МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кириллов Даниил Ильич**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	0	15	5

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(11)$

Черновик. стр 2

~~[illegible]~~

$f(x)=4x^3+6x^2+4x+9$

$9\cdot 11+4\cdot(1+2+\ldots+11)+6\cdot(1^2+2^2+\ldots+11^2)+4\cdot(1^3+2^3+\ldots+11^3)$

$x^2+bx+a=0$

$x^2+cx+a=1$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-36}}{2}$

$\cancel{a=x_1x_2}$

$\boxed{1,2,3,4,5,6,7,8,9}$

$b=10.$

$a=x_1\cdot x_2$

$a-1=x_3\cdot x_4$

$\frac{-10\pm\sqrt{8}}{2}$

$(x-3)^2=x^2-6x+9$

$\boxed{a>0}$

-1 $\boxed{a=-8}$?

$a=9$

$a=b \Rightarrow x_1,x_2=-1,-9;\ x_1x_2=-3,-3$

$x^2+bx-8=0$

$(x-2)(x-4)=$

$=x^2-6x+8$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2+32}}{2}$

$\frac{-c\pm\sqrt{c^2+36}}{2}$

4

9

16

25

36

49

64

$b=2$?

$\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}$

$\frac{-c\pm\sqrt{c^2+36}}{2}$

$\frac{-2\pm 6}{2}$

$\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{2}$

$\boxed{-4;2}$

$\frac{-8\pm 10}{2}$; $\boxed{-9;1}$

Чистовик. Страница 1. Вариант 210104

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1. \end{cases}$$

во втором уравнении есть $\sqrt{x^2+y-1}$, значит $x^2+y \geq 1$, т.к. иначе этот корень не определён. (1)

Заметим, что $|y+3| \geq 0$, так что если $\sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1$, то $\sqrt{x^2+y} \leq 1$, а значит $x^2+y \leq 1$. (2)

Условия (1) и (2) могут быть выполнены только если $x^2+y=1$, тогда $\sqrt{x^2+y} = \sqrt{1} = 1$, и если $\sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1$, то $|y+3| = 0$, т.е. $y=-3$. $x^2+y=1$, $y=-3 \Leftrightarrow x^2=4$, $x=\pm 2$.
если $x^2+y=1$, тогда $\sqrt{x^2+y-1} = \sqrt{0} = 0$, и если $\sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1$, то $|x+3|=1$, т.е. $x_1=-2$; $x_2=-4$

таким образом нам подходит только ~~на~~ одно решение: $x=-2$, $y=-3$

Ответ: $x=-2$; $y=-3$

№3

$x^2+bx+a=0$. Пусть корни x_1, x_2

$x^2+cx+a=1 \Leftrightarrow x^2+cx+a-1=0$. Пусть корни x_3, x_4.

Тогда по теореме Виета $a=x_1x_2$; $a-1=x_3x_4$. Согласно условию $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$; $x_1, x_2, x_3, x_4 < -1$. $\Rightarrow a \geq 1$.

Чистовик. Страница 2.

Т. к. все корни отрицательны, можем сказать, что:

$a = |x_1| \cdot |x_2|$; $a-1 = |x_3| \cdot |x_4|$. То есть a таково, что a, $a-1$ раскладываются в произведение двух натуральных множителей (каждый из них >1)

множителей

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...

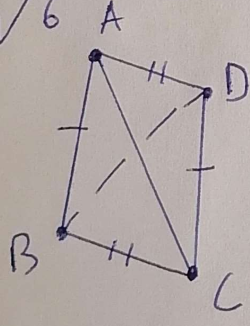
Посмотрев на первые члены ряда натуральных чисел, минимальное a, которое нам подходит, это 9. Тогда:

$x^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$; $x_1 = x_2 = -3$

$x^2 + cx + a = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 1$; $x_3 = -2, x_4 = -4$.

Ответ: $a = 9$ (это в случае, если нам допустимы одинаковые корни, а если корни должны быть различны, то $a = 15$:
$x^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-5) = 0$; $x^2 + cx + a - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-7) = 0$) **

№6



$AB = CD$, $AD = BC$, BD - общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BDC$ по трём сторонам. (1)

$AB = CD$, $AD = BC$, AC - общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC$ по трём сторонам. (2)

Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle ACB = 180^0 - \alpha - \beta$, а так как $\triangle ABC = \triangle ADC$, $\angle CAD = 180^0 - \alpha - \beta$.

