МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Зиганшин Алим Инзарович**

Класс: **11**

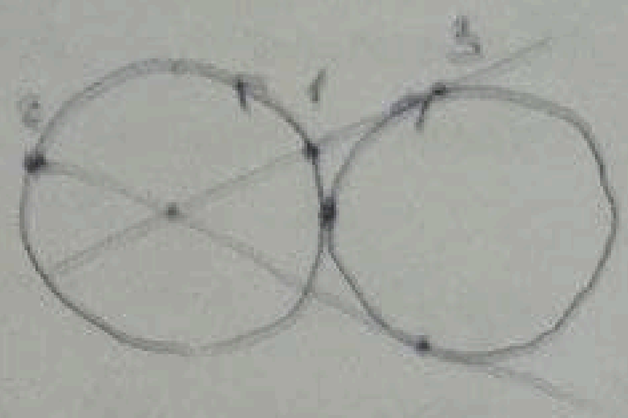
Технический балл: **85**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

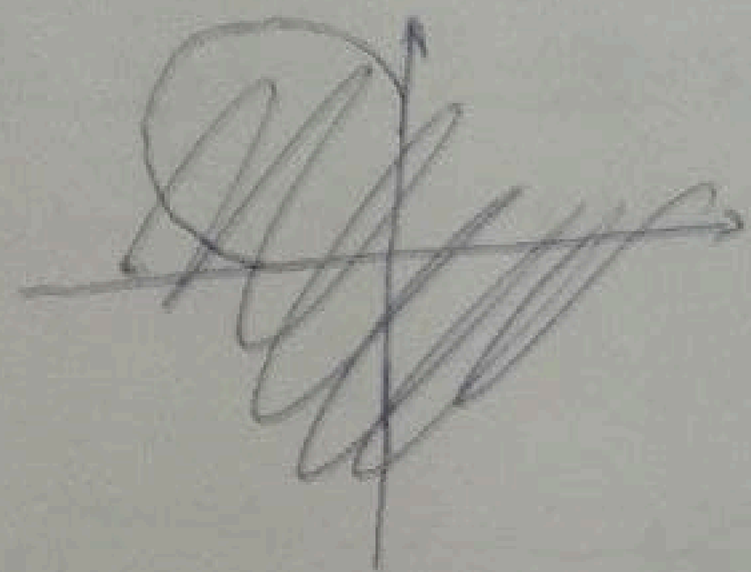
№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	5	15	5

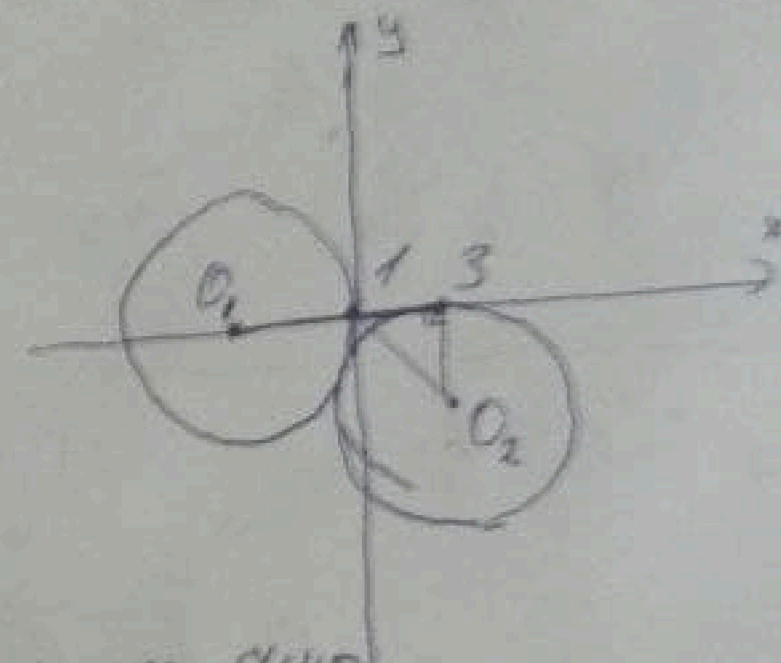
№4 Чистовик [стр 5]



A: может находиться в точках 1 и 2, чтобы во время движения начать удаляться от точки касания.
2 - не уд., т.к. тогда B будет приближаться к точке касания =>
A в точке 1, B в точке 3

=> в точках 1 и 3.





