МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кулев Юрий Антонович**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	5	15	0

Чистовик

①

Вар. 210108

№1

$$f(1)+\dots f(12)=4\sum_{i=1}^{12} i^3-6\sum_{i=1}^{12} i^2+4\sum_{i=1}^{12} i+7\cdot 12$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

Т.о., $$\sum_{i=1}^{12} f(i)=4\left(\frac{12(12+1)}{2}\right)^2-6\,\frac{12\cdot(12+1)(2\cdot 12+1)}{6}+4\,\frac{12(12+1)}{2}+7\cdot 12=$$

$$=156^2-156\cdot 25+2\cdot 156+84=156\cdot 133+84=20748+84=20832$$

Ответ: 20832

①

2

Чистовик

Вар. 210108

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

О.Д.З.: $x^2+y \geq 1$

$|y+8| = 1 - \sqrt{x^2+y} \leq 0 \Rightarrow |y+8| = 0$ (т.к. $|y+8| \geq 0$)

$y = -8$

$\sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1$

$\sqrt{x^2-8} = 1$

$x^2 - 8 = 1$

$x_1 = -3$; $x_2 = 3$

Проверка:

1. $\sqrt{(-3)^2-8-1} + |-3+8| = \sqrt{9-9} + |5| = 5$ ✓
2. $\sqrt{(3)^2-8-1} + |3+8| = \sqrt{9-9} + |11| = 11$ ×

$(-3;-8)$ – ед. решение

Ответ: $(-3;-8)$

2

3

Чистовик

Вар 210108

№3

Пусть $c \geq 0$. Тогда

$$\frac{-c-\sqrt{c^2-4a}}{2} \leq 0$$ — противоречие $\Rightarrow c \leq -1$

Аналогично, $b \leq -1$

$$\begin{cases} \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4(a+1)}}{2} > 1 \\ \dfrac{-c-\sqrt{c^2-4a}}{2} > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4(a+1)}}{2} \geq 2 \\ \dfrac{-c-\sqrt{c^2-4a}}{2} \geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{b^2-4(a+1)} \leq -b-4 \\ \sqrt{c^2-4a} \leq -c-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{b^2-4(a+1)} \leq |b|-4 \\ \sqrt{c^2-4a} \leq |c|-4 \end{cases}$$

Т.е. $4a$ и $4(a+1)$ — разницы между квадратами чисел, которые отличаются более чем на 3.

Из небольшого перебора получаем, что такими разницами могут быть 56 и 60 (меньшие разницы, с условием на разницу хотя бы в 4, такие: 24, 32, 40, 48; видно, что нет отличающихся на 4, т.е. 56 и 60 — первая плохая пара).

Значит, $a=14$ и $b=-8$, $c=-9$

Уравнение $x^2-8x+14=-1$ имеет корни 3 и 5

$x^2-9x+14=0$ имеет корни 2 и 7.

Ответ: 14

3

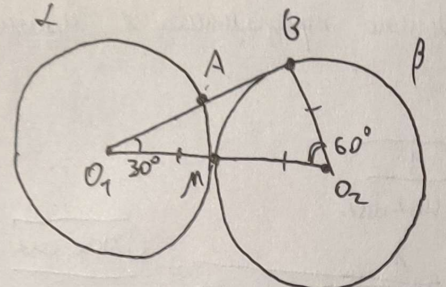
(4)

№4

Листовик

Вар. 210108

Изобразим начальное положение:

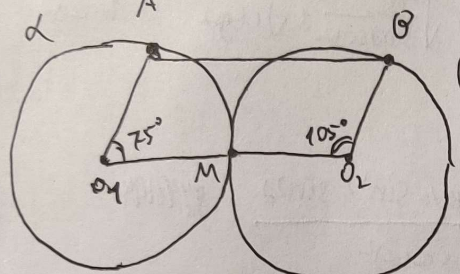


Введем обозначения.

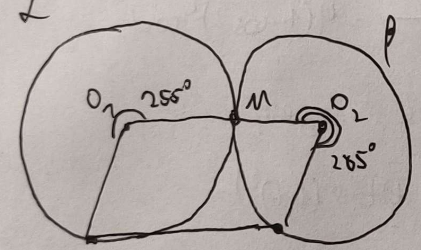
$O_1O_2 = 2BO_2$ и $\angle O_1BO_2 = 90° \Rightarrow \angle BO_1O_2 = 30°$ и

$\angle BO_2O_1 = 60°$.

