МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кротов Михаил Даниилович**

Класс: **11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	5	15	5

№ 7. Чистовик (8)

2021 - нечётно

Каждое слагаемое $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021}$ имеет вид $(\sqrt{5})^x(\sqrt{7})^y(\sqrt{11})^{2021-x-y}\cdot k$, где $k = C_{2021}^{x}\cdot C_{2021-x}^{y}$ | $z = 2021-x-y$

из чисел x, y и z либо все 3 либо нечётны, либо 2 чёт и 1 нечёт. $(x+y+z = \text{нечёт}) \Rightarrow$

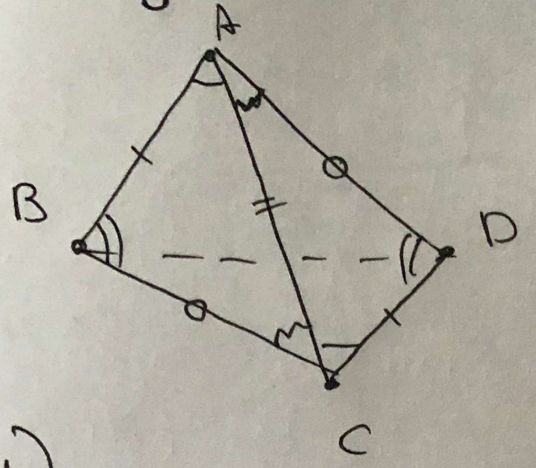
$\Rightarrow$ при 2-ух чётных степенях слагаемое имеет вид $k_1\cdot\sqrt{5}$ или $k_2\cdot\sqrt{7}$ или $k_3\cdot\sqrt{11}$, иначе имеет вид $k_4\sqrt{5\cdot7\cdot11}$

$\Rightarrow (\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021} =$

$= n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot7\cdot11}$, где

n, m, k и $l \in \mathbb{N}$

№ 6 Чистовик (7)



$AB = CD = a$

$BC = AD = b$

$\angle BAC = \alpha$

$\angle ABC = \beta$

$\angle BCA = \gamma$

1) $\triangle ABC = \triangle ADC$ по 3-ём сторонам:

$AB = CD$; $BC = AD$; $AC = AC \Rightarrow \angle CAD = \angle BCA = \gamma$;

$\angle ADC = \angle ABC = \beta$; $\angle ACD = \angle BAC = \alpha$.

$\angle BAD = 180° - \angle BAC - \angle CAD$ (из условия)

$\Rightarrow \angle BAD = 180 - \alpha - \gamma = \beta$; $S_{ADC} = S_{ABC}$

$\Rightarrow$ 2) $\triangle BAD = \triangle ABC$ по ~~∠ABD=~~ $\angle BAD = \angle ABC$;

$AB = AB$; $AD = BC \Rightarrow$ $BD = AC$; $S_{ABD} = S_{ABC}$.

3) $\triangle BDC = \triangle BAD$ по 3-ём сторонам

$AD = BC$; $AB = CD$; $BD = BC \Rightarrow S_{BDC} = S_{ABD} = S_{ABC}$.

1), 2), 3) $\Rightarrow$ все $\triangle$ грани равны

$\Rightarrow S_{пов} = S_{ABC} + S_{ADC} + S_{BDC} + S_{ABD} =$

$= S + S + S + S = 4S$

Ответ: 4S

№5 Чистовик ⑥

(продолжение 2)

$$S(t) = \frac{t+1}{\sqrt{\frac{2}{1-t}}+1}$$

$S(t)$ монот ↗ (т.к. $t+1 \nearrow$; $\sqrt{\frac{2}{1-t}}+1 \searrow$)

$\max S(t) = \frac{1}{2}$ при $t = \frac{1}{2}$

$\min S(t) = \frac{1}{\frac{4\sqrt{3}}{3}+2}$ при $t = -\frac{1}{2}$

Ответ: $\min S(t) = \frac{1}{\frac{4\sqrt{3}}{3}+2}$ при $\alpha = 120^\circ$

$\max S(t) = \frac{1}{2}$ при $\alpha = 60^\circ$

Чистовик (4)

Чистовик (5)

№5 (продолжение)