Введём координаты так, что
A изначально был в $(0;0)$, а B был на оси Ox.
Тогда O_1 - центр окр. α будет $O_1(-R,0)$
т.к. 13 - касательная к окр. β, то
$O_2 3 \perp OX$ $\Rightarrow$ $\triangle O_2 3 1$ - прямоугольный
и $\triangle O_1 3 O_2$ - прямоугольный.

$O_1O_2 = 2R \qquad O_2 3 = R$

$\Rightarrow O_1 3 = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3} R$

$\Rightarrow 13 = (\sqrt{3} - 1) R$

$\Rightarrow O_2\left((\sqrt{3}-1)R; -R\right)$

Чистовик. | стр 4.

№3.

для второго уравнения

По теореме Виета $a = x_1 x_2$ - корни уравнения

Заметим, что т.к. $x_1 \geq 2$ и $x_2 \geq 2$, то

$a \geq 4$ и a - не простое.

Для первого уравнения:

$(a+1) = x_3 \cdot x_4 \Rightarrow a+1 \geq 4$ и $(a+1)$ - не простое.

$$\begin{cases} a \geq 4 \\ a \text{ - не простое} \\ a+1 \text{ - не простое} \end{cases}$$

a = 1 - не уд

a = 2 - не уд

a = 3 - не уд

a = 4 - не уд

a = 5 - не уд

a = 6 - не уд

a = 7 - не уд

a = 8 - уд

a = 8: пример:

$x^2 - 6x + 8 = -1$

корни $x_1 = 3$ и $x_2 = 3$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

(если корни ещё должны быть различными, то a = 8 - не уд $a \in [9; 13]$ - не уд и a = 14)

Ответ: a = 8

№4 пусть k – угол смещения от начального положения. т.к. они движутся с равными скоростями, то для обеих машин этот угол одинаковый.

пусть A – положение гонщика на окруж. α.
B – положение гонщика на окруж β.

тогда $A_k\left(-R+R\cdot\cos\alpha;\ R\sin\alpha\right)$

$B_k\left((\sqrt{3}-1)R+R\sin\alpha;\ -R+R\cdot\cos\alpha\right)$

$$\rho(A_k;B_k)=\sqrt{\left((\sqrt{3}-1)R+R\sin\alpha+R-R\cos\alpha\right)^2+\left(R+R\sin\alpha-R\cos\alpha\right)^2}=$$

$$=R\sqrt{(\sqrt{3}+\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(1+\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$$

если $\sin\alpha-\cos\alpha=t$, то

$$(\sqrt{3}+t)^2+(1+t)^2=3+2\sqrt{3}t+t^2+1+2t+t^2=4+(2\sqrt{3}+2)t+2t^2$$

~~рассмотрим функцию~~

$$\rho(A,B)=R\sqrt{4+(2+2\sqrt{3})t+2t^2}\le 2R$$

т.е. расстояние не превышает диаметр.

$$4+(2+2\sqrt{3})t+2t^2\le 4$$ (подкоренное выражение – сумма двух квадратов => оно было неотрицательно)

$$t(2+2\sqrt{3}+2t)\le 0$$

$$t(t+1+\sqrt{3})\le 0$$

$+ \quad -1-\sqrt{3} \quad - \quad 0 \quad +$

$$-1-\sqrt{3}\le\sin\alpha-\cos\alpha\le 0$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\le\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}\le 0$$

№4. $-\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \le \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) \le 0 \iff \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) \le 0$, т.к.

Чистовик.
стр. 7.

$-\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \vee -1$

$-1-\sqrt{3} \vee -\sqrt{2}$

$\sqrt{2}-\sqrt{3} \vee 1$

$\sqrt{2}-\sqrt{3} < 1$

$\Rightarrow 2\pi n - \pi \le \alpha - \frac{\pi}{4} \le 2\pi n$

$2\pi n - \frac{3\pi}{4} \le \alpha \le 2\pi n + \frac{\pi}{4}$

вспоминаем, что $\alpha \in [0; 2\pi]$

$\Rightarrow \rho(A;B) \le D$ при

$\alpha \in [0; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}; 2\pi]$

$\Rightarrow$ ровно половина круга.

Ответ: 1 час.

Вариант 210108 | Чистовик

стр. 1.

