МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кунин-Богоявленский Сергей Михайлович**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	0	15	5

; Чистовик

Задача 7 (продолжение)

$$1-10^{-500} < \frac{l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}}{n\sqrt{5}} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 10^{-500} > \frac{n\sqrt{5} - l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}}{n\sqrt{5}} > 0.$$

Поймем же, сколь мала разница между членами, где y, z – четные, и членами, где y, z – нечет.

Чистовик

Задача 7.

$$(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021} = n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11},$$

где $n, m, k, l \in \mathbb{N}$, $1-10^{-500} < \sqrt{77}\,\frac{l}{n} < 1$.

Для начала поймем, что предложениые представление есть и оно единственно. Действительно, любой член после раскрытия скобок имеет вид (без коэфф-та): $(\sqrt{5})^x\cdot(\sqrt{7})^y\cdot(\sqrt{11})^z$, где $x+y+z=2021$, $x,y,z \in \mathbb{Z} \geq 0$. Последнее условие накладывает ограничение на x,y,z: они могут быть либо все нечетными, либо два четных, один нечетный. (иначе сумма $x+y+z$ четна). Собственно, когда все нечетные, член имеет вид $k\cdot\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}$, $k\in\mathbb{N}$, когда же нечетное одно, он имеет вид $l\cdot\sqrt{p}$, где $p=5;7;11$ $l\in\mathbb{Z}$ в зависимости от того x, y или z нечетно.

Итак в компоненты $l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}$, $n\sqrt{5}$ ~~тогда~~ попадают те и только те члены, в которых X-нечет.

Теперь посмотрим на наше условие на $\frac{l}{n}$, которое нужно доказать: $1-10^{-500} < \sqrt{77}\,\frac{l}{n} < 1 \Leftrightarrow$

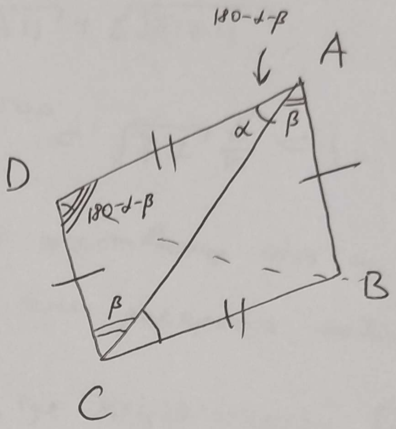
$\Leftrightarrow 1-10^{-500} < \frac{l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}}{n\sqrt{5}} < 1$. ~~$\Leftrightarrow \frac{n\sqrt{5}-l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11}}{n\sqrt{5}}$~~

~~Это будет так за счет маленькой $\varepsilon < 10^{-500}$~~

продолжение следует →

Чистовик

Задача 6.



Пусть $\angle DAC = \alpha$; $\angle CAB = \beta$. Тогда:

1) $\triangle ABC = \triangle CDA$; $\triangle BAD = \triangle DCB$
(по III пр. рав-ва треуг.)

2) $\angle ACD = \angle CAB = \beta$ | из рав-ва треуг.

3) $\angle CDA = 180 - \alpha - \beta = \angle DAB$ | т.к. сумма плоских углов при A = 180°.

4) $\triangle CDA = \triangle BAD = \triangle DCB = \triangle ABC$ | по ~~...~~ I пр. рав-ва треуг.

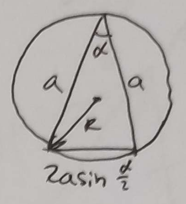
5) $\begin{cases} S_{CDA} = S_{BAD} = S_{DCB} = S_{ABC} \\ S = S_{CDA} + S_{BAD} + S_{DCB} + S_{ABC} \end{cases} \Rightarrow S_{DCB} = \frac{S}{4}$

Ответ: $\frac{S}{4}$

Чистовик

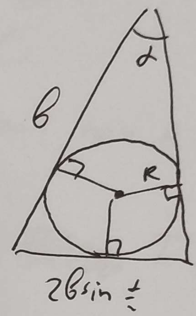
Задача 5.

