



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Зверева Мария Андреевна**

Класс: **8**

Технический балл: **72**

Дата проведения: **19 марта 2021 года**

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Зверева Мария Андреевна

7-8 классы

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Сумма*
16 баллов	16 баллов	16 баллов	16 баллов	0 баллов	4 балла	72 балла

* К сумме баллов по всем задачам добавлялось 4 балла в случае, если в работе есть хотя бы одна верно решённая задача.

Тестовик

Задача 1.



Пусть $S_{\text{ит}}$ - половина всего пути, $v_1^{\text{км}}$ - скорость первого автомобиля, $v_2^{\text{км}}$ - начальная скорость второго, причем $v_2 = 3v_1$, по усл.

Рассмотрим все время, за которое проехал второй все расстояние:

$$\frac{S}{v_2} + \frac{\frac{1}{2}S}{\frac{1}{2}v_2} + \frac{\frac{1}{4}S}{\frac{1}{4}v_2} + \dots + \frac{\frac{1}{256}S}{\frac{1}{256}v_2} + x = 9 \frac{S}{v_2} + x$$

Здесь x - это время за которое он проехал оставшийся путь со скоростью $\frac{1}{256}v_2$. Пусть этот путь равен y . Тогда:

$$\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \dots + \frac{1}{256}S + y = S$$

$$\frac{128+64+32+16+8+4+2+1}{256}S + y = S$$

$$\frac{255}{256}S + y = S$$

$$y = \frac{1}{256}S$$

$$\text{Тогда } x = \frac{\frac{1}{256}S}{\frac{1}{256}v_2} = \frac{S}{v_2}, \text{ а}$$

значит $9 \frac{S}{v_2} + x = 10 \frac{S}{v_2}$ - время движения второго

Заметим, что время движения первого равно $\frac{2S}{v_1}$,
когда $\frac{10 \frac{S}{v_2}}{2 \frac{S}{v_1}} = \frac{5 \cdot \frac{S}{v_2}}{2 \frac{S}{v_1}} = \frac{5v_1}{2v_2} = \frac{5v_1}{3v_1} = \frac{5}{3}$

Итак, второму потребовалось в $\frac{5}{3}$ больше первого времени на преодоление всего пути

Ответ: $\frac{5}{3}$

Задача

Задача 2.

Пусть Вася задумал число ab , тогда после перемены он получил число ba такое, что $ba^2 = 4ab$, т.е. $ba = 2\sqrt{ab}$ (но $-2\sqrt{ab}$ нам не подходит по смыслу задачи)

$ba = 2\sqrt{ab}$, а значит ab - полный квадрат (в противном случае мы получим не совсем двузначное число).

Рассмотрим двузначные полные квадраты и числа с другим порядком цифр этих же квадратов:

$$16 - 61$$

$$25 - 52$$

$$36 - 63$$

$$49 - 94$$

$$64 - 46$$

$$81 - 18$$

проверим каждое из этих чисел:

1. $61 = 2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$ не подходит

2. ~~52~~ $52 = 2\sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$ не подходит

3. $63 = 2\sqrt{36} = 12$ не подходит

4. $94 = 2\sqrt{49} = 14$ не подходит

5. $46 = 2\sqrt{64} = 16$ не подходит

6. $81 = 2\sqrt{81} = 18$ подходит

Единственное число, которое подходит (можете проверить пара чисел), это $81 - 18$. Заметим, что утверждение $18 \cdot 18 = 81 \cdot 4$ ($9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2$) верно, а значит $ab = 81$

Ответ: 81

Тимошев

Задача 3.

Заметим, что все "интересные" числа - степени простых, ведь если число можно представить в виде различных простых множителей², то произойдет мы приведем пример неинтересного числа: легко привести в пример число 6, его делители по возрастанию 1, 2, 3, 6, но 3 не делится на 2. А значит нам нужны "степени" простых чисел, не больших 10 (в этом случае мы получим трехзначные числа, а по условию нужно найти все числа от 20 до 90, т.е. двузначные). Рассмотрим их:

$$2: 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128 \dots$$

$$3: 3; 9; 27; 81; 243; \dots$$

$$5: 5; 25; 125; \dots$$

$$7: 7; 49; 343; \dots$$

Заметим, что из этих 4 числовых рядов нам подходит лишь числа 32; 64; 27; 81; 25; 49. На всякий случай проверим каждое из них:

$$32: 1; 2; 4; 8; 16; 32$$

подходит

$$64: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64$$

подходит

$$27: 1; 3; 9; 27$$

подходит

$$81: 1; 3; 9; 27; 81$$

подходит

$$25: 1; 5; 25$$

подходит

$$49: 1; 7; 49$$

подходит

Ответ: 25; 27;
32; 49; 64; 81

Зачетовик

Задача 4.

