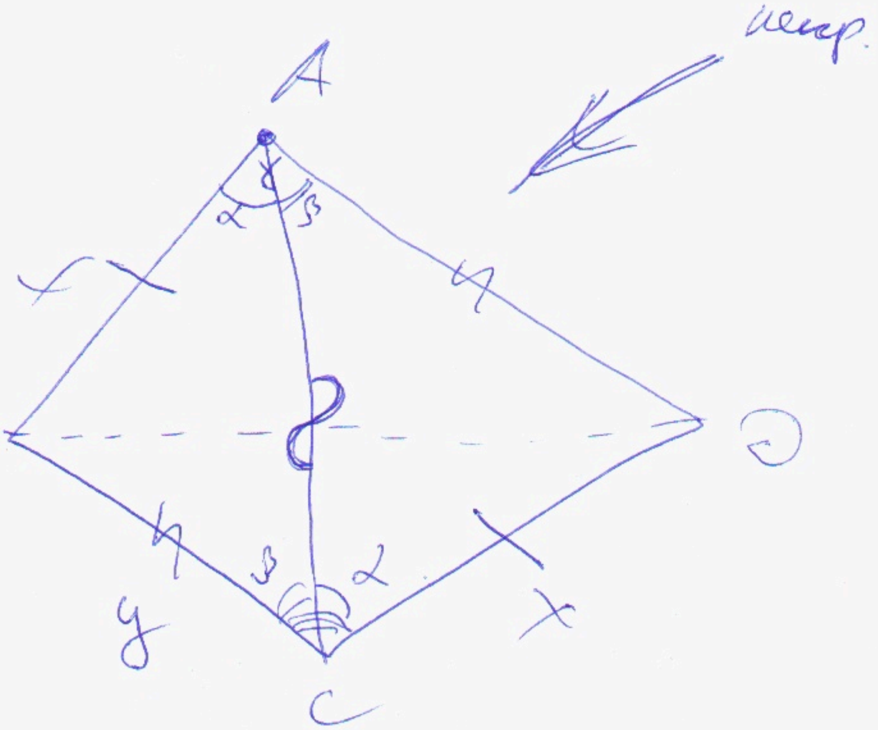
Черновик.

6.

Σ плоск. $\angle$ при $A = 180^\circ$

$S_{BCD} = S = S_{ABD}$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



$\triangle ACB = \triangle CAD$

$\triangle BCD = \triangle DAB$

$$S = \frac{xy}{2} \cdot \sin\gamma$$

$$S'_{ABC} = \frac{xy}{2} \cdot \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \frac{xy}{2} \sin\gamma = S$$

---

7. $(a+b+c)^3 = (a^2+b^2+c^2+2ab+bc+ca)$

5.

$$\left((\sqrt{7}+\sqrt{3})+(\sqrt{5})\right)\left((\sqrt{7}+\sqrt{3})-(\sqrt{5})\right) =$$

$$= (\sqrt{7}+\sqrt{3})^2-5 = 2\sqrt{21}+5$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^3 = (3+5+7+2\sqrt{15}+2\sqrt{21}+2\sqrt{35})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}) =$$

$$= (15+2\sqrt{15}+2\sqrt{21}+2\sqrt{35})(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}) =$$

$$= 15\sqrt{3}+15\sqrt{5}+15\sqrt{7}+6\sqrt{5}+10\sqrt{3}+2\sqrt{3\cdot5\cdot7}+$$

$$+6\sqrt{7}+2\sqrt{3\cdot5\cdot7}+14\sqrt{3}+2\sqrt{3\cdot5\cdot7}+10\sqrt{7}+$$

$$+14\sqrt{5}=$$

$$=$$

$$\frac{(1+\cos\alpha)^2}{(1-\cos^2\alpha)^2\cdot\cos^2\alpha} = \left(\frac{1+\cos\alpha}{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}\right)^2 =$$

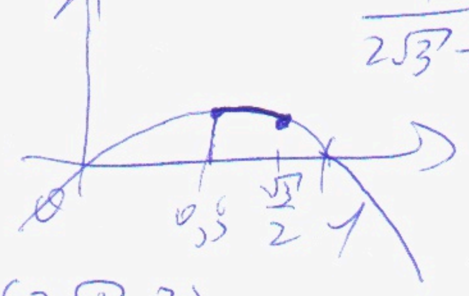
$$=\left(\frac{1}{(1-\cos\alpha)\cos\alpha}\right)^2$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{-\cos^2\alpha+\cos\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2\sqrt{3}-3}{4}=$$

$$\frac{4}{2\sqrt{3}-3}=$$



$$=\frac{4(2\sqrt{3}+3)}{3}$$

6

Председателю апелляционной комиссии

Олимпиады школьников «Ломоносов»

Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова

академику В.А. Садовничему

ученика 11 класса

МБОУ «Лицей-интернат №24»

города Нижнекамска

Званцова Матвея Юрьевича

Апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (70) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что в задаче 4 следовало поставить баллы за малое продвижение. В задаче 5 в целом всё верно: 1 экстремальный случай получен, во втором небольшие недочёты. В задаче 7 следовало бы поставить 10 баллов за некоторые оценки.

01.04.2021 (подпись)