по Т. sin:

$$R_0 = \frac{c}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}}{\sin\alpha}$$

$$S(\alpha) = \frac{r_0}{R_0} = \frac{\sqrt{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha}{(\sqrt{2}+\sqrt{1-\cos\alpha})\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}} = \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}+1-\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1-\cos^2\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}+1-\cos\alpha}$$

$\urcorner\ t=\cos\alpha$ $\quad t\neq 1$

$$S(\cos\alpha) = \frac{1-t^2}{\sqrt{2-2t}+1-t} = \frac{(1-t)(1+t)}{\sqrt{2(1-t)}+(1-t)} = \frac{1+t}{\sqrt{\frac{2}{1-t}}+1}$$

$f(t)=1-t^2$ — ~~возрастает~~ и убывает как парабола, квадр. функция

$g(t)=\sqrt{2-2t}+1-t$ — монот убывает ~~как~~ не сильнее чем линейная функция.

$\Rightarrow S(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$:

0

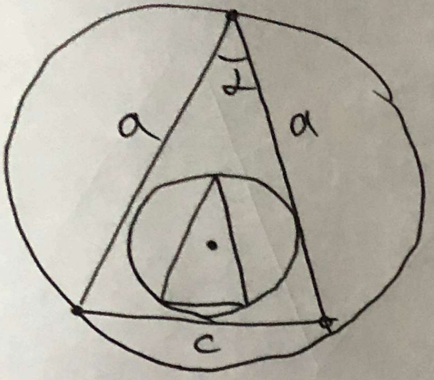
$\frac{\text{числитель}\uparrow}{\text{знаменатель}\downarrow}$ $\quad$ $\frac{\text{числитель}\downarrow\downarrow}{\text{знаменатель}\downarrow}$

$\Rightarrow S(t)\max = S(0) = \frac{1}{2}$

Чтобы определить $S\min$ подсчитаем $S(-\frac{1}{2})$ и $S(\frac{1}{2})$ $(\cos 120°$ и $\cos 60°)$

№ 5

Чистовик (4)



$S_0 = 1$

Круг с max S_1, впис в исходный Δ - вписанный в исх. Δ.

Δ, подобный исходному, с max S_2 вписан в круг, т.е. впис окр. исходного Δ является описанной для полученного Δ; эти 2 Δ подобны

$\Rightarrow S(\alpha) = S_0 \cdot \frac{r_0}{R_0}$, где r_0 - радиус впис окр. исходного Δ, R_0 - радиус опис. окр. исходного (в силу подобия Δ с их опис. окр.)

$\Rightarrow S(\alpha) = \frac{r_0}{R_0}$. Пусть боковые стороны исходного $\Delta = a$, а основание $= c$.

$\frac{a^2 \cdot \sin\alpha}{2} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}$

$c^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\alpha = 2a^2(1-\cos\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

$S_0 = p \cdot r_0 \Rightarrow r_0 = \frac{1}{p}$

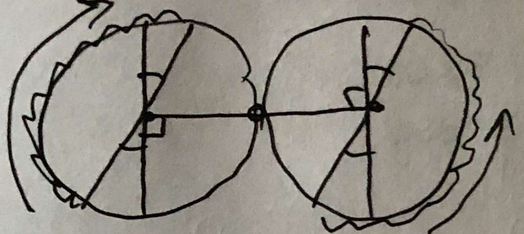
$p = a + \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha}}$

$\Rightarrow r_0 = \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\alpha}}$

№4 (продолж.)

Инстовик (3)

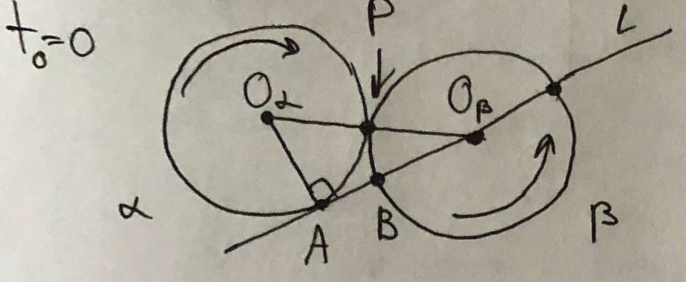
3) Т.к. $[t_1; t_2]$ промежуток занял проход машины по $\frac{1}{2}$ длины шоссе, то он занял половину времени, а значит и искомый вр. промежуток занял $\frac{1}{2} \cdot 1{,}5ч = 45$ мин



Ответ: 45 мин.