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+2021)^2 = x^2(x-2)^2 + (x-1)^2 + \dots + (x-2020)^2$$

$$(x+2021)^2 - (x-2020)^2 + (x+2019)^2 - (x-2018)^2 + \dots + (x+3)^2 - (x-2)^2 + (x+1)^2 - x^2 = 0$$

$$(2x+1)(2021+2020) + (2x+1)(2019+2018) + \dots + (2x+1)(3+2) + (2x+1)(1+0) = 0$$

инок. $(2x+1)$ будет во всех таких числах, т.к. если

мы приведем это к общему виду, то ~~$(x+m+1)^2 - (x-m)^2$~~

$$= \cancel{(x+m+1)^2} + \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + \cancel{x^2} \quad (x+m+1)^2 - (x-m)^2 = (x+m+1+x-m)(x+m+1-x-(-m)) = (2x+1)(m+m+1)$$

$$+ 1 - x - (-m)) = (2x+1)(m+m+1)$$

$$(2x+1)(2021+2020+2019+\dots+3+2+1+0) = 0$$

либо $2x+1=0$, либо $2021+2020+\dots+3+2+1=0$, но

$2021+2020+\dots+3+2+1$ не может быть равно 0, т.к.

это сумма положительных чисел, а значит

$$2x+1=0$$

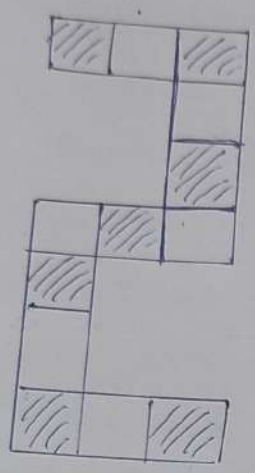
$$2x=-1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

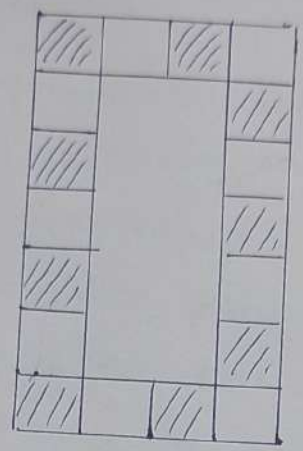
Ответ: $-\frac{1}{2}$

Тристовик

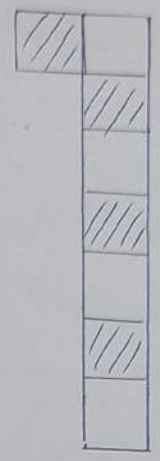
Задача 6. (супер)



7 черных
6 белых



9 черных
9 белых



4 черных
4 белых

Раскрасим фигуры так, как показано выше.
Рассмотрим каждую из предложенных пар "фигур" и всевозможные ситуации с ними:

1. плитки 1×1 расположены только в "двойках":

это значит, что в какой-то из двоек находится 3 таких плитки, а в какой-то одна (две быть не может, т.к.

у нас останется либо 5 черн. и 6 бел., либо 6 черн. и 5 бел., либо 7 черн. и 4 бел., и мы не сможем расположить плитки

2×1 , т.к. одна такая плитка обязательно займет одну белую и одну черную клетку, какого-то цвета не хватит), ~~причем~~ рассмотрим лучше в первой двойке

3 таких плитки. Тогда две из них будут черные и одна белая (две белых и одна черная не могут быть, т.к. будет 4 бел. и 6 черн, не сможем расставить плитки

2×1 , аналогично не получится, если все ~~так~~

Тестовые

будут белые или черные), причем одна белая и одна черная обязательно должны располагаться "по соседству" (в противном случае мы не сможем расположить плитки 2x1 или нам понадобится еще одна плитка 1x1, но она должна находиться во "второй двойке"). Всего возможных расположений 7*6 именно в этой двойке. Но у нас есть еще вторая, в которой 7 способов расположить плитку 1x1 (именно столько, т.к. 7 черных клеток, а эта плитка не может находиться на белой клетке (мы не сможем расположить плитки 2x1)). А значит всего способов $7 \cdot 7 \cdot 6 = 49 \cdot 6$

Для второй двойки рассуждение аналогичное. Еще 49*6 способов.