Значит, $\overset{\frown}{AM} = 30°$ и $\overset{\frown}{BM} = 60°$, и разница в $30°$ будет сохранятся (их скорости равны)



Рассмотрим момент, когда $\overset{\frown}{AM} = 75°$ и $\overset{\frown}{BM} = 105°$. В этот момент расстояние между ними равно диаметру, т.к. ABO_2O_1 – параллелограм и O_1O_2 равно диаметру.



До этого момента расстояние между ними было меньше. Оно будет оставаться больше до момента, когда $\overset{\frown}{AM}$ станет $255°$ и $\overset{\frown}{BM}$ $285°$.

В этот момент, по аналогии, расстояние снова сравняется и начнет уменьшаться.

Видно, что расстояние не больше диаметра равно половину времени (т.к. между вышеописанными моментами A и B проходят дуги $180°$).

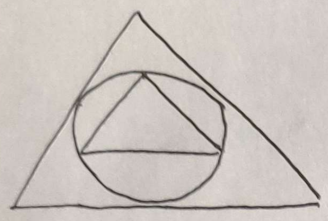
Ответ: 1 час

(4)

Чистовик (5)

№5

Вар. 210108



Максимальные по площади вырезанные фигуры — вписанные.

Пусть боковая сторона большого треугольника x, маленького x' и радиус r.

$$\frac{x^2\sin 2\alpha}{2}=1 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

$$r=\frac{1}{p}=\frac{2}{2x+2x\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}+\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}}=\frac{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}$$

$$x'=2r\sin\alpha=\frac{2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}\,\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$S(\alpha)=x'^2\sin 2\alpha/2=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)^2}=$$

$$=\frac{4\sin^4\alpha\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}=\frac{4(1-\cos^2\alpha)^2\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}=4(1-\cos\alpha)^2\cos\alpha$$

Пусть $t=\cos\alpha$ и $f(t)=4(1-t)^2t$. Тогда:

$$f'(t)=4\left((1-t)^{2\prime}\cdot t+(1-t)^2t'\right)=4\left(-2(1-t)t+(1-t)^2\right)=$$

$$=4(2t^2-2t+t^2-2t+1)=4(3t^2-4t+1)$$

Экстремумы $t_1=\frac{1}{3}$ и $t_2=1$

$f'(t)$: $+$ $\quad$ $-$ $\quad$ $+$ $\quad t$

$\nearrow \frac{1}{3} \searrow 1 \nearrow$

Т.к. $t=\cos\alpha$ и $\alpha\in[30°;60°]$, $t\in\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt3}{2}\right]$

Т.к. $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt3}{2}<1$, то на отрезке $\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt3}{2}\right]$ функция убывает $\Rightarrow$ макс. знач. при $t=\frac{1}{2}$ и мин. при $t=\frac{\sqrt3}{2}$

$$S_{min}(\alpha)=4\cdot\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt3}{2}=(1-\sqrt3)^2\cdot\frac{\sqrt3}{2}=(1+3-2\sqrt3)\frac{\sqrt3}{2}=2\sqrt3-3$$

$$S_{max}(\alpha)=4\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Ответ: наибольшее: $\frac{1}{2}$

наименьшее: $2\sqrt3-3$

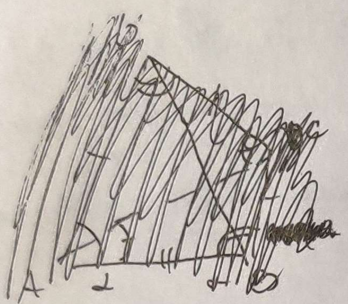
(5)

№ 6

Чистовик

Вар. 210108

6



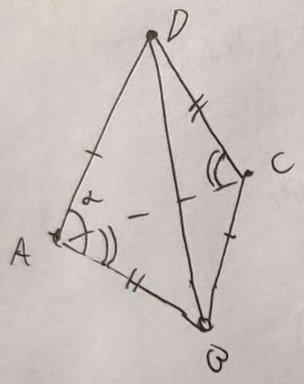
$\triangle ABD = \triangle BCD$ по трем сторонам, аналогично, $\triangle ABC = \triangle ADC$

Пусть $\angle BAD = \alpha$

$\angle ABC = \angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle DCA = 180° - \angle DAC - \angle BAC =$

$= \alpha$

Значит, $\triangle ABD = \triangle BCD = \triangle ABC = \triangle ADC$ и площадь ~~[illegible]~~ поверхн. $4S$.