Согласно условию сумма плоских углов при вершине $A = 180^0$, т.е.

$\angle BAC + \angle CAD + \angle BAD = 180^0$

Чистовик. Страница 3

$\angle BAC + \angle CAD + \angle BAD = \alpha + \angle BAD + 180^0 - \alpha - \beta = 180^0 - \beta + \angle BAD.$

$\angle BAC + \angle CAD + \angle BAD = 180^0 \Rightarrow 180^0 - \beta + \angle BAD = 180^0$, а значит

$\angle BAD = \beta.$

$\left.\begin{array}{l} \angle BAD = \beta = \angle ABC \\ AD = BC \\ AB - \text{общая} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADB = \triangle ABC.$ Тогда согласно (1) и (2) $\triangle ADB = \triangle BDC = \triangle ABC = \triangle ADC$, а значит равны и их площади.

Тогда $4 S_{\triangle BCD} = S.$

$S_{\triangle BCD} = \frac{S}{4}$

Ответ: $S_{\triangle BCD} = \frac{S}{4}$

№1

$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(11) = (4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 9) + (4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 + 9) + \ldots + (4 \cdot 11^3 + 6 \cdot 11^2 + 4 \cdot 11 + 9) = 4 \cdot (1^3 + 2^3 + \ldots + 11^3) + 6 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + 11^2) + 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 11) + 11 \cdot 9 = 4 \cdot \left(\frac{11 \cdot (11+1)}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{11 \cdot (11+1) \cdot (2 \cdot 11 + 1)}{6}\right) + 4 \cdot \left(\frac{11 \cdot (11+1)}{2}\right) + 99 = 11^2 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 \cdot 23 + 2 \cdot 11 \cdot 12 + 99 =$

$= 17424 + 3036 + 264 + 99 = 20823$

Ответ: $f(1) + f(2) + \ldots + f(11) = 20823$

Чистовик. Страница 4

**

Это сноска по задаче №3. В условии сказано, что каждое из двух уравнений имеет по два целых корня, однако не сказано, могут ли они быть совпадающими:

1 если да:

то ответ: $a=9$,

т.к. это минимальное число, что $a-1$ раскладывается на множители, больше чем 1, и такое, что это верно и для a:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

× × × × × × × × ×,

подходит

нет, т.к. либо простые, либо перед ними простое

2 если нет:

то ответ: $a=15$

т.к. это минимальное число, что $a, a-1$ раскладываются на различные множители, большие 1

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

× × × × × × × × × × × × × ×,

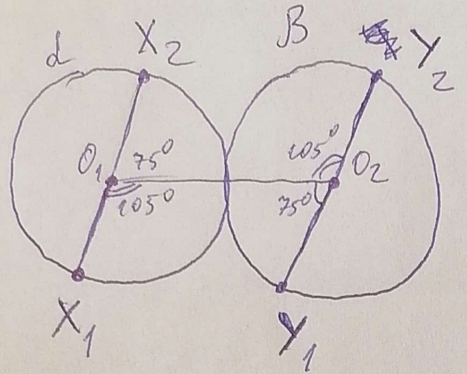
подходит

нет, т.к. либо простые, либо ними простое

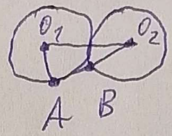
нет, т.к. $9=3\cdot3$, по другому на множители >1 не разложить.

Чистовик, Страница 5

№4



(1) Рассмотрим первый случай начального расположения автомобилей:



$\angle O_2O_1A=60^0$, $\angle O_1O_2A=30^0$, т.к. $O_1O_2=2r$, $O_1A=r$ (где r-радиус), $\angle O_1AO_2=90^0$.

В этом случае расстояние между машинами не больше диаметра в промежутке: между началом и моментом, когда A попала в X_1, между моментом, когда A попала в X_2 и концом.*

$\angle X_1O_1O_2=105^0$, $\angle O_2O_1X_2=75^0$, $\angle O_1O_2Y_1=75^0$, $\angle O_1O_2Y_2=105^0$

Когда A попадает в X_1, B попадает в Y_1; когда A попадает в X_2, B попадает в Y_2.

A попадает в X_1 когда проезжает угол в 45^0 от начального положения, а в X_2, когда проезжает угол в 225^0 от начального положения.