2. плитки 1x1 есть в "нуле":

Это значит, что в обеих двойках по одной плитке 1x1, а в нуле 2 таких плитки (поэтому в двойке не может быть по две таких плитки сказано в п.1) - Противоречия нет, а значит мы можем спокойно поставить 2 плитки в ноль. Но! только если одна "такая" плитка будет стоять на черной клетке, а другая на белой (в противном случае у нас останется 7 черных и 9 белых или 9 черных и 7 белых и мы не сможем расставить плитки 2x1). Всего способов тогда будет $7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 = 49 \cdot 81$

3. плитки 1x1 есть в "единице":

рассуждение такое же, что и в п.2. Всего способов $7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 4 = 49 \cdot 16$

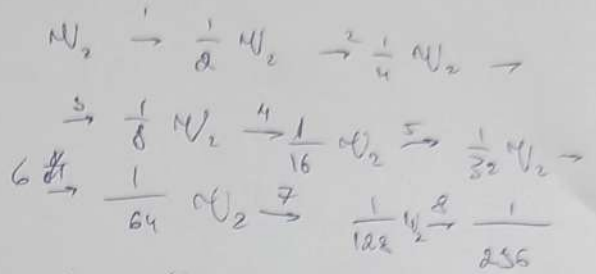
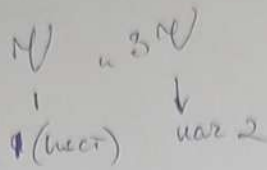
Тригонометрия

$$\begin{aligned} \text{Умнож. всего способов} &= 49 \cdot 16 + 49 \cdot 81 + 49 \cdot 2 \cdot 6 = \\ &= 49(16 + 81 + 12) = 49 \cdot 109 = 5341 \end{aligned}$$

Ответ: 5341

Зернобур

S-оды



N_1 -конечная

возра на 256 N_1

$$\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{256 N_1}{1111}$$

1. $7 \cdot 6 \cdot 7$
2. $7 \cdot 6 \cdot 7$
3. $7 \cdot 7 \cdot 16$
4. $7 \cdot 7 \cdot 81$

$$ab \rightarrow ba \quad ba^2 = 4ab$$

$$ba = 2\sqrt{ab}$$

$$\begin{matrix} 25 & 36 & 49 \\ 64 & 81 & -18 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 9 & 27 & 81 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 5 & 25 \end{matrix}$$

$$18 \cdot 18 = 9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 = 4 \cdot 81$$

Задача 3: 27, 81, 32, 64, 25, 49

~~Задача 2 81~~



$$(x+1)^2 + (x+3)^2 + (x+5)^2 + \dots + (x+2021)^2 = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \dots + (x-2020)^2$$

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 = x^2 + (x-2)^2$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + x^2 + 6x + 9 &= x^2 + x^2 - 4x + 4 \\ 8x + 10 &= -4x + 4 \end{aligned} \right\}$$

$$5341$$

$$8x + 10 = -4x + 4$$

$$12x + 14 = 0$$

$$x = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6}$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 10x + 25 = x^2 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 8x + 16$$

$$18x + 35 = -12x + 20$$

$$30x = -15 \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 8 \\ 109 \\ 149 \\ \hline 987 \\ 436 \\ \hline 49 \\ \hline x7 \\ \hline 393 \end{array}$$