№1. $f(1)+f(2)+\ldots+f(12)$

$$f(n)=4n^3-6n^2+4n+7$$

~~$f(1)=4-6+4+7=9$~~

~~$f(2)=4\cdot 8-6\cdot 4+4\cdot 2+7=$~~

$$f(n)=4n^3+4n-6n^2-6+13=$$

$$=4n(n^2+1)-6(n^2+1)+13$$

$$(4n-6)(n^2+1)+13$$

$$g(n)=(4n-6)(n^2+1)$$

$$g(1)=(4-6)\cdot 2=-4$$

$$g(2)=(8-6)5=10$$

$$g(3)=(12-6)\cdot 10=60$$

$$g(4)=(16-6)\cdot 17=170$$

$$g(5)=16\cdot 26=416$$

$$g(6)=18\cdot 37=666$$

$$g(7)=22\cdot 50=1100$$

$$g(8)=26\cdot 65=1690$$

$$g(9)=30\cdot 82=2460$$

$$g(10)=34\cdot 101=3434$$

$$g(11)=38\cdot 122=4636$$

$$g(12)=42\cdot 145=6090$$

$$\begin{array}{r} \times 82 \\ 3 \\ \hline 246 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 101 \\ 34 \\ \hline 3434 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 122 \\ 38 \\ \hline 976 \\ +366 \\ \hline 4636 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 145 \\ 42 \\ \hline 290 \\ +580 \\ \hline 6090 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 12 \\ \hline 26 \\ +130 \\ \hline 156 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 26 \\ 16 \\ \hline 156 \\ +26 \\ \hline 416 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 37 \\ 18 \\ \hline 296 \\ +37 \\ \hline 666 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 65 \\ 26 \\ \hline 390 \\ +130 \\ \hline 1690 \end{array}$$

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(12)=g(1)+g(2)+\ldots+g(12)+13\cdot 12=$$

$$\Rightarrow f(1)+f(2)+\ldots+f(12)=$$

$$=-4+10+60+170+416+666+1100+1690+2460+$$

$$+3434+4636+6090+156=$$

$$=$$

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

$x^2+y-1 \geqslant 0 \Rightarrow (x^2+y) \geqslant 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geqslant 1$

$\Rightarrow$ т.к. $|y+8| \geqslant 0$, то

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} = 1 \\ |y+8| = 0 \Rightarrow y=-8 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

I сл. $x=3$:

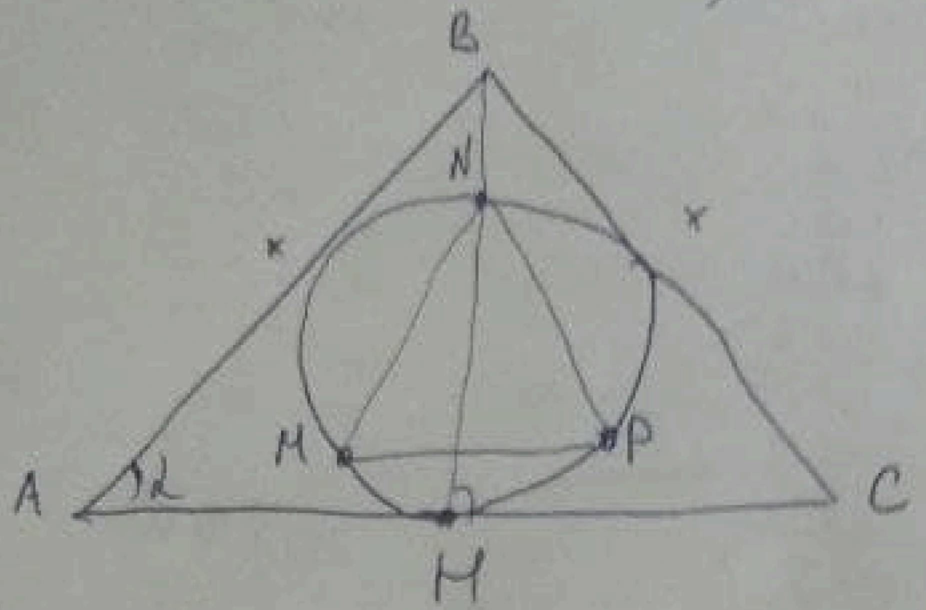
$\sqrt{9-8-1} + |3+8| \neq 5$ - не уд.

II сл. $x=-3$:

$\sqrt{9-8-1} + |-3+8| = 5$ - уд.

Ответ: $x=-3$, $y=-8$.

