



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Исаева Елизавета Аликовна**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	5	15	15	15	0	15	0

Числовик

(2)

№ 2 Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} + |y - 5| = 2 & (1) \\ \sqrt{x^2 - y - 4} + |x - 2| = 1 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что и корень и модуль не могут принимать отрицательные значения \Rightarrow и в 1 и во 2 уравнениях сложимые не отрицательные \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y} \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - y - 4} \leq 1 \end{cases}$$

Учитываем ограничения на корень (подкоренное выражение ≥ 0)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - y - 4} \leq 1 \\ x^2 - y \geq 0 \\ x^2 - y - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y - 4 \leq 0 \\ x^2 - y - 4 \leq 1 \\ x^2 - y \geq 0 \\ x^2 - y - 4 \geq 0 \end{cases}$$

Но первое и последнее неравенства вместе могут выполняться только если $x^2 - y - 4 = 0$

Отсюда получаем (2):

$$|x - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Преобразуем (1): $x^2 - y = (2 - |y - 5|)^2$

1) $y \geq 5$ $x^2 - y = 4 + (y - 5)^2 - 4(y - 5) \Leftrightarrow x^2 - 2 - 4 = (y - 5)(y - 5 - 4)$

2) $y \leq 5$ $x^2 - y - 4 = (y - 5)^2 + 4(y - 5)$ $(y - 5)(y - 9) = 0$ $\begin{cases} y = 5 \\ y = 9 \end{cases}$

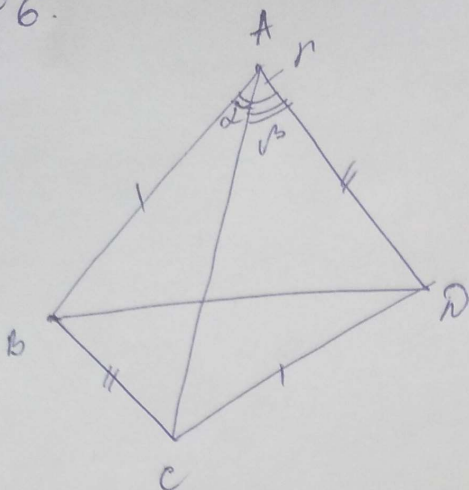
Подставим и проверим все полученные пары:

- 1) $x = 1$ $y = 5$ - не подх. (подкоренное выражение < 0)
- 2) $x = 1$ $y = 9$ - не подх (подкор. выражение < 0)
- 3) $x = 3$ $y = 5$ $\begin{cases} \sqrt{9 - 5} + 0 = 2 \\ \sqrt{9 - 5 - 4} + 1 = 1 \end{cases}$ - верно \Rightarrow подходит.
- 4) $x = 3$ $y = 9$ $\sqrt{9 - 9} + 4 = 2$ - не подх.
- 5) $x = 1$ $y = 1$ $\sqrt{1 - 1} + |1| = 2$ - не подх.
- 6) $x = 3$ $y = 1$ $\sqrt{9 - 1} + |1| = 2$ - не подх.

Ответ: $x = 3$
 $y = 5$.

Чистовик

№ 6.



Дано: α, β, γ - плоские углы при вершине A

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad AB = CD$$

$$S_{ABC} = S \quad AD = BC$$

S всей пирамиды - ?

(7)

Решение:

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$:

$AB = CD, AD = BC$ (по усл.), AC - общая \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACD \Rightarrow \angle BCA = \beta, \angle DCA = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle ADC = 180 - \alpha - \beta. \text{ По т.к. } \angle BAD + \angle BAC + \angle CAD = 180^\circ \text{ по усл. (плоские углы при A), то.}$$

$$\angle BAD = 180 - \alpha - \beta \quad \angle BAC - \angle CAD = 180 - \alpha - \beta.$$

В $\triangle ABD$ AB и AD отрезки с равными $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$,

и равный угол $\angle BAD = \angle ABC = \angle ADC = 180 - \alpha - \beta$.