Пусть боковые стороны треуг. равны a. Тогда нижняя равна $2a\sin\frac{\alpha}{2}$. Площадь $= 1 = \frac{a^2\sin\alpha}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{2}{\sin\alpha}$ $\quad \alpha\in[30^\circ;60^\circ]$



По т. синусов: $2R = \frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} \Rightarrow R = a\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$

Пусть боковые стороны внешнего треуг. равны в. Тогда нижняя равна $2b\sin\frac{\alpha}{2}$.



Площадь $= \frac{2b+2b\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\cdot R = \frac{b^2\sin\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b(1+\sin\frac{\alpha}{2})R = b^2\sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}R = \frac{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{b^2\sin\alpha}{2} = \left(\frac{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cancel{2}} = \left(\frac{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}\right)^2$

Пусть $\sin\frac{\alpha}{2} = x$. Тогда:

$s(x) = \frac{2(1+x)x}{(1-2x^2)^2}$, мы хотим найти минимум и максимум при $x\in[\sin 15, \frac{1}{2}]$

$s'(x) = 2\cdot\frac{(x^2+x)'\cdot(1-2x^2)^2 - 2(1-2x^2)\cdot(-4x)(x^2+x)}{(1+2x^2)^4} = \frac{(2x+1)(4x^4-4x^2+1) + 8x(1-2x^2)(x^2+x)}{(1+2x^2)^4} =$

Чистовик

Задача 4 (продолжение)

Расстояние $(A'B')^2 = 4R^2(x^2 + 2\sin 15^\circ x + 1)$,

$x = \sin\frac{90-2\alpha}{2} = \sin(45^\circ - \alpha)$

При $\alpha \in [0; 2\pi]$ x пробегает все точки от -1 до 1. $\Rightarrow x \in [-1; 1]$
$45^\circ - \alpha$ пробегает все точки $[\frac{\pi}{4} - 2\pi; \frac{\pi}{4}]$.

$(A'B')^2 = 4R^2(x^2 + 2\sin 15^\circ x + 1) \geq (2R)^2 = 4R^2$ – расстояние не меньше диаметра.

$x^2 + 2\sin 15^\circ x + 1 \geq 1$

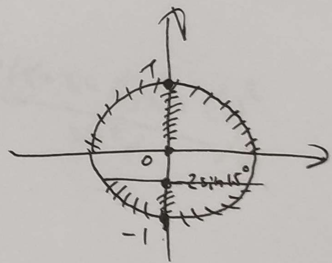
$x(x + 2\sin 15^\circ) \geq 0$

$\sin 15^\circ = \sin\frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\sin(45^\circ - \alpha)$

$x \in [-1; -2\sin 15^\circ] \cup [0; 1]$

Доля от часа $\frac{t}{1} = \frac{\pi - \arcsin(2\sin 15^\circ)}{\pi}$



$t = 1 - \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi}$, часы

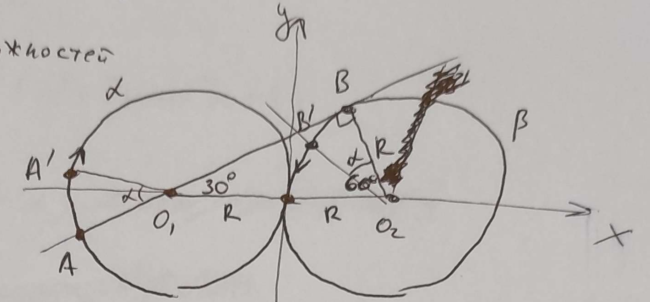
Ответ: $t = 1 - \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi}$ часов.

Чистовик

Задача 4. (начало)

Пусть O_1, O_2 — центры окружностей α и β соответственно.