Тогда всего 45 минут расстояние между A и B было меньше диаметра окружностей.

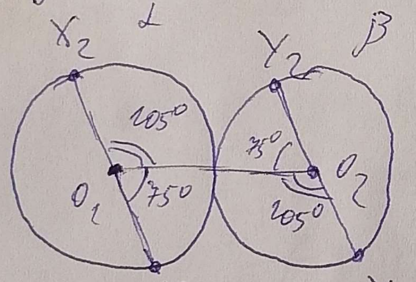
*других моментов больше нет, т.к. расстояние между машинами изменялось непрерывно, тогда надо найти такие положения машин,

Чистовик. Страница 6

что расстояния между ними в этих положениях равны диаметру. Таких положений всего два:

A в X_1, B в Y_1; A в X_2, B в Y_2, и когда A едет из X_1 в X_2 расстояние строго > диаметра, а когда едем из X_2 в X_1 расстояние строго < диаметра

② Во втором случае расположения автомобилей мы можем применить все те же рассуждения:



опять же найдем положения X_1 и X_2:

X_1 - момент прохождения угла в 135^0 от начального положения; X_2 - когда A прошла угол в 315^0 от начального положения.

Ответ: расстояние между автомобилями было не больше диаметра 45 минут.

Чистовик. страница 7.

№ 7

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021}=n\sqrt{3}+m\sqrt{5}+k\sqrt{7}+l\sqrt{3\cdot5\cdot7}$$

Возведём $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})$ в 2021 степень и возьмём какой-нибудь из слагаемых;

$\sqrt{3}^a\cdot\sqrt{5}^b\cdot\sqrt{7}^c$, $a+b+c=2021$. Заметим тогда, что степень может быть нечётной в нечётном числе множителей (то есть из чисел a, b, c либо одно нечётное, либо все 3 нечётные, т.к. их сумма нечётна).

(1) пусть степень нечётно только в одном множителе. Не умаляя общности скажем, что $a\equiv1 \pmod 2$, тогда $b=2b_1$; $c=2c_1$; $a=2a_1+1$.

$\sqrt{3}^a\cdot\sqrt{5}^b\cdot\sqrt{7}^c=\sqrt{3}\cdot(3^{a_1}\cdot5^{b_1}\cdot7^{c_1})$. Тогда число n будет являться суммой $3^{a_1}\cdot5^{b_1}\cdot7^{c_1}$ по таким всем случаям.

Аналогично определяется m (когда b нечётно), k (когда c нечётно)

(2) степень нечётна во всех множителях, т.е. $a=2a_1+1$; $b=2b_1+1$; $c=2c_1+1$.

$\sqrt{3}^a\cdot\sqrt{5}^b\cdot\sqrt{7}^c=\sqrt{3\cdot5\cdot7}\cdot(3^{a_1}\cdot5^{b_1}\cdot7^{c_1})$. Тогда число l будет являтся суммой $3^{a_1}\cdot5^{b_1}\cdot7^{c_1}$ по таким случаям.

Чистовик. Страница 8.

Докажем теперь, что

$$\sqrt{35}\,\frac{l}{n} < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{35}\, l < n$$

$$\Updownarrow$$

$\sqrt{3\cdot5\cdot7}\, l < \sqrt{3}\cdot n$, т.е. первое слагаемое из суммы $n\sqrt{3} + m\sqrt{5} + k\sqrt{7} + l\sqrt{3\cdot5\cdot7}$ больше последнего.

Возьмём определение:

$$n = \sum 3^{a_1}\cdot5^{b_1}\cdot7^{c_1}$$

$$l = \sum 3^{a_2}\cdot5^{b_2}\cdot7^{c_2}$$

для каждого слагаемого, ~~определяемого~~ определяющего l сделаем такое, которое определяет n: перенесём одну единицу из степени 5 в степень 7 (т.е. из какой-то

~~Чистовик. Страница 2.~~ Черновик. стр. 1

~~Сразу скажем, т.к. $x_1, x_2 < 1$, то $a > 0$, а так же $a = |x_1| \cdot |x_2|$~~

14; 15

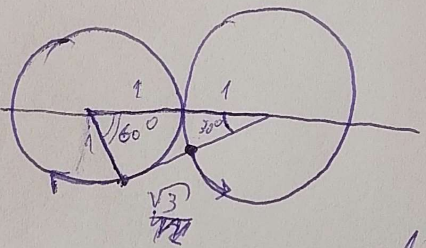
$(x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$