Отсюда по двум углам и стороне $\triangle ABD =$

$$= \triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow \triangle BCD \text{ тоже равен всем им } \Rightarrow$$

\Rightarrow все грани равны

$$S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{\text{всей пирамиды}}$$

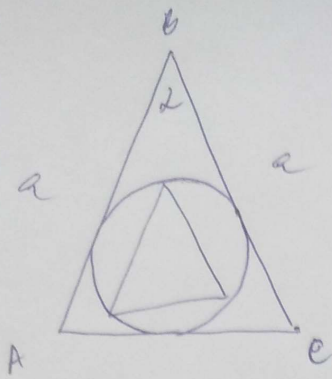
$$S_{\text{всей пирамиды}} = 4S.$$

Ответ: $4S$.

Условие

№ 05.

$$AB = BC$$



Максимум площади, вырезанной из данного Δ - вписанный в него.

Если $S = 1$, то $S = R \cdot p = 1$.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = 1$$

$$\frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin \alpha = 1$$

$$R = \frac{1}{p} \quad (6)$$

По т. косинусов.

$$AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos \alpha$$

$$AC = \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \alpha}$$

$$R = \frac{1}{a + \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \alpha}}$$

Если $\alpha \leq 90^\circ$ то вписанный Δ будет максимальным по площади подобен исходному, k_1

Их коэф. подобия $\frac{k_1}{R} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \alpha} (a + \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \alpha})}$ k_2

\neq Площади относятся как k^2

Если $\alpha > 90^\circ$, то наибольший Δ будет получаться если его основание сделать равным диаметру

$$k_2 = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \alpha} (a + \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \alpha})}$$

Квадраты k_1 и k_2 являются монотонно возрастающими, значит наиб. и наим. знач. достигается в концах отрезков.

Условие

№ 04

Предложение

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)a + 2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)a \leq 4.$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)a^2 + 4a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + 4 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4} \leq 4$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4}\right)a^2 + 4a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{4} \leq 0.$$

$$\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{4}\right)a^2 + 4a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{4} \leq 0.$$

Откуда: $\begin{cases} a \leq 0 \\ a \geq -1 - \sqrt{3} \end{cases}$

Опр. замена:

$$\cos \frac{4\pi}{3}t - \sin \frac{4\pi}{3}t \leq 0$$

$$\cos \frac{4\pi}{3}t - \sin \frac{4\pi}{3}t \geq -1 - \sqrt{3} \leftarrow \text{П.к. левая часть по модулю не больше 2, не подходит.}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos \frac{4\pi}{3}t - \sin \frac{4\pi}{3}t \leq 0.$$

$$\Downarrow$$

$$t \in \left[\frac{3}{16}; \frac{15}{16}\right]$$

искомое время

$$\frac{15}{16} - \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \leftarrow \text{искомая длина.}$$

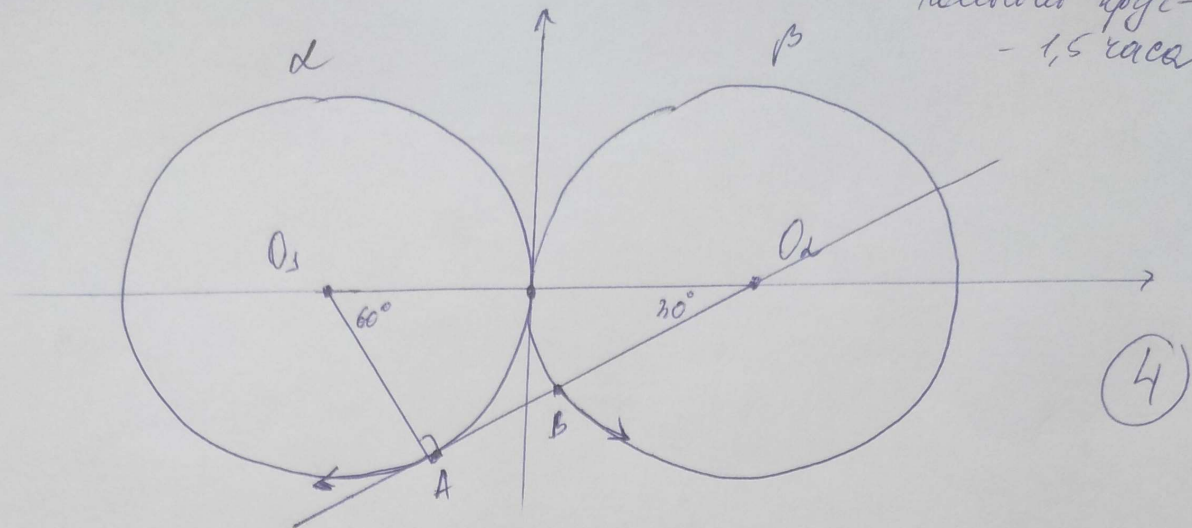
Ответ: $\frac{3}{4}$ часа.