№ 5



1) $1 = S = \frac{1}{2} x^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} x^2 \sin 2\alpha$

$x^2 = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

$x = \sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha}}$

2) $S = pr$

$r = \frac{S}{p}$

$AH = x \cdot \cos\alpha \quad AC = 2AH = 2x \cdot \cos\alpha$

$r = \frac{S}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}(x + x + 2x \cdot \cos\alpha)} = \frac{1}{x(1+\cos\alpha)} =$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha}} \cdot (1+\cos\alpha)}$ — есть радиус описанной окружности для $\triangle MNP$

3) Найдем радиус описанной окружности $\triangle ABC$:

$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 1 = \frac{x \cdot x \cdot 2x \cdot \cos\alpha}{4R} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{x^3 \cos\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sqrt{\sin 2\alpha}}$

т.к. по условию $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, то

$k = \frac{AB}{MN} = \frac{R_{ABC}}{R_{MNP}} = \frac{R_{ABC}}{r_{ABC}} =$

$= \frac{\sqrt{2} \cos\alpha}{\sin 2\alpha \sqrt{\sin 2\alpha}} : \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha}} (1+\cos\alpha)}$

$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow S_{MNP} = \frac{1}{k^2} \cdot 1 = \left(\frac{r_{ABC}}{R_{ABC}}\right)^2 =$

$= 1 : \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{2} \cdot (1+\cos\alpha)}{\sin 2\alpha \cdot \sqrt{\sin 2\alpha} \cdot \sqrt{\sin 2\alpha}}\right)^2 =$

$= 1 : \left(\frac{2 \cdot \cos\alpha \cdot (1+\cos\alpha)}{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\alpha}\right)^2 = \frac{\sin^4 2\alpha}{4\cos^2\alpha \cdot (1+\cos\alpha)^2} =$

№5. (продолжение) | Чистовик. | стр 9.

$$S_{мнр} = \frac{\sin^4 2\alpha}{4\cdot\cos^2\alpha\,(1+\cos\alpha)} = \frac{16\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha}{4\cdot\cos^2\alpha\cdot(1+\cos\alpha)} =$$

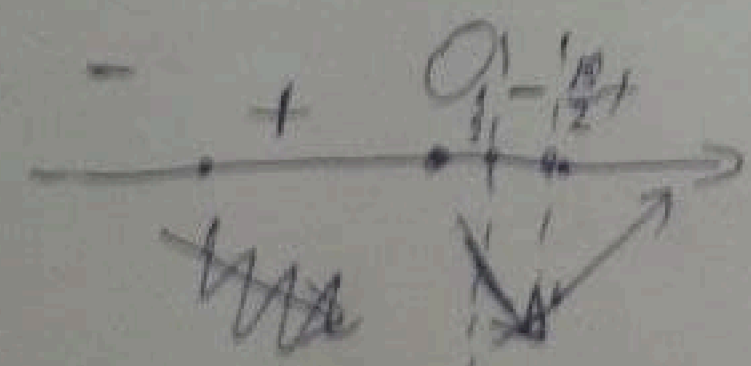
$$= \frac{\cancel{16}\,4\cdot(1-\cos^2\alpha)^2\cdot\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2} = |\cos\alpha = t| =$$

$$= \frac{4\cdot(1-t^2)^2\cdot t^2}{(1+t)^2} =$$

$$= \frac{4\cdot(1-t)^2\cdot(1+t)^2\cdot t^2}{(1+t)^2} =$$

$$= 4(1-t)^2\cdot t^2 = 4\cdot(t^2-2t+1)\cdot t^2 =$$

$$S'(t) = 8(t-1)t(t+1) > 0$$



$\Rightarrow$ от 0 до 1 $S(t)$ - убывает.

$\cos_{мин} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos_{макс} = \cos 60°$

$$S_{макс} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_{мин} = S(30°) = 4\cdot\frac{3}{4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$= 3\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Чистовик | стр. 11.

№7 выбирая из каждой из 2021 ~~скобок~~ скобки по 1-му члену, получим

$$\sqrt{5}^{\alpha} \cdot \sqrt{7}^{\beta} \cdot \sqrt{11}^{\gamma}, \text{ где } \gamma = 2021 - \alpha - \beta.$$

$\Rightarrow$ либо только 1 из α, β, γ - нечетный,

либо все 3 нечетные.

(аналогично с β и γ)

если α - четное, то $\sqrt{5}^{\alpha}$ - целое, ~~какое~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $n\sqrt{5}$ это $\sqrt{5}^{\alpha} \cdot \sqrt{7}^{\beta} \cdot \sqrt{11}^{\gamma}$, где

α - нечетное, а β и γ - четные

$\Rightarrow$ n - целое

аналогично m, k, l

№7.