Ответ: $4S$

6

Чистовик

7

№7

Искомое число раскладывается на слагаемые вида $\sqrt{5}^{\alpha}\sqrt{7}^{\beta}\cdot\sqrt{11}^{\gamma}$, где $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0$

Заметим, что среди α,β,γ либо 1, либо 3 нечётны, иначе их сумма должна быть чётна, но $\alpha+\beta+\gamma=2021$ – нечётно.

Значит, оно представимо в виде суммы $n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot7\cdot11}$.

Осталось доказать, что $1<\sqrt{\frac{11}{7}}\frac{k}{m}<1+10^{-500}$.

7

№ 27 Чистовик Черновик (1)

Вар. 2101[redacted]08

~~Заметим, что если $a \le 0$, то:~~

~~$\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4a}}{2}$~~

$(5 \cdot 7 \cdot 11)$

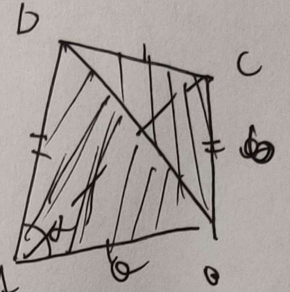
$\alpha + \beta + \gamma$ 1010

$\alpha + \beta + \gamma$

$5 \cdot 7 \cdot 11$

$\sqrt{7}\sqrt{5}$

$\sqrt{5 \cdot 7}$



3^n

$7^{1010} \cdot \sqrt{7}$

$x + y = 180 - \alpha$

$\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 11}$

$\frac{180 - \alpha}{2}$

$\overline{\sin(90 - \frac{\alpha}{2})}$

$\left(\frac{11}{7}\right)^{1010}$

$180 - \alpha$

$90 - \frac{\alpha}{2}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\gamma}$

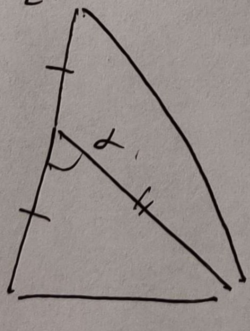
$\ln\left(\sqrt{\frac{11}{7}}\right)^{2021}$

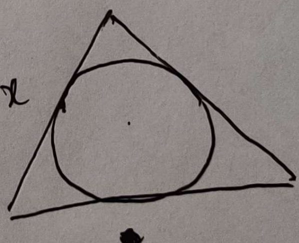
$1 + 10^{-500}$

$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}; 1$

$2021 \ln\sqrt{\frac{11}{7}}$

$4\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$





x

$\frac{1}{2}$

$2 \cdot 1{,}7 =$

$= 2 + 1{,}4$

$4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$1 = x^2 \sin 2\alpha / 2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}$

$S(\alpha) = x'^2 \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\cos\alpha \sin^2\alpha \sin 2\alpha}{(1 + \cos\alpha)^2}$

$2x\cos\alpha = 2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$

$(1 - \sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}} = \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}} + \sqrt{\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}{1 + \cos\alpha}$

$(1 + 3 - 2\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x' = \frac{2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$2\sqrt{3} - 3$

(1)

~~Чистовик~~ Черновик

2

~~Вариант 210108~~

№3

~~Допустим, $c \ge 0$. Тогда:~~

$$\frac{-c-\sqrt{c^2-4a}}{2} \le 0$$ - противоречие $\Rightarrow c<0$

14

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$3\cdot 2\cdot$ $\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$

$2\cdot3\cdot5$

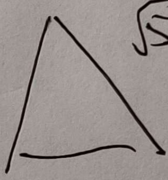
Допустим, $a \le 0$. Тогда:

$$\frac{-c-\sqrt{c^2-4a}}{2} \le \frac{-c-\sqrt{c^2}}{2} = \frac{-c-|c|}{2} = \frac{-(-|c|)-|c|}{2} = 0$$ - противоречие $\Rightarrow a>0$