(5)

№04

Числовик

Полный круг - 1,5 часа



Введем ось координат (x, y) с началом в точке касания двух окружностей.

Т.к. A и B удалены от т. касания двух окружностей т.к. B расположена между т. A и т. O_2 .

Из $\triangle AO_1O_2$: $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ (радиус в т. касания), O_1A в 2 раза меньше $O_1O_2 \Rightarrow \angle O_1O_2A = 30^\circ$, $\angle O_2O_1A = 60^\circ$.

Через t часов координаты автомобиля A :

$(\cos(-\frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}t) - 1; \sin(-\frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}t))$, а координаты автомобиля B :

$(\cos(-\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}t) - 1; \sin(-\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}t))$

Используем формулу расстояния для 2 точек:

$\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = d$ тогда

$$\sqrt{(\cos(-\frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}t) - (\cos(-\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}t) - 2))^2 + (\sin(-\frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}t) - \sin(-\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}t))^2} = 2$$

Тогда преобразовываем с помощью формулы суммы получаем:

$$((\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})(\cos \frac{4\pi}{3}t - \sin \frac{4\pi}{3}t) + 2)^2 + ((\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})(\cos \frac{4\pi}{3}t - \sin \frac{4\pi}{3}t))^2 = 4$$

$$\cos \frac{4\pi}{3}t - \sin \frac{4\pi}{3}t = a$$

$$((\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})a + 2)^2 + ((\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})a)^2 = 4$$

№3

a, b, c : (1) $x^2 + bx + a = 1$

(2) $x^2 + cx + a = 0$

имеют по 2 целых корня

x_1, x_2, x_3, x_4 - корни

$x_1, x_2, x_3, x_4 < -1$

найти a - ?

(1) $x^2 + bx + a - 1 = 0$

(2) $x^2 + cx + a = 0$

Если все корни целые, то и a и $a-1$ должны быть целыми $\Rightarrow a, b, c \in \mathbb{Z}$

(по т. Виета) $|x_1|, |x_2| > 1$

$|x_3|, |x_4| > 1$

Также по т. Виета:

$x_1 \cdot x_2 = a - 1$

$\Rightarrow a-1$ и a - составные положительные числа.

$x_3 \cdot x_4 = a$

(оба корня < -1 , \Rightarrow их произв. > 1).

Начнем перебирать все a и $a-1$, пока не встретим подходящие:

1; 2

2; 3

3; 4

4; 5

5; 6

6; 7

7; 8

8; 9

9; 10

10; 11

11; 12

12; 13

13; 14

14; 15

пара №01

пара №02

пара №03

1) Пара №01 - первая.
тогда $a = 9$ $a-1 = 8$

Но! $a = 9 = (-1) \cdot (-9) = (-3) \cdot (-3)$

не подх. на условия на корни

не подх., т.к. надо 2 разных корня.

2) Пара №02 -

не подходит по тем же причинам, что и пара №01, т.к. присутствует 9.

3) Пара №03. 14; 15.

$14 = (-2) \cdot (-7) = (-1) \cdot (-14)$

- подходит по всем условиям.

$15 = (-3) \cdot (-5) = (-15) \cdot (-1)$

Тогда наши уравнения принимают вид:

$x^2 + bx + 14 = 0$

значения a и b можно подобрать.

$x^2 + cx + 15 = 0$

Например: ($b = 9, c = 8$).

Ответ: $a = 15$.