№ 4. Чистовик ②

1) Найдем начальное положение A и B:



Пусть L-касательная. т.к. A движется ↻ и сначала удаляется от P, то L касается α и β снизу (см. рис.), т.к.

A = т. касания L и α.

т. B изначально также удаляется от т. P, значит расположена ближе к. A, т.е с одной стороны от центра β с т. A.

Через $\varphi_A(t)$ и $\varphi_B(t)$ буду обозначать $\angle PO_\alpha A$ и $\angle PO_\beta B$. $\angle O_\alpha O_\beta A = \arcsin\frac{O_\alpha A}{O_\alpha O_\beta} = 30°$;

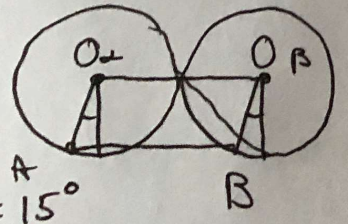
$\Rightarrow \angle AO_\alpha O_\beta = 60°$ (т.к $\Delta AO_\alpha O_\beta$ – прямоуг; $O_\alpha O_\beta = 2R$, $O_\alpha A = R$)

$\Rightarrow \varphi_A(t) = 60° + \omega t$
$\varphi_B(t) = 30° + \omega t$ где ω = угловая скорость, t - время

2) Найдем промежуток при котором $AB \geq 2R$

$t_1 = \frac{105° - 60°}{360°} \cdot 1{,}5ч.$:

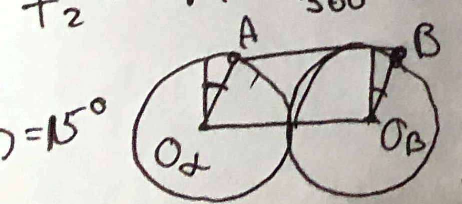
B „отстаёт" от A на 30°. Используем это



При t_1: $AB = 2R$, т.к. $O_\alpha O_\beta AB$ – парал ($O_\alpha O_\beta \parallel AB$; $O_\alpha A \parallel O_\beta B$)

Аналогично при t_2: $AB = 2R$

$t_2 = t_1 + \frac{180°}{360°} \cdot 1{,}5ч.$



При $t_1 < t < t_2$ расстояние AB будет больше 2R (A и B удаляются, а затем сближаются)

при $t \in (0; t_1] \cup [t_2; 0)$ $AB < 2R$.

~~(A и B сбл~~

№3 Чистовик. 1

$$x^2+bx+a=1 \qquad \left[\begin{array}{l} x_1, x_2 \in \mathbb{Z} < -1 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{Z} < -1 \end{array}\right.$$
$$x^2+cx+a=0$$

$$\begin{cases} x^2+bx+(a-1)=0 \\ x^2+cx+a=0 \end{cases}$$

Из Т. Виета, т.к. есть 2 корня:

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1 = x_1 \cdot x_2 \\ a = x_3 \cdot x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} < -1 \end{cases}$$

Рассмотрим возможные a с min.

$\min a = \min x_1 \cdot \min x_2 = (-2)\cdot(-3) = 6.$

$a \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ будем искать наим. ВОЗМОЖНОЕ a с 6 по $\mathbb{Z}$ числам так, что a и $a-1$ имеют 2 неравных делителя $\neq a$ и $\neq 1$

6	~~7~~	8	~~9~~	10	~~11~~	12	~~13~~	14	15
2·3	1·7	2·4	3·3	2·5	1·11	2·6, 3·4	1·13	2·7	3·5

$\Rightarrow$ min подходящая пара соседних составные $\mathbb{Z}$ чисел, это 14 и 15 $\Rightarrow \min a = 15.$

Пример:

$x^2+9x+15=1 \quad x_1=-2; x_2=-7$

$x^2+8x+15=0 \quad x_3=-3; x_4=-5$

Ответ: $a_{min}=15$

Чистовик (1)

№2.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-5| = 2 \\ \sqrt{x^2-y-4} + |x-2| = 1 \end{cases}$$