Зерковник

$$2x + 4x + 6x + 8x + \dots = 2(x + 2x + 3x + 4x + \dots + 2021x)$$

$$= 2(2021x \cdot 1010 + 2021x) = 2 \cdot 2021x \cdot 1011$$

$$2020^2 - 2021^2 + 2018^2 - 2019^2 + 2016^2 - 2017^2 \dots$$

$$\boxed{\text{Задана } 4 - \frac{1}{2}}$$

$$(x+1)^2 (x+2021)^2 - (x-2020)^2 =$$

$$\boxed{\text{Задана } 6 \neq 4753}$$

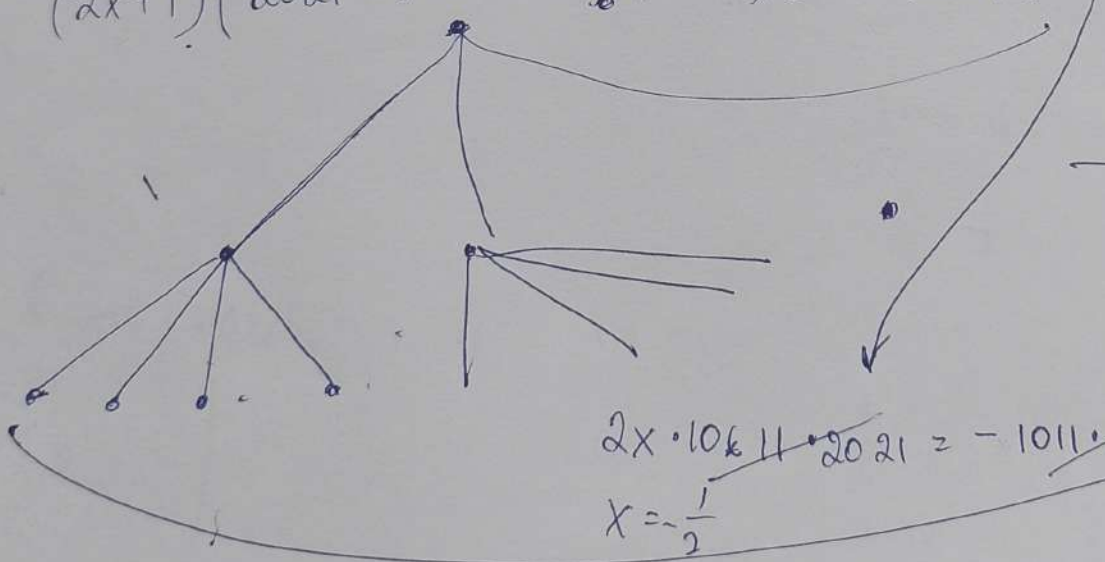
$$= (2x+1)(4041 \overset{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5}{\dots})$$

$$7 - 7 \cdot 97$$

$$(2x+1)(2021 + 2020 + 2019 + 2018 + \dots + 3 + 2 + 1)$$

$$(2x+1)(2021 + 2021 \cdot 1010) = (2x+1) \cdot 1011 \cdot 2021$$

$$\begin{array}{r} 7 - 7 \cdot 97 \\ 8 \\ 6 \\ 49 \\ \times 97 \\ \hline + 343 \\ 401 \\ \hline 4753 \end{array}$$



$$2x \cdot 1011 \cdot 2021 = -1011 \cdot 2021$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

16

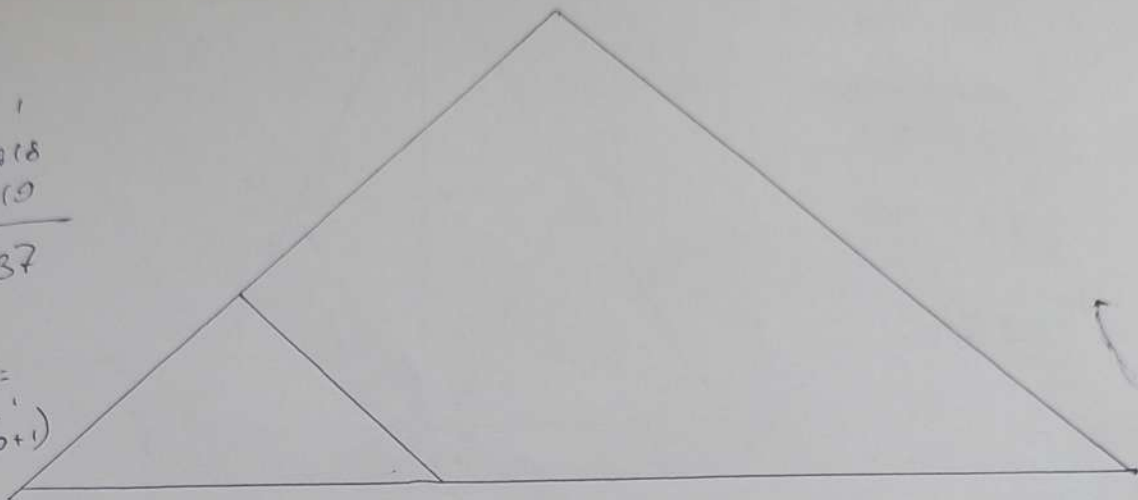
+ 81

97

Задача

$$\begin{array}{r} 2018 \\ + 2019 \\ \hline 4037 \end{array}$$

$$0^2 - 1^2 = (0-1)(0+1)$$



$$(x+1)^2 + (x+3)^2 + \dots + (x+2021)^2 = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \dots + (x-2020)^2$$