уражение

№1

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$$

$$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 13$$

№2

$$\sqrt{x^2 - y - 4} + |x - 2| = 1$$

$$\sqrt{x^2 - y} + |y - 5| = 2$$

$$\sqrt{x^2 - y} = 2 - |y - 5|$$

$$\sqrt{x^2 - y} = 2 - |y - 5|$$

$$x^2 - y = 4 + y - 5 \pm 2(y - 5)$$

$$x^2 - y - 4 = (y - 5) \pm 2(y - 5)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & (y - 5)(y - 9) = \\ & (4 - 5 - 9)(y - 5) = (y - 5)^2 - 4(y - 5) = 4 - y - 4 = (y - 5)^2 - 4(y - 5) = 4 - y - 4 = (y - 5)^2 - 4(y - 5) \end{aligned}$$

(1)

№ 05.

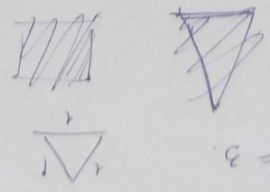
Упрощение

Супермакс.

Конт. и макс. гр. $S(\alpha)$ (покр. Δ)

$\alpha = 60^\circ$ $\angle OEA = 120^\circ$

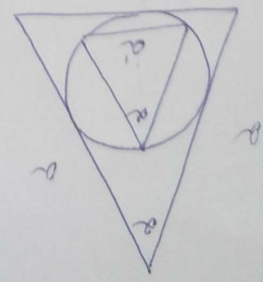
$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$



$P = 3$

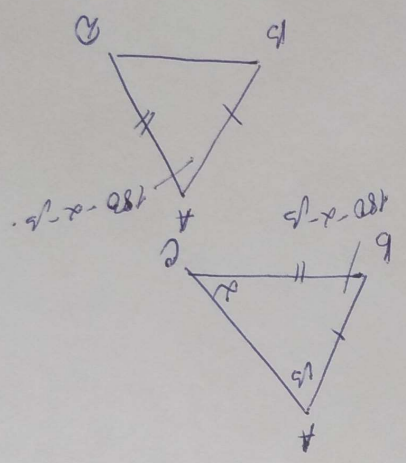
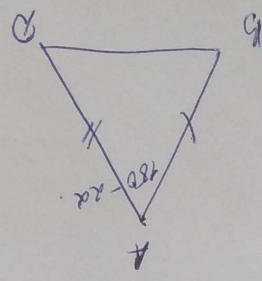
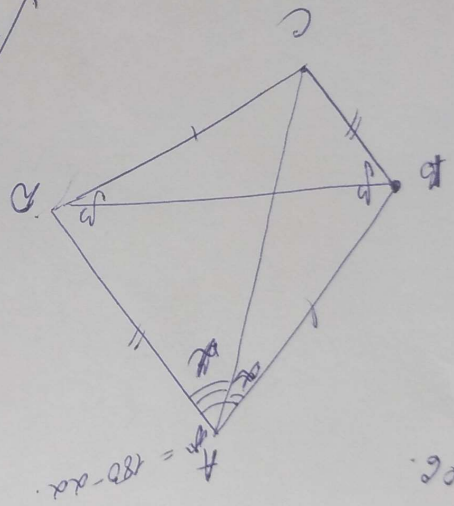
(1)

$S = 1$



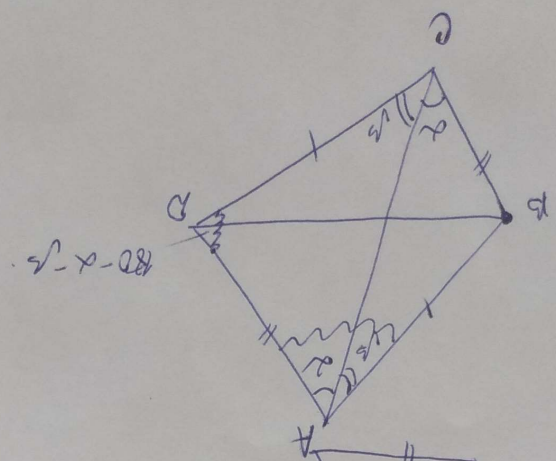
$R = \frac{a'}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$
 $R = \frac{a'}{S} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$

№ 06.



$S_{ABCE} = S_{ABCE} = S$
 $AB = CE$
 $\alpha + \beta + \delta = 180$
 $S_{ABCE} = S_{ABCE} = S$

(4S)



№2.