ОДЗ: $x^2 \geq y+4$

Т.к. все слагаемые положительны, то

$|x-2| \leq 1$; $|y-5| \leq 2$

$\Rightarrow x \in [1;3]$; $y \in [3;7]$

$\max x = 3 \Rightarrow \max x^2-y-4 =$

$= 9-y-4 = 5-y \geq 0$

$\Rightarrow y \leq 5 \Rightarrow y \in [3;5]$

$\Rightarrow (1)\ |y-5| = 5-y$

из (1):

$\sqrt{x^2-y} + 5-y = 2$

$\sqrt{x^2-y} = y-3$

$x^2-y = y^2-6y+9$

(2) $x^2 = y^2-5y+9$

$\Rightarrow (3)\ \sqrt{x^2-y} = \sqrt{y^2-6y+9} = \sqrt{(y-3)^2}$

(4) $\sqrt{x^2-y-4} = \sqrt{y^2-6y+5} = \sqrt{(y-1)(y-5)}$

Рассмотрим (4). $(y-1)(y-5) \geq 0 \Rightarrow y \in (-\infty;1] \cup [5;+\infty)$;

$y \in [3;5] \Rightarrow y = 5$.

Т.т. $x \in [1;3]$; $x^2 \geq y+4 \Rightarrow x^2 \geq 9$; $x \leq 3$

$\Rightarrow x = 3$.

$$\begin{cases} \sqrt{3^2-5} + |5-5| = 2 \\ \sqrt{3^2-5-4} + |3-1| = 1 \end{cases}$$ Проверка

Ответ: $x=3$; $y=5$

Чистовик. 9

№ 1.

$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 13$

$f(1) + f(2) + \ldots + f(13) =$

$= 4(1^3 + 2^3 + \ldots + 13^3) - 6(1^2 + 2^2 + \ldots + 13^2) +$

$+ 4(1 + 2 + \ldots + 13) + 13 \cdot 13 =$

$= 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 13)^2 - 6\left(\frac{13 \cdot (13+1) \cdot (2 \cdot 13 + 1)}{6}\right) +$

$+ 4(1 + 2 + \ldots + 13) + 13^2 =$

$= \cancel{4} \cdot \left(\frac{13 \cdot 14}{\cancel{2}}\right)^2 - 6\,\frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 4 \cdot \left(\frac{13 \cdot 14}{2}\right) + 169 =$

$= (13 \cdot 14)^2 - 13 \cdot 14 \cdot 27 + 2 \cdot 13 \cdot 14 + 169 =$

$13 \times 14 = 182$

$182 - 27 + 2 = 157$

$= (13 \cdot 14)(13 \cdot 14 - 27 + 2) + 169 = 182 \cdot 157 + 169 =$

$= 28574 + 169 = 28743$

Ответ: 28743

$f(1)+f(2)+\ldots+f(13)$

$f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$

15

$\cancel{(n-1)(4n^2-2n+2)}$ $+13\cdot 13$

$\cancel{2(n-1)(2n^2-n+1)}$

$\cancel{D=1-4\cdot 2}$

$\cancel{2n(2n^2-3n+2)}$

$\cancel{D=9-4\cdot 2\cdot 2<0}$

$4-6+4-2$

$4n^3-6n^2+4n-2 \mid (n-1)$

$4n^2-2n+2$

$4n^3-4n^2$

$-2n^2+4n$

$-\;-2n^2+2n$

$2n-2$

$$\begin{array}{r} 182 \\ \times 157 \\ \hline 1274 \\ 910 \\ 182 \\ \hline 28574 \\ +\ 169 \\ \hline 28743 \end{array}$$

$4(1^3+2^3+\ldots+13^3)-6(1^2+2^2+\ldots+13^2)+4(1+2+\ldots+13)+13\cdot 13$

$4(1+2+\ldots+13)^2-6($

$\dfrac{(2n+1)(n+1)n}{6}$

$1^2+2^2=5=\dfrac{2\cdot 3\cdot 5}{6}=5$

$1^2+2^2+3^2=14=\dfrac{3\cdot 4\cdot 7}{6}=14$

$4\left(\dfrac{14\cdot 13}{2}\right)^2-6\left(\dfrac{13\cdot 14\cdot 27}{6}\right)+4\cdot\dfrac{13\cdot 14}{2}+13\cdot 13.$