1, 2, ~~3~~

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~

8 9

$\frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$



$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$

$\cos(\alpha + 60); \sin(\alpha + 60)$

$\cos(180 - 30 - \alpha); \sin(180 - 30 - \alpha)$

$$\begin{array}{r} \times\ 12 \\ 12 \\ \hline 24 \\ 12\ \ \\ \hline 144 \end{array}$$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 14 + 16 = 30 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2$

$12^2 = 144$

$$\begin{array}{r} \times\ 121 \\ 144 \\ \hline 484 \\ 484\ \ \\ 121\ \ \ \ \\ \hline 17424 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 12 \\ 11 \\ \hline 12 \\ 12\ \ \\ \hline 132 \end{array}$$

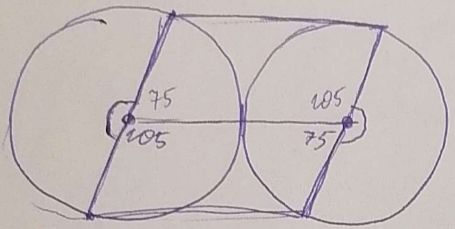
$$\begin{array}{r} \times\ 132 \\ 23 \\ \hline 396 \\ 264\ \ \\ \hline 3036 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 132 \\ 2 \\ \hline 264 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\ 17424 \\ 3036 \\ \hline 20460 \\ +\ 264 \\ \hline 20724 \\ +\ 99 \\ \hline 20823 \end{array}$$

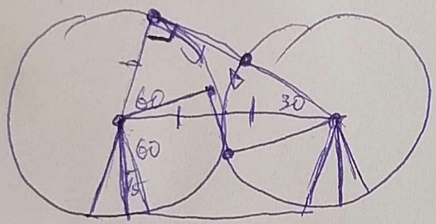
$90 + 2x$

Черновик.
стр. 2

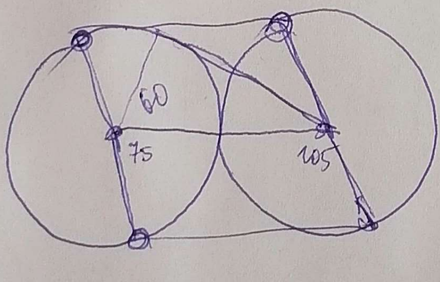


$X-60+X-30=180$

~~60~~ $x=45$

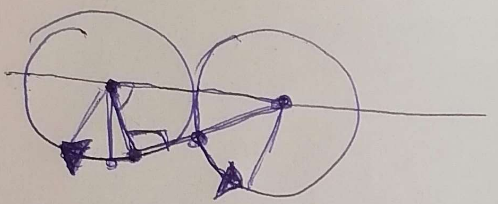


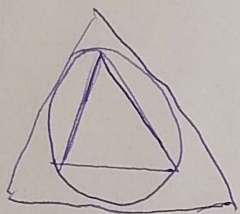
6

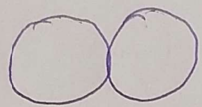


$$\begin{array}{r} 135 \\ +180 \\ \hline 315 \end{array}$$

Черновик. стр 3







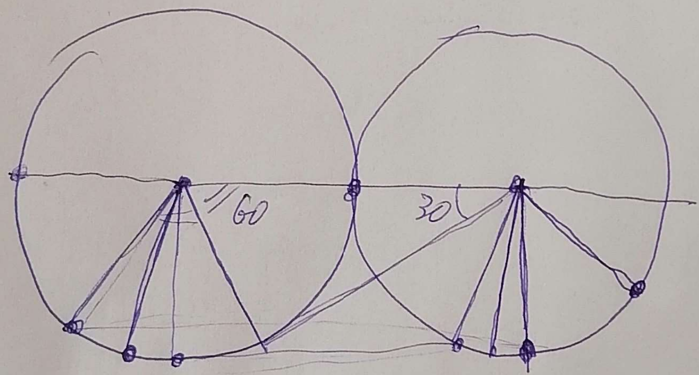
90 минут

: 9 ; 5 ; 6 ; 2 ; 15 ; 30

1,5 часа

50

120^{0} за 30 мин.