№1 (продолжение)

~~= 20528 + 156 =~~

~~= 20684~~

= 20676 + 156 =

= 20832

Ответ: 20832

~~Ответ: 20684.~~

Чистовик.

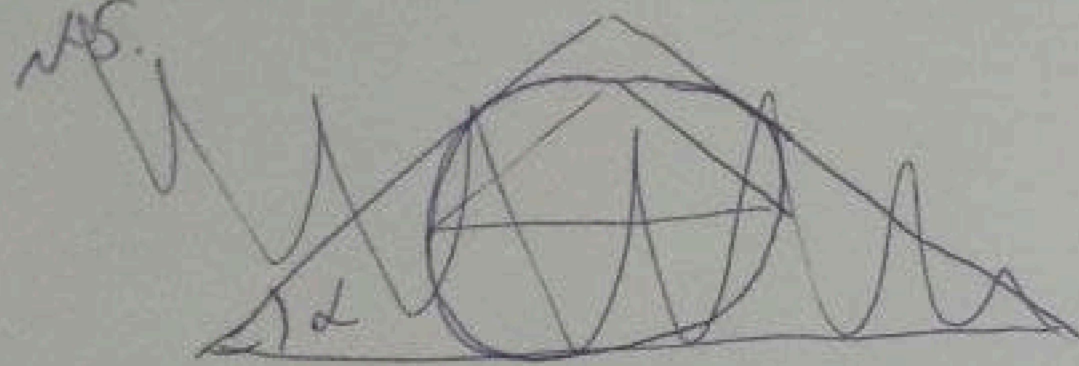
стр2.

$$\begin{array}{r} 6090 \\ +\,4636 \\ \hline 10726 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10726 \\ +\,3434 \\ +\,2460 \\ +\,1690 \\ +\,1100 \\ +\,666 \\ +\,416 \\ +\,170 \\ +\,60 \\ +\,10 \\ \hline 11732 \end{array}$$

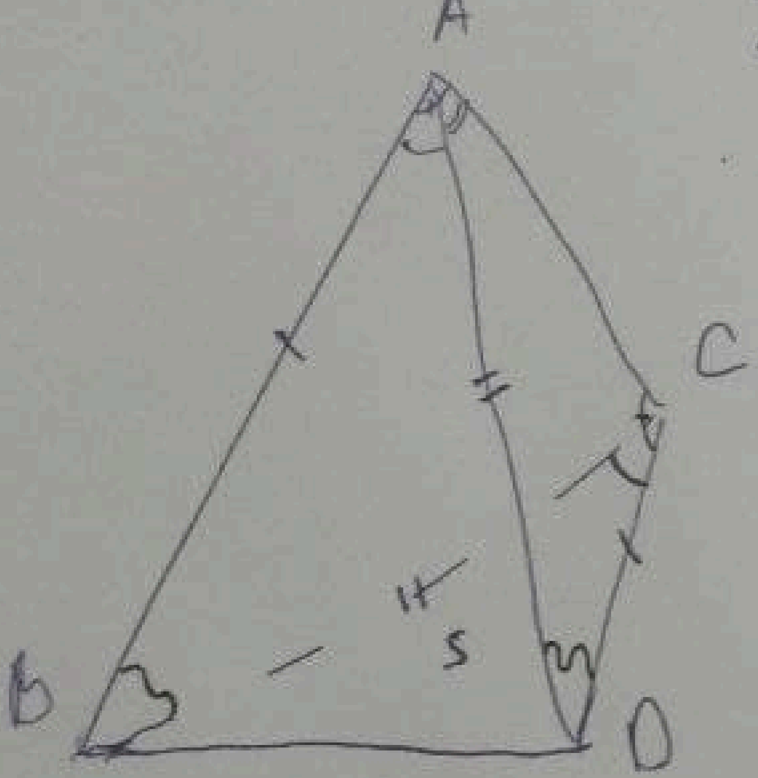
$$\begin{array}{r} 6090 \\ +\,4636 \\ +\,3434 \\ +\,2460 \\ +\,1690 \\ +\,1100 \\ +\,666 \\ +\,416 \\ +\,170 \\ +\,60 \\ +\,10 \\ \hline 20680 \\ -\,4 \\ \hline 20676 \end{array}$$