Чепробем

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-5| = 2 \\ \sqrt{x^2-y-4} + |x-2| = 1 \end{cases}$$

$$x^2-y-4 = (y-5)^2 - 4|y-5|$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} \leq 2 \\ \sqrt{x^2-y-4} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-y \leq 4 \\ x^2-y-4 \leq 1 \end{cases}$$

$$x^2-y \geq 0$$

$$x^2-y-4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2-y-4 \leq 0 \\ x^2-y-5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-y-4=0$$

$$|x-2|=1$$

$$\begin{cases} x-2=-1 & x=1 \\ x-2=1 & x=3. \end{cases}$$

$$(y-5)^2 - 4|y-5| = 0$$

$$y \geq 0$$

$$(y-5)^2 - 4(y-5) = 0$$

$$(y-5)(y-5-4) = 0$$

$$\begin{cases} y=5 \\ y=9. \end{cases}$$

Подставим и проверим.

1) $x=1, y=5$. - не подх. \times

2) $x=1, y=9$. - не подх. \times

3) $x=3, y=5$

$$\sqrt{9-5} + 0 = 2$$

$$\sqrt{9-5-4} + 1 = 1$$

- подх \checkmark

4) $x=3, y=9$.

$$\sqrt{9-9} + 4 = 2$$

- не подх \times

Ответ: $x=3, y=5$.

(5)

Числовая

$$f(1) + f(2) + \dots + f(13) \stackrel{!}{=} g \quad f(n) = 4n^2 - 6n + 4n + 13 =$$

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(6)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} f(n) = g &= 4(1^2 + 2^2 + \dots + 13^2) - 6(1 + 2 + \dots + 13) + \\ &+ 4(1 + 2 + \dots + 13) + 13 \cdot 13 = \end{aligned}$$

$$= 4 \cdot \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{6} - 6 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} + 4 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} + 13 \cdot 13 =$$

$$= 13^2 \cdot 14^2 - 13 \cdot 14 \cdot 15 + 2 \cdot 13 \cdot 14 + 13 \cdot 13 =$$

$$= 13 \cdot 14 (13 \cdot 14 - 15 + 2) + 169 =$$

$$= 182 (182 - 13) + 169 = 182 \cdot 169 + 169 =$$

$$= 169 (182 + 1) = 169 \cdot 183 =$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 183 \\ \hline \end{array}$$

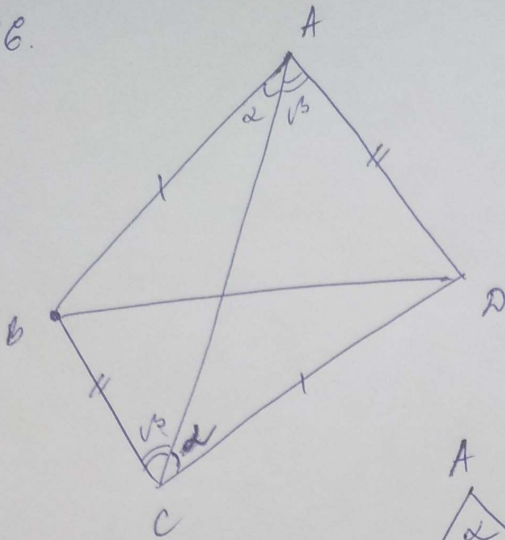
169 · 183

169 · 183

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 183 \\ \hline \end{array}$$

N. 06.

- 1 ✓
- 2 ✓
- 3 ✓
- 4
- 5
- 6 ✓
- 7



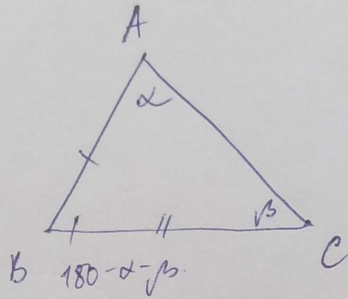
Чертюк

Чертюк
 $180^\circ - \alpha - \beta$ - площадь
 ушн при A.

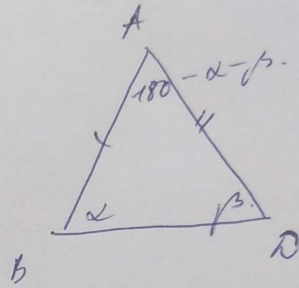
$S_{ABCE} = S$ $AB = CD$
 $AD = BC$

~~$\triangle ABE = \triangle AOC$~~

$\triangle ABE = \triangle ADE$



$S = 4S$



(7)

вариант 210103

Чистовик

①.