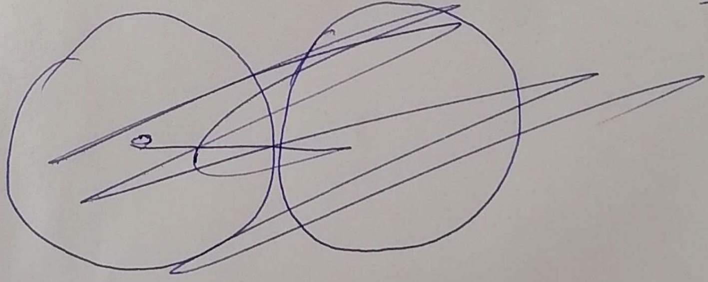


60 + 30 + 15 =

= 105

30 + 30 + 15 =

= 75



Чернова стр. 4

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$?

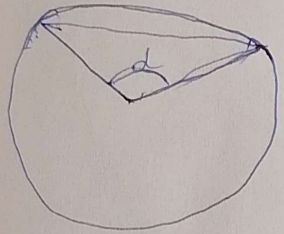
~~Чернова~~

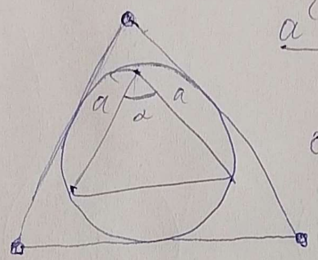
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+|y+3|=1\\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1\end{cases}$$

$1\le x^2+y\le 1$

$x^2+y=1$ $\quad |y+3|=0$

$|x+3|=0$





$\frac{a^2\sin\alpha}{2}=1$

$a=\frac{2}{\sin\alpha}$

$|y+3|=0$

$y=-3$

$x^2-3=1$

$x=\pm 2$

11^3

$$\begin{array}{r} 121\\ \times\ 11\\ \hline 121\\ 121\ \\ \hline 1331\end{array}$$

$\sqrt{35}\,l<n$

$\sqrt{3\cdot5\cdot7}\,l<\sqrt{3}\,n$

$\sqrt{3}^{2a+1}\cdot\sqrt{5}^{2b+1}\cdot\sqrt{7}^{2c+1}=\sqrt{3\cdot5\cdot7}\cdot3^a\cdot5^b\cdot7^c$

$\sqrt{3}^{2a+1}\cdot\sqrt{5}^{2b}\cdot\sqrt{7}^{2c+2}=\sqrt{3}\cdot3^a\cdot5^b\cdot7^{c+1}$

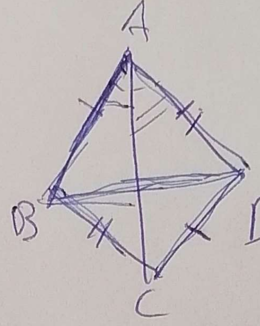
$\sqrt{3}\,n-\sqrt{3}\,n\cdot10^{-500}<\sqrt{3\cdot5\cdot7}\,l$