Тогда в начальный момент



$\angle ABO_2 = 90°$ (AB - касат. к β), $O_1O_2 = 2R$, $BO_2 = R \Rightarrow O_1O_2B$ — прямоуг. треуг. с катетом BO_2 в 2 р. меньше гипотенузы $O_1O_2 \Rightarrow$ $\angle BO_2O_1 = 60°$ $\Rightarrow \angle BO_1O_2 = 30°$; Пусть теперь автомобили проехали на угол α от стартового положения. Посчитаем расстояние между ними теперь:

$$(A'B')^2 = x^2 + y^2 = (2R - R\cos(60-\alpha) + R\cos(30-\alpha))^2 + (R\sin(60-\alpha) + R\sin(30-\alpha))^2 =$$

$$= R^2\left((2 + \cos(30-\alpha) - \cos(60-\alpha))^2 + (\sin(30-\alpha) + \sin(60-\alpha))^2\right) = R^2(2^2 + \sin^2(30-\alpha) +$$

$$+ \cos^2(30-\alpha) + \sin^2(60-\alpha) + \cos^2(60-\alpha) + 2\sin(30-\alpha)\sin(60-\alpha) - 2\cos(30-\alpha)\cos(60-\alpha) +$$

$$+ 4\cos(30-\alpha) - 4\cos(60-\alpha)) = R^2(6 - 2\cos(30-\alpha+60-\alpha) + 4(\cos(30-\alpha) - \cos(60-\alpha))) =$$

$$= R^2\left(6 - 2\cos(90-2\alpha) - 4\cdot 2\sin\frac{90-2\alpha}{2}\cdot\sin\frac{-30}{2}\right) =$$

$$= R^2\left(6 - 2\cos(90-2\alpha) + 8\cdot\sin 15°\cdot\sin\frac{90-2\alpha}{2}\right)$$

Пусть $\sin\frac{90-2\alpha}{2} = x$. Тогда:

$$(A'B')^2 = R^2(6 - 2(1-2x^2) + 8\sin 15°\, x) =$$

$$= (4x^2 + 8\sin 15°\, x + 4)R^2.$$

продолжение следует.

Чистовик

Задача 3.

Пусть корни уравнений $x^2+bx+a=1$ и $x^2+cx+a=0$ равны x_1, x_2 и x_3, x_4 соответственно. Тогда: $x_{1,2,3,4} < -1$; $x_{1,2,3,4} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow x_{1,2,3,4} \leq -2. \Rightarrow x_1 x_2 \geq 4$;

$$x^2+bx+a-1 = (x-x_1)(x-x_2) = x^2-(x_1+x_2)x + x_1x_2 \Rightarrow x_1x_2 = a-1$$

$$x^2+cx+a = (x-x_3)(x-x_4) = x^2-(x_3+x_4)x + x_3x_4 \Rightarrow x_3x_4 = a \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a = x_1x_2+1 \geq 4+1 = 5. \\ a = x_3x_4 \end{cases}$$

При каких же $a \geq 5$ найдутся целые $x_{1,2,3,4} \leq -2$, удовл. условию.? Начнем с того что ни a, ни $a-1$ не могут оказаться простыми, ведь если x_1x_2 (или x_3x_4) – простое, то один из членов x_1, x_2 (x_3, x_4) должен быть равен -1, что невозможно. Тогда $a = 5, 6, 7, 8$ не подходят (т.к. 5, 7 – простые). Для $a = 9$ есть пример: $x_1=-2$; $x_2=-4$; $x_3=x_4=-3$:

$$\begin{cases} x^2+bx+9-1 = (x+2)(x+4) = x^2+6x+8 \\ x^2+cx+9 = (x+3)(x+3) = x^2+6x+9 \end{cases}$$ – всё хорошо

Ответ: 9

Чистовик

Задача 2.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+|y-5|=2 \\ \sqrt{x^2-y-4}+|x-2|=1 \end{cases}$$

ОДЗ: $x^2-y\geq 0$
$x^2-y-4\geq 0$

Заметим, что по ОДЗ $x^2-y-4\geq 0 \Rightarrow x^2-y\geq 4 \Rightarrow \sqrt{x^2-y}\geq 2$

Но $\underset{\geq 2}{\sqrt{x^2-y}}+\underset{\geq 0}{|y-5|}=2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y}=2 \\ |y-5|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y=4 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

$\sqrt{x^2-y-4}+|x-2|=\sqrt{4-4}+|x-2|=|x-2|=1 \Rightarrow x=1;3$ → совпадает корень 3.