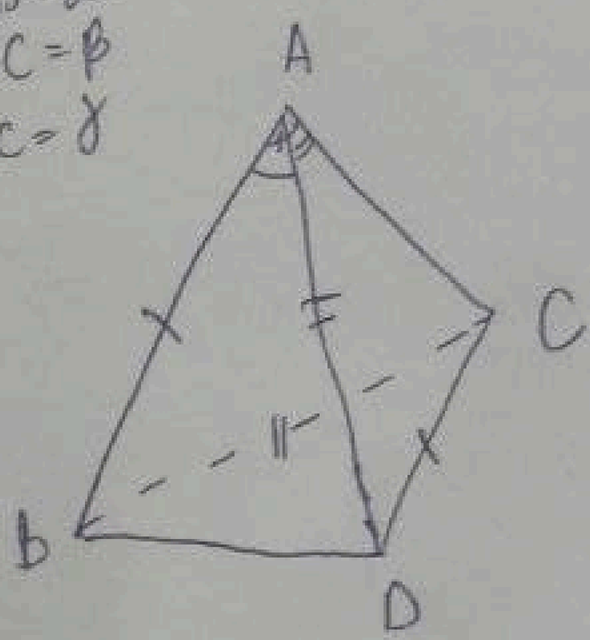
№5.



№6.

$\angle BAD = \alpha$
$\angle DAC = \beta$
$\angle BAC = \gamma$





$\triangle ABD = \triangle BCD$ (по 3-м стор.)

$\Rightarrow \angle BCD = \angle BAD = \alpha$

$\triangle ABC = \triangle ADC$ (по 3-м стор)

$\Rightarrow \angle BAC = \angle ACD = \gamma$

$\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \angle ACD - \angle DAC =$

$= 180^\circ - \gamma - \beta = \alpha$

$\Rightarrow \triangle BDC = \triangle ADC$

по ($AD = BC$ и CD-общая
и $\angle ADC$ и $\angle BCD$ равны α)

$\Rightarrow$ все 4 треугольника равны

($\triangle BAC = \triangle BCD = \triangle ACD = \triangle ABD$)

$\Rightarrow$ площадь поверхности равна $4S$.

Ответ: $4S$.

№5

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Черновик 12

$$\begin{array}{r} -20812 \\ 156 \\ \hline 20676 \end{array}$$

№3 по теореме Виета

$a = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow a \geq 4$

$(a+1) = x_3 \cdot x_4 \Rightarrow (a+1) \geq 4$

$a = 3$ - не уд.

$a = 4$ - не уд.,

т.к. 5 нельзя представить в виде произведения двух чисел, больших 1 целых

$a = 5$ - не уд (аналог.)