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 = x^2 + (x-2)^2$$

$$2x + 6x + 10x + 14x = -2x - 8x - 12x$$

$$2x + 6x + 10x + 14x + \dots = 2020^2 - 2021^2 + 2018^2 - 2019^2 - \dots - 2^2 - 3^2$$

$$= -4041 - 4037 \dots$$

7 7 49 72 68

в перх: $x_0 \dots x_6$

1 11 13 кк

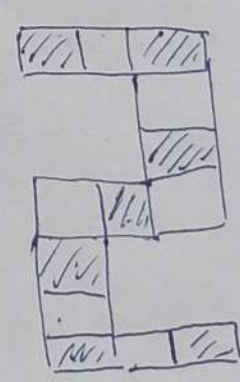
18

13 кк

8

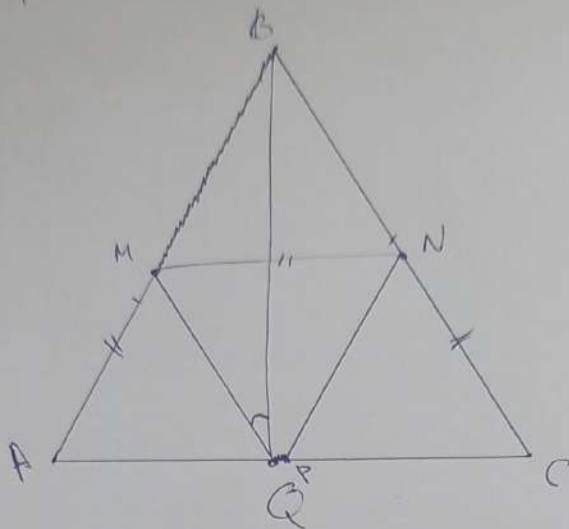
- 1 - 7
- 2 - 7
- 3 - 7
- 4 - 7
- 5 - 7
- 6 - 7
- 7 - 7

$$C_7^1 = \frac{7!}{6!} = 7$$



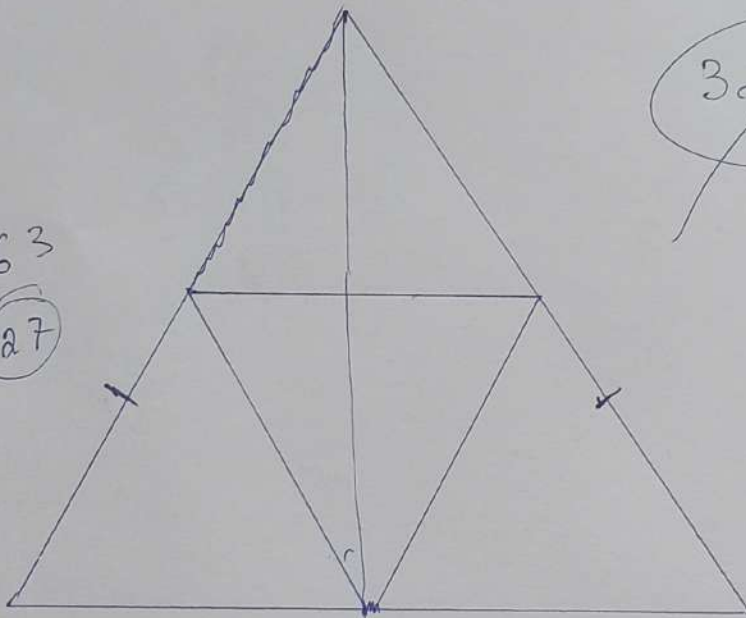
- 2:
- 3:
- 4:

Зерновик



$AB=BC$
 $AM=MN=NC$
 $MQ \parallel BC$
 $NP \parallel AB$
 $PQ \perp AC$
 $\angle QAB = ?$

~~Задача 1: $\frac{1}{3}$~~



3
 7
 15
 31
 63
 127

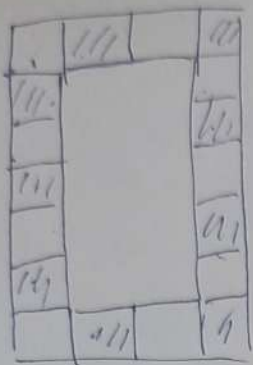
$M_1 = \frac{1}{3} M$

$I = \frac{2S}{M_1}$
 $\frac{8}{M_1} + \frac{1}{2} \frac{S}{M_1} = \frac{S}{M_1} + \frac{1}{M_1} + \dots$
 $II: 9 \frac{S}{M_1} + \dots \geq 10 \frac{S}{M_1}$