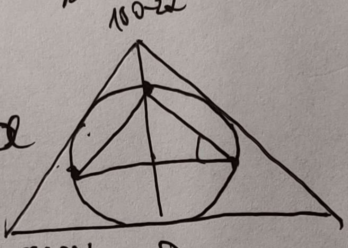
Пусть a - единица. Тогда c^2-4 - полный квадрат. Значит, $c=2$, т.к. при больших c разница между соседними квадратами хотя бы 5, а при меньших c c^2-4 - отрицательно. Но при $c=2$, $c^2-4=0 \Rightarrow x^2+cx+a=0$ имеет только один корень - противоречие

Пусть $a=2$.

$\sqrt{5}^{\alpha}\sqrt{7}^{\beta}\sqrt{11}^{\gamma}$



$\alpha+\beta+\gamma=2020$



$S_б$ $\quad x(2+2\cos\alpha)=S$

$$r=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sin2\alpha}}+\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}}$$

$r=\frac{S_{исх.}}{p}$ $\quad x\cos\alpha$

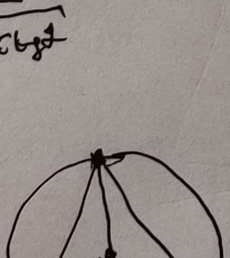
$$\frac{x^2\sin2\alpha}{2}=S \Rightarrow x=\sqrt{\frac{2S}{\sin2\alpha}}$$

$$a=\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{\frac{2}{\sin2\alpha}}+\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}}$$

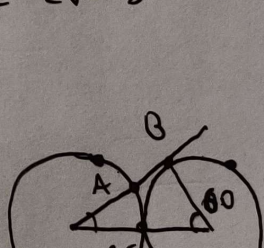
$$2x\cos\alpha=2\sqrt{\frac{2S\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}}=2\sqrt{S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$R=$

$S(\alpha)=$



$$r=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sin2\alpha}}+\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}}$$



$$a=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\frac{2}{\sin2\alpha}}+\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}}$$

$$\frac{\sin2\alpha}{2}\left(\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{\frac{2}{\sin2\alpha}}+\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}}\right)^2=$$

$$\frac{2}{\sin2\alpha}+\mathrm{ctg}\,\alpha+2\sqrt{\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

2

Черновик

1 3 5 7 9 11

$n(n-1)(2n-1)$

$(n(n-1)$

$1^2+2^2+3^2$

$\frac{(n(n-1))^2}{2}$

$4n^3-2n^2+2n$

$-4n^2+2n-2$

$\sqrt{b^2-4(a+1)} \leq b-$

$\leq b-4$

2 4 6 8 10

2 32 60 96

4 48

6 64

8

$4n^3-10n^2+14n$

$4n^2-10n$

$a \geq 0$ 9

$\leq$

$\frac{n(n+1)}{2}$

$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$b-4$

$\frac{-b-\sqrt{b^2-4(a+1)}}{2} \geq 1$

156

173

468

$(c^2-4a) \geq c^2$

$\frac{-b-\sqrt{b^2-4(a+1)}}{2} \geq 2 \Rightarrow$

1 9

468

156

2074 8

$\leq -c-\sqrt{c^2}$

64+27+

+8+1

$n(n-1)(2n-1)$

$\sqrt{b^2-4(a+1)} \leq 4-b$

$\frac{-b-\sqrt{b^2-4(a+1)}}{2} > 1$

$\frac{-c+\sqrt{c^2-4a}}{2} \leq$

$c=-3$

$b=-4$

$\frac{-c-\sqrt{c^2-4a}}{2} > 1$

$\frac{-c+\sqrt{c^2}}{2}$

a

x^2-4x+3

x^2-3x+2

$-b-2 \geq 0$

1 4 9 16 25 36

$-b-\sqrt{b^2-4(a+1)} > 2$

24 12·13

$-2 \geq b$

1

$-b-2 > \sqrt{b^2-4(a+1)}$

156

24

$-b \geq 3$

b

$b^2+4b+4 > b^2-4(a+1)$

32

40 48

25 81

$4a > -4b-8 \geq 4$

48

48 60

56

24

$a \geq 2$

80

$(a-b)(a+b)$

32

3

3