Итак, мы получили единственное возможное решение $(3;5)$. Проверим, что оно подходит:

$$\begin{cases} \sqrt{9-5}+|5-5|=\sqrt{4}+|0|=2 \\ \sqrt{9-5-4}+|3-2|=\sqrt{0}+|1|=1 \end{cases}$$ – подходит

Ответ: $(3;5)$

Чистовик

Задача 1.

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(14)=?$, где $f(n)=4n^3+6n^2+$
$+4n+5.$

Как известно,

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Раз так:

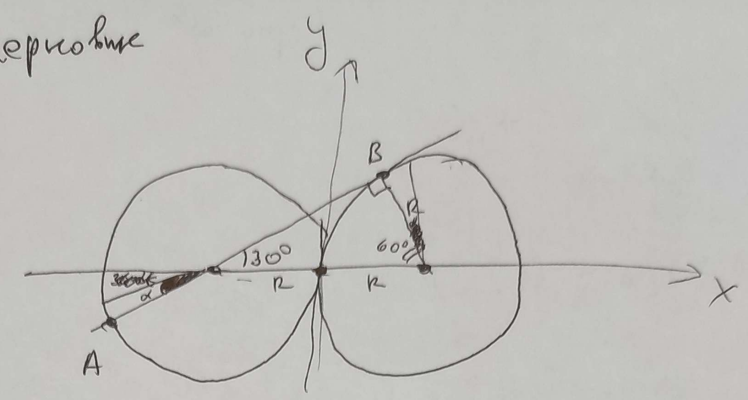
$\cancel{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=4(1^3+2^3+\ldots+n^3)}$

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(14)=4(1^3+2^3+\ldots+14^3)+6(1^2+2^2+\ldots+14^2)+$$
$$+4(1+2+\ldots+14)+5\cdot 14=4\cdot\left(\frac{14\cdot 15}{2}\right)^2+6\cdot\frac{14\cdot 15\cdot 29}{6}+4\cdot\frac{14\cdot 15}{2}+14\cdot 5=$$
$$=14^2\cdot 15^2+29\cdot 14\cdot 15+2\cdot 14\cdot 15+14\cdot 5=14\cdot 15(14\cdot 15+29+2)+70=$$
$$=210(210+29+2)+70=241\cdot 210+70=$$
$$=50610+70=50680$$

$$\begin{array}{r} \times 241 \\ 210 \\ \hline 2410 \\ 482 \\ \hline 50610 \end{array}$$

Ответ: 50680

Черновик



$$x = 2R - R\cos(60+\alpha) + R\cos(30-\alpha)$$

$$y = R\sin(60+\alpha) + R\sin(30-\alpha)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = R^2\left(\left(2 + \cos(30-\alpha) - \cos(60+\alpha)\right)^2 + \left(\sin(60+\alpha) + \sin(30-\alpha)\right)^2\right) =$$

$$= \cancel{R^2(6+2\sin} = R^2\left(6 - 2\cos(60+\alpha+30-\alpha) + 4(\cos(60+\alpha) + \cos(30-\alpha)\right) =$$

$$= R^2\left(6 + 4\cdot\cancel{3} - 2\cdot\sin 45^\circ \cdot \sin\frac{30-\alpha-60-\alpha}{2}\right) =$$