4
5
6
7

$a \in 8$

$a = 2 \cdot 4$

$a+1 = 3 \cdot 3$

$x^2 - 6x + 8 = -1$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

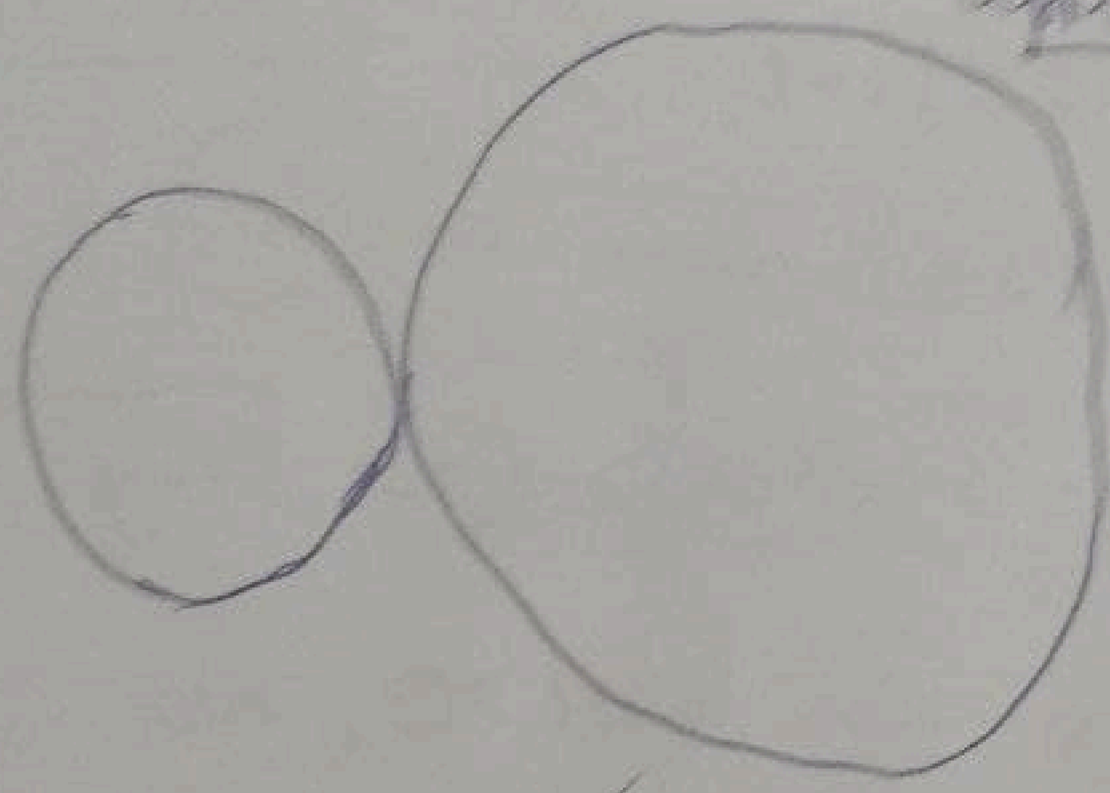
$x = 3$

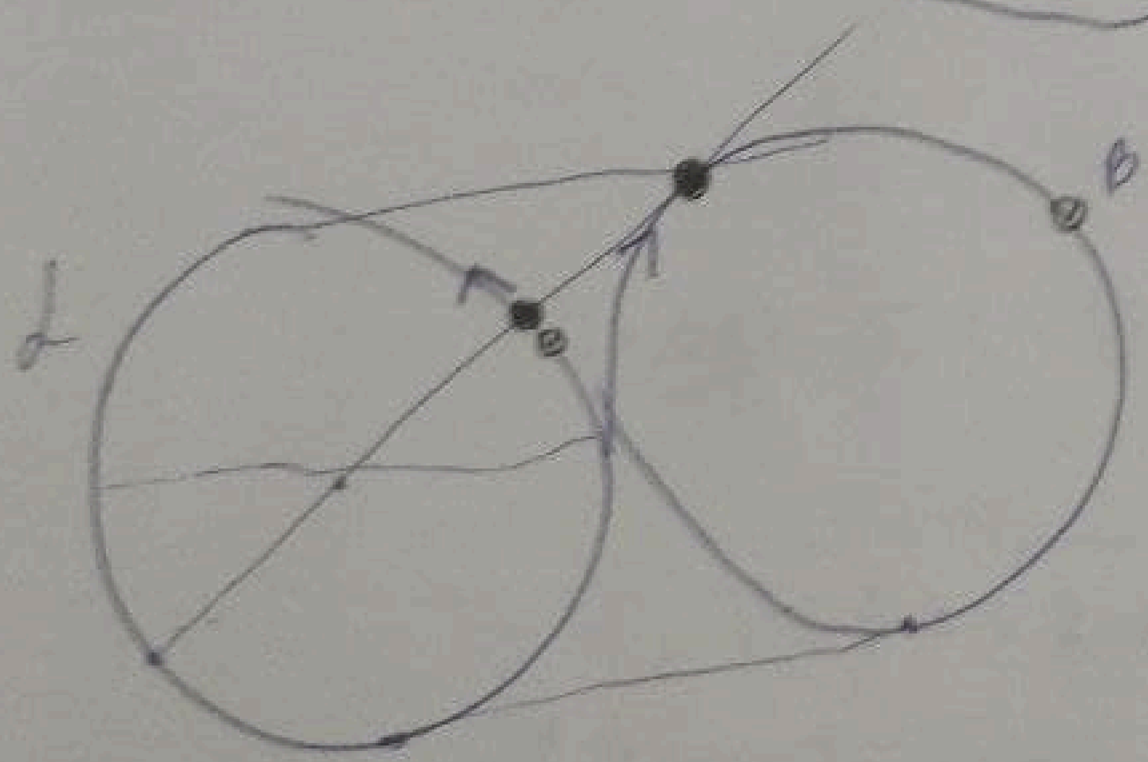
$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-2)(x-4) = 0$

Черновик B

№4





№7. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)^{2021}$ Черновик. 14

$\left(\sqrt{5}^{\alpha}\cdot\sqrt{7}^{\beta}\,\sqrt{11}^{\gamma}\right)$

$\sqrt{11}^{1}$

$\sqrt{11}^{3}$

$\vdots$

$\sqrt{11}^{2021}$

$\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)^{3}=\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)=$