$(14\cdot 13)^2-(13\cdot 14\cdot 27)+2\cdot 13\cdot 14+13\cdot 13$

$(13\cdot 14)(13\cdot 14-27+2)+169$

$182\cdot 157+169=28574+169=\boxed{28743}$

$$\begin{array}{r} 182 \\ \times 157 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 13 \end{array}$$

$13^2=169$

$14^2=196$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 169 \\ \hline 1764 \\ 1176 \\ 196 \\ \hline 33124 \end{array}$$

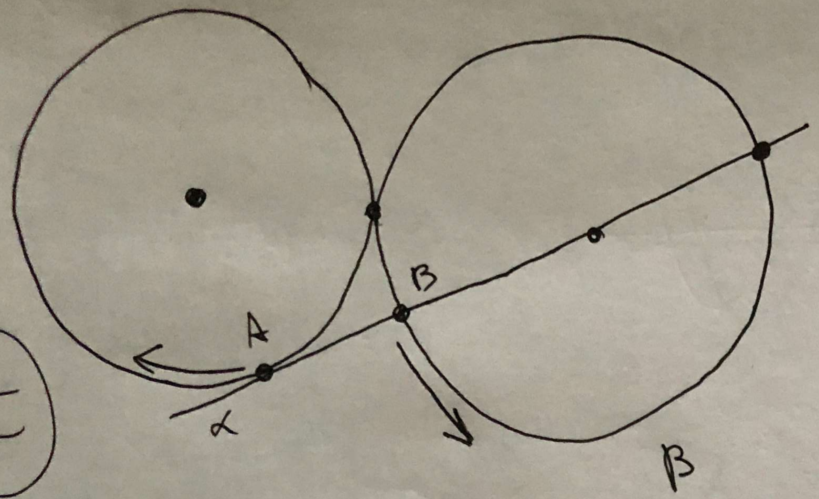
$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 14 \\ \hline 52 \\ 13 \\ \hline 182 \end{array}$$

$182-27+2=$

$$\begin{array}{r} =184 \\ -\ 27 \\ \hline 157 \end{array}$$

№4.

14

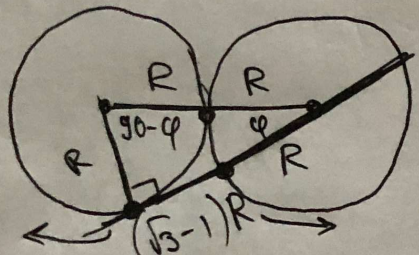


A ⟲ B ⟳

α β

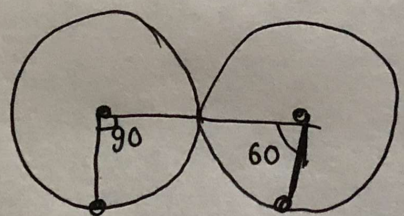
$T = 1{,}5$ ч.

$T_0 = 0$

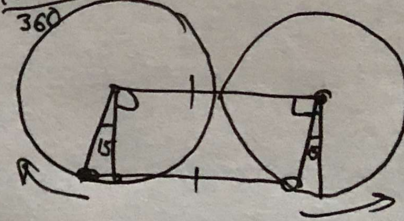


$\varphi = \arcsin \frac{1}{2} = 30$

$90 - \varphi = \arccos \frac{1}{2} = 60$

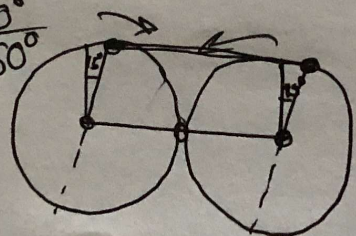


$T_1 = \frac{105-60}{360}$



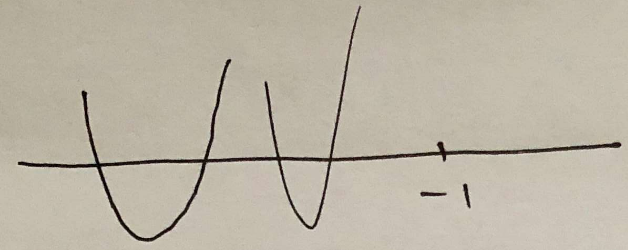
половина-?