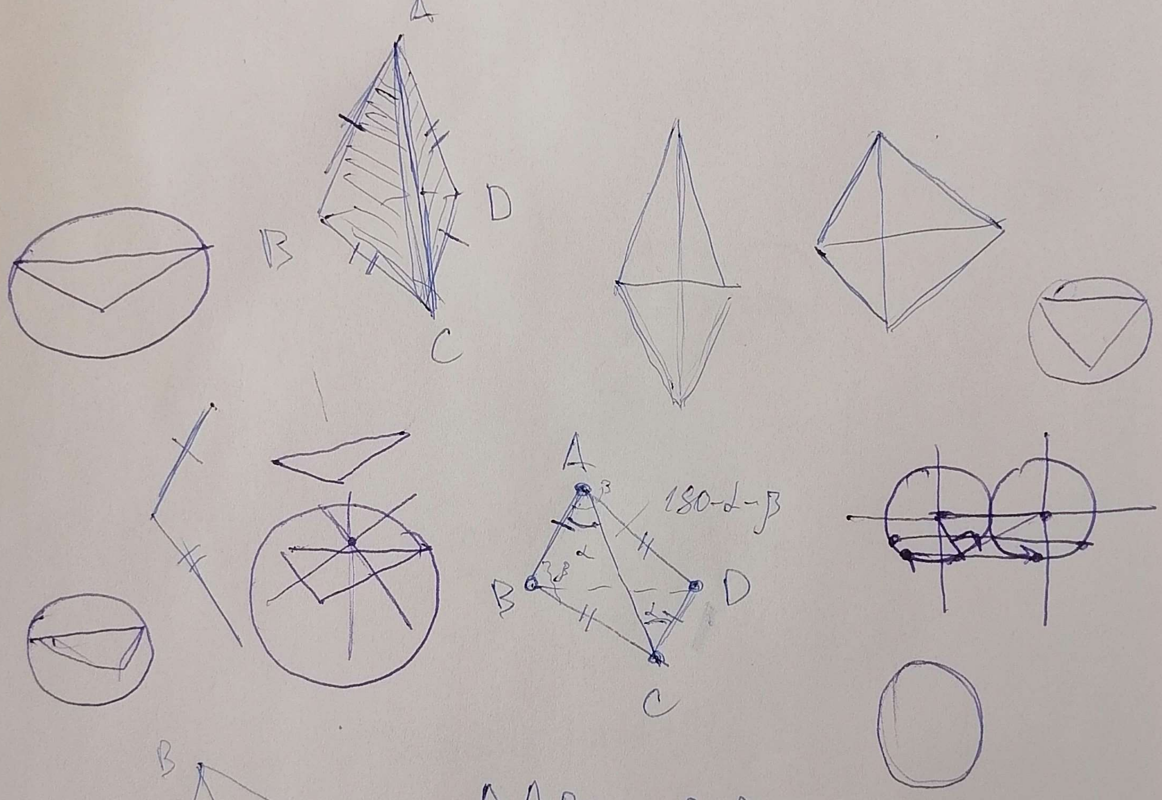
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1 \end{cases}$$

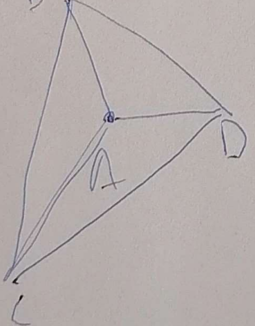
Черновик. стр 5

$$\boxed{x^2+y<1}$$

$$y<1-x^2$$



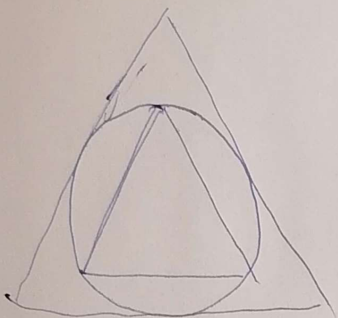




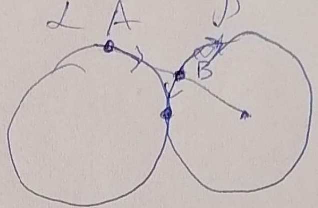
$\Delta ABD = \Delta BCD$

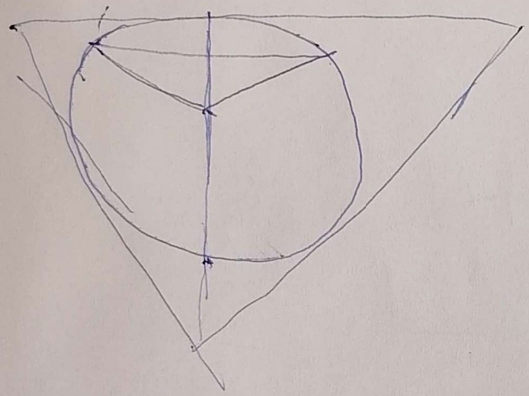
$\Delta ABC = \Delta ACD$

Черновик.
стр. 6



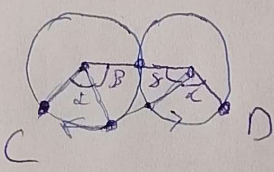
$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 ? \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$?



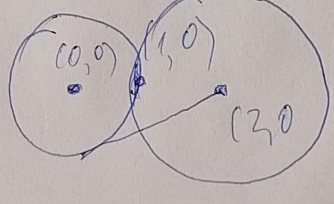


$1+4+9=14$

$\frac{2\cdot3\cdot4}{6}=4$



$\sqrt{3}^7\cdot\sqrt{5}^5$



$C\,(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta))$

$1-10^{-500}<\sqrt{35}^{\frac{1}{n}}<1$