$=\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}+\right.$

$=5\sqrt{5}+5\sqrt{7}+5\sqrt{11}+5\sqrt{7}+7\sqrt{5}+$

$+5\sqrt{11}+\sqrt{5\cdot\sqrt{7}\sqrt{11}}+11\sqrt{5}$

$=5\left(\sqrt{5}+3\sqrt{7}+3\sqrt{11}+\cancel{\sqrt{7}+\sqrt{11}}\right)$

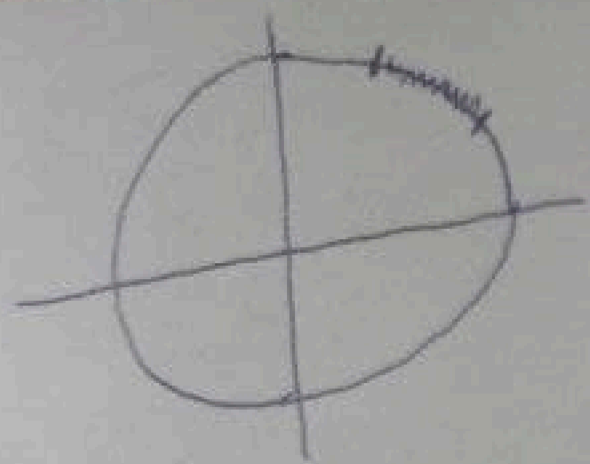
$7\left(\sqrt{7}+3\sqrt{5}+3\sqrt{11}\right)$

$11\left(\sqrt{11}+3\sqrt{5}+3\sqrt{11}\right)$

$6\cdot\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}$

$\sqrt{5}\left(5+21+33\right)+\sqrt{7}\left(7+15+33\right)+$

$+\sqrt{11}\left(11+15+21\right)+6\cdot\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}$



на промежутке от 30° до 60° $\sin\alpha$ возрастает, а $\cos\alpha$ – убывает. Учитывая, что при всех значениях в этом промежутке и $\sin\alpha$ и $\cos\alpha > 0$, то можно сказать, что минимум это $S(30^\circ)$ и максимум это $S(60^\circ)$:

$S(30^\circ) =$ $\sin^4 2\alpha$

Черновик 16

№5 (продолжение) Черновик 15

$$= \frac{16\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha}{4\cos^2\alpha\cdot(1+\cos\alpha)^2} = \frac{4\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2} =$$

$$= \frac{4\cdot(1-\cos^2\alpha)^2\cdot\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}$$

$\cos\alpha = t;\ |t|\le 1$

$$S = \frac{4(1-t^2)^2\cdot t^2}{(1+t)^2} = \frac{4(1-t)^2(1+t)^2\cdot t^2}{(1+t)^2} =$$

$$= 4t^2(1-t)^2 = 4t^2(t^2-2t+1) =$$

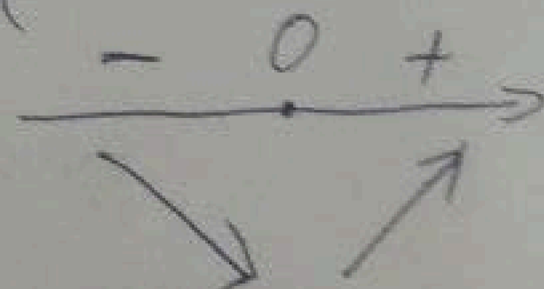
$$= 4t^4 - 8t^3 + 4t^2 = f(t)$$

$$f'(t) = 16t^3 - 24t^2 + 8t = 8t(8t^2-3t+1) =$$

$D = 9-32<0$

$= \cancel{8t}$

$3\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$



$\Rightarrow S_{мин}$ при $\cos\alpha \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{мин} = S(60^\circ) = \left| t = \cos 60 = \frac{1}{2} \right| =$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

S_{max} при $\cos\alpha \to 1 \Rightarrow S_{max} = S(30^\circ) =$

$= \left| t = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \right| =$

$= 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\cdot\left(1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right) =$

$= \frac{21}{4} - 3\sqrt{3}$

$\frac{3}{4}(2-\sqrt{3})^2 \not\vee \frac{1}{4}$

$3(2-\sqrt{3})^2 \not\vee 1$

$3(4-4\sqrt{3}+3) \not\vee 1$

$21-12\sqrt{3} \not\vee 1$

$20 \not\vee 12\sqrt{3}$

$5 \not\vee 3\sqrt{3}$