$T_2 = T_1 + \frac{180^\circ}{360^\circ}$



$x^2+bx+a=1$ — 2 $\mathbb{Z}$ корня $< (-1)$ №3

$x^2+cx+a=0$



(3) $x^2+bx+(a-1)=0$

$x^2+cx+a=0$

$x_1 \cdot x_2 = a-1$ $-2; -3; -4; -5; -6.$

$x_3 \cdot x_4 = a$ $6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$

$a-1>0$

6	8	9	10	12	14	15
$2 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$3 \cdot 3$	$2 \cdot 5$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 7$	$3 \cdot 5$

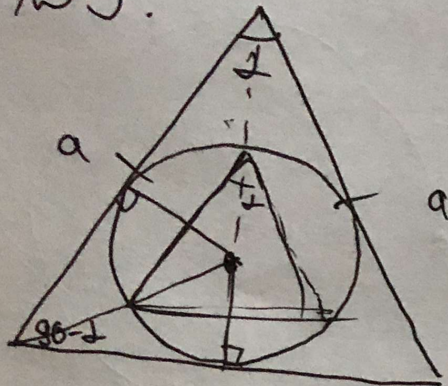
$(x+2)(x+7)=0$

$(x+3)(x+5)=0$

$x^2+9x+15=$[redacted]

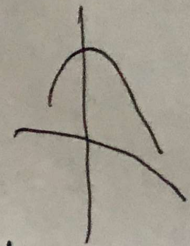
$x^2+8x+15=0$

№5.



$S(\alpha)$ - ? $\alpha \in [60^\circ; 120^\circ]$

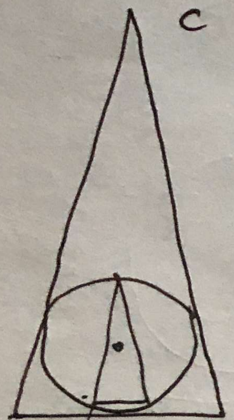
$1 = S_0 = pr = \frac{a^2 \cdot \sin\alpha}{2} = 1$



$a^2 = \frac{2}{\sin\alpha}$

$r = \frac{S_0}{p}$

$a = \sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}$



$c^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\alpha = \frac{4}{\sin\alpha} - \frac{4}{\sin\alpha}\cos\alpha =$

$\frac{4}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha)$

$p = \frac{2a+c}{2} = a + \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} =$

$p = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha}}$

12

$r = \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\alpha}}$

$2R = \frac{c}{\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{c}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}}{\sin\alpha}$

$S(\cos\alpha) = \frac{1-t^2}{\sqrt{2-2t}+1-t}$

$S' = \frac{(1-t^2)'(\sqrt{2-2t}+1-t) - (1-t^2)(\sqrt{2-2t}+1-t)'}{(\quad)^2}$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-5| = 2 \\ \sqrt{x^2-y-4} + |x-2| = 1 \end{cases}$$

$$\cancel{\sqrt{(x-2)(x+2)-y} + |x-2| = 1}$$

$$\cancel{\sqrt{a(a+4)-b-5} + |a| = 1}$$

$$\begin{cases} x^2-y = 4 - 4|y-5| + (y-5)^2 \\ x^2-y-4 = 1 - 2|x-2| + (x-2)^2 \end{cases}$$

$$x^2-y-4 = (y-5)^2 - 4|y-5|$$

$$x^2-y-4 = \cancel{x^2-4x+4+1-2|x-2|}\ (x-2)^2+1-2|x-2|$$

$$b^2 - 4b = a^2+1-2a$$

$$(b-2)^2 - 4 = (a-1)^2$$

$$(b-2)^2 - (a-1)^2 = 4$$

$x^2 \geq (y+4)$

$\cancel{|y-5| = a}$

$\cancel{|x-2| = b}$

$a = |x-2|$

$b = |y-5|$

$x^2 \geq y+4$

$\Rightarrow y+4 \leq 9$

$y \leq 5$

$x \in [1;3]$ max $x = 3$

$y \in [3;7]$

$(y-1)(y-5)$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-y} + 5-y = 2$

$\sqrt{x^2-y} - y = -3$

$\sqrt{x^2-y} = y-3$

$x^2-y = y^2-6y+9$

$x^2 = y^2-5y+9$

12,5

$\cancel{\min x^2: 6{,}25-12{,}5+9 =}$

$\cancel{= 6{,}25 - 3{,}5 = 2{,}75}$

$\cancel{\sqrt{y^2-6y+5}} = 1-2|x-2|+(x-2)^2$