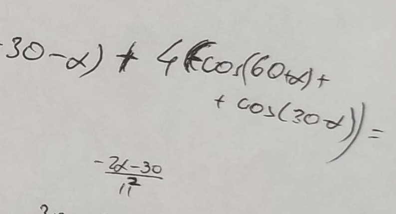
$$= R^2\left(6 + 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+30}{2}\right)\right) =$$

$$= R^2\left(6 + 4\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha+15)\right) \geq 4R^2$$

$$6 + 4\sqrt{2}\sin(\alpha+15) \geq 4$$

$$4\sqrt{2}\sin(\alpha+15) \geq -2$$

$$\sin(\alpha+15) \geq -\frac{\sqrt{2}}{4}$$



$$\frac{t}{1} = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{\pi}$$

— 10 —

Черновик

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a-1 \\ x_3 x_4 = a \end{cases}$$

$x_{1,2,3,4} < -1$; $x_{1,2,3,4} \in \mathbb{Z}$

$x_1, x_2 < -1 \Rightarrow x_1 x_2 > 1$

$a-1 > 1$

$a > 2$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$

$a \geq 3$

$a = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \leq -2$

$x_1 x_2 \geq 4$

$a \geq 5$

$a = 5$

$x_1 = -2$

$x_2 = -2$

$x_3 x_4 = 5$ - простое $\Rightarrow$ одно из чисел -1 / этого

$a = 6$

$x_1 x_2 = 5$ - та же пробл

$a = 7$ - простое

$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$

$(x+3)(x+3) = x^2 + 6x + 9$

$a = 8$ - плохо

$x_1 x_2 = 8 = -2 \cdot -4$

$a = 9$

$x_3 x_4 = 9 = -3 \cdot -3$

— 9 —

Черновик

$$f(\alpha) = \frac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin\alpha}$$

$$f'(\alpha) = \frac{\cancel{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - \cos\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2\alpha} =$$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

$$= \frac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, $\sin^2\alpha > 0$

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$\cancel{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$

$\cancel{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$1+\sin\frac{\alpha}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

$6-2\cos(90-2\alpha) = 4$

Черновик

$$a_i = (\sqrt{5})^x \cdot (\sqrt{7})^y \cdot (\sqrt{11})^z \cdot C_{2021}^x \cdot C_{2021-x}^y$$

$x+y+z=2021$ – неч $\Rightarrow$ [x, y, z – неч. / 1 неч, 2 чет.]

2 чет. $\rightarrow$ в произвед. дают целое

$\Rightarrow n\sqrt{5} + m\sqrt{7} + k\sqrt{11}$

$l\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 11}$

$$1-10^{-500} < \sqrt{77}\,\frac{l}{n} < 1$$

$n \rightarrow$ x неч; y, z – чет

$l \rightarrow$ x неч; $y - z$ – нечет

~~2020~~

$2k = a+b$

$a = 0; 2; \dots; 2k$

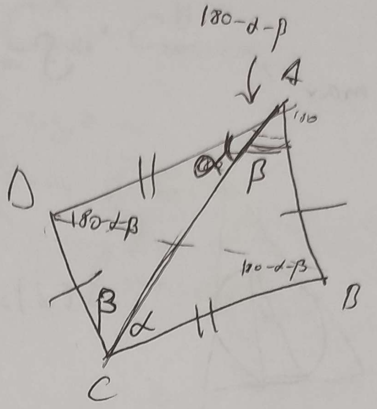
$a = 1; 3; \dots; 2k-1$ – на 1 слагаемое меньше

$x = 1; \dots; 2021$

1011

процесс выбора x одинаков.

Черновик



S

Ответ: $\frac{5}{4}$

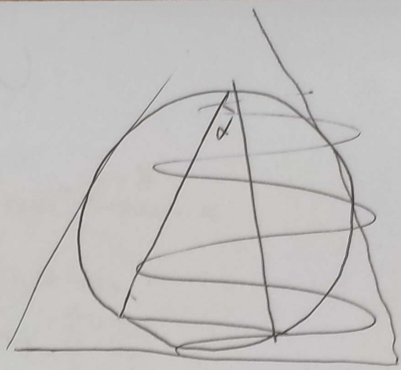
$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)^{2021}=$$

$$=n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot7\cdot11}$$

$$1-10^{-500}<\sqrt{77}\,\frac{l}{n}<1$$

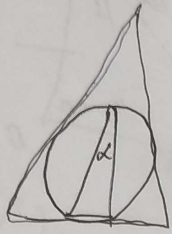
$$\frac{2R^2(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{\sin\alpha}$$

Черновик



min and max=?