$II = \frac{1}{2} S + \frac{1}{4} S + \frac{1}{8} S + \frac{1}{16} S + \dots + X = S$
 $\frac{2S}{M_1} = \frac{10 \frac{S}{M_1}}{2 \frac{S}{M_1}} = \frac{5 \frac{S}{M_1}}{\frac{S}{M_1}} = \frac{128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1}{256} S + XS = S$
 $\frac{255}{256} + \frac{1}{256} X = 1$
 $\frac{1}{256} X = \frac{1}{256}$
 $X = \frac{1}{256}$
 $\frac{255}{256} + \frac{1}{256} = 1$
 $\frac{1}{256} = \frac{1}{2^8}$
 $\frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^3 \cdot 2^5} = \frac{1}{8 \cdot 32} = \frac{1}{256}$
 $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

он глалга үрөхөл нөгөөгөөр гаргав

Зерно бук



9
9

9x9
81



4x4 16

49

7-7

1-7

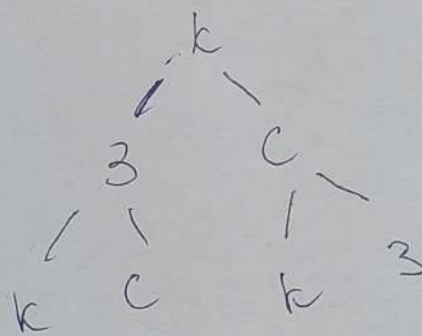
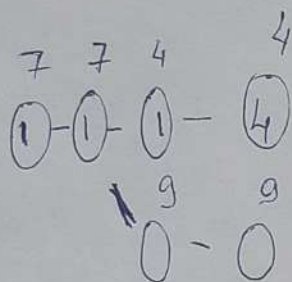
2-7

3-7

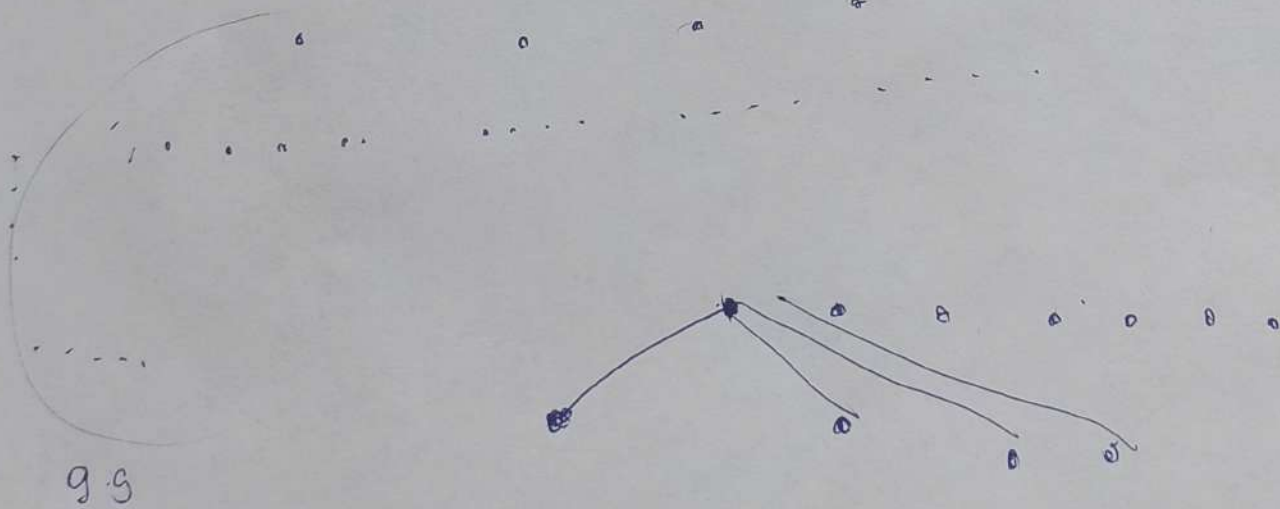
4-7

5-7

6-7



100.4



9.9

4.4

4