№1

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(13) = g$$

$$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 13.$$

] искомое выражение равно g , тогда подставим значения в функцию, получим:

$$g = 4 \cdot (1)^3 - 6(1)^2 + 4 \cdot (1) + 13 + 4(2)^3 - 6(2)^2 + 4(2) + 13 + \dots +$$

$$+ 4 \cdot (13)^3 - 6(13)^2 + 4 \cdot (13) + 13 =$$

$$= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 13^3) - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 13^2) +$$

$$+ 4(1 + 2 + 3 + \dots + 13) + 13 \cdot 13$$

воспользуемся формулами суммы 1, 2 и 3 степеней

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Тогда:

$$g = 4 \cdot \frac{13^2 \cdot 14^2}{4} - 6 \cdot \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{6} + 4 \cdot \frac{13 \cdot (14)}{2} + 13 \cdot 13 =$$

$$= 13^2 \cdot 14^2 - 13 \cdot 14 \cdot 15 + 2 \cdot 13 \cdot 14 + 169 =$$

$$= \underbrace{13 \cdot 14}_{182} (13 \cdot 14 - 15 + 2) + 169 = 182(182 - 13) + 169 =$$

182

$$= 169 \cdot 183$$

Ответ: 30927

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников «Ломоносов»
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему

от ученицы 11 класса ФГБОУ ВО Санкт-Петербургского
государственного университета, г. Петергоф, Собственный пр-
т, д. 1.

Елизаветы Аликовной Исаевой

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (60) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что

1. Задача номер 1. Я абсолютно правильно сгруппировала все члены на суммы степеней, выразила через формулы арифметической прогрессии, суммы квадратов и суммы кубов, для суммы арифметической прогрессии (суммы первых степеней) и суммы кубов написала верно, но при записи суммы квадратов допустила очевидную опечатку: вместо $n(n+1)(2n+1)/6$ написала $n(n+1)(n+2)/6$, из-за чего далее, используя формулу с этой опечаткой получила неправильный ответ. Эти формулы общеизвестны, очевидно, что это ничто иное, как опечатка, фундаментальной значимости эта опечатка не имеет, ведь идейно задача решена правильно, потому прошу пересмотреть оценку за неё.
2. Задача номер 2. Ответ верный, решение полное и правильное. Нет ничего, что присутствует в официальном решении, но отсутствует в моём.
3. Задача номер 3. Как и в официальном решении, в моём решении сказано: 1) произведение корней первого уравнения равно $(a-1)$, а произведение корней второго уравнения равно (a) ; 2) корни целые и каждый из них меньше (-1) , поэтому их произведение больше единицы; 3) (a) и $(a-1)$ это составные положительные числа. Далее я перебирала все числа до того момента, пока не нашла подходящую пару $(a-1)$ и (a) , причём перебор не был большим, так как включал в себя 3 пары.

Минимальное (а) найдено, проверка сделана, в условии не требовалось найти корни полученных многочленов. Ответ правильный, решение полное и правильное.

- 4. Задача номер 4. Ответ верный, решение полное и правильное. Нет ничего, что присутствует в официальном решении, но отсутствует в моём.*
- 5. Задача номер 5. Я, как и в решении, отдельно расписала случаи для вариантов, когда угол больше 90 градусов и когда он меньше 90 градусов, отличным образом выразила радиусы и соотношения (способом, отличным от приведённого в официальном решении), итоговое соотношение соответствующих радиусов получила, и так же, как и в официальном решении, правильно сказала, что полученная мною функция монотонная, поэтому граничные значения достигаются в концах отрезка, и единственное, что я не сделала, это не подставила нужные значения, потому прошу пересмотреть оценку за эту задачу, ведь идейно она решена правильно, все моменты из официального решения присутствуют.*
- 6. Задача номер 6. Ответ верный, решение полное и правильное. Нет ничего, что присутствует в официальном решении, но отсутствует в моём.*

Дата (подпись)

01.04.2021