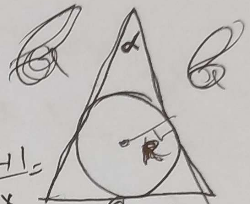
$S=1$



$S(\alpha)=?$

$\alpha\in[30^\circ;60^\circ]$

R-min



$$\frac{1}{S(x)}=\frac{4x^4-4x^2+1}{2x^2+2x}=$$

$2b\sin\frac{\alpha}{2}$

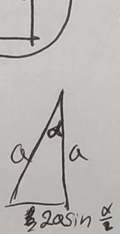
$$=\frac{2x^2(x^2-1)}{x(x+1)}+\frac{1}{2x^2+2x}$$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$

$$=2x(x-1)+\frac{1}{2x^2+2x}$$

$$2x^2-2x+\frac{1}{2x^2+2x}$$

$S=1$



$$S=1=\frac{a^2\sin\alpha}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2}{a^2}\Rightarrow a^2=\frac{2}{\sin\alpha}$$

$$2R=\frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\Rightarrow R=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$$

$$\cancel{R\frac{a+a+2a\sin\frac{\alpha}{2}}{2}=1}$$

$$R'(\alpha)=a\cdot\frac{(\sin\frac{\alpha}{2})'\sin\alpha-(\sin\alpha)'\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}=$$

$$R\frac{b+b+2b\sin\frac{\alpha}{2}}{2}=S$$

$$\| $$

$$=\frac{b^2\sin\alpha}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}>0$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}$$

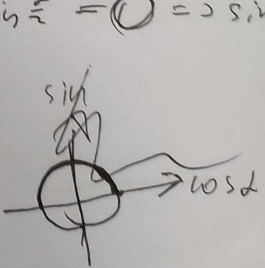
>0 при $\sin\frac{\alpha}{2}>0$

<0 при $\sin\frac{\alpha}{2}<0$

$\sin\frac{\alpha}{2}=0\Rightarrow\sin\alpha=0$

$$R(2b+2b\sin\frac{\alpha}{2})=$$

$$=b^2\sin\alpha$$



$$b=\frac{2R(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}\Rightarrow$$ при $\alpha\in[30^\circ;60^\circ]$

$$R(1+\sin\frac{\alpha}{2})\cdot\frac{2R(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}$$

$$S=R(b+b\sin\frac{\alpha}{2})=\cancel{\frac{b\sin\alpha}{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}b(1+\sin\frac{\alpha}{2})}$$

$b^2\sin$

1°

Черновик

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+|y-5|=2\\ \sqrt{x^2-y-4}+|x-2|=1\end{cases}$$

$x^2-y\geq 0$

$x^2-y-4\geq 0$

~~$x^2-y+(y-5)^2=4$~~

~~$x^2-y-4+(x-2)^2 \quad (y-5)(x-2)=0$~~

$\sqrt{x^2-y-4}$ $\quad x^2-y-4\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-y\geq 4 \Rightarrow \sqrt{x^2-y}\geq 2$

Но $\sqrt{x^2-y}+|y-5|=2$

$\sqrt{x^2-y}\geq 2$, $|y-5|\geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases}|y-5|=0\\ \sqrt{x^2-y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=5\\ x^2-y=4\end{cases} \Rightarrow x^2=4+y=9$$

$x=\pm 3$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-y-4}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0+|x-2|=1 \Leftrightarrow |x-2|=1$

$x=3$ - подх.

Ответ: $(3;5)$

Проверим: $\sqrt{9-5}+|5-5|=2$

$\sqrt{9-5-4}+|3-2|=1$

— 4 —

Черновик

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(14)$

$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$f(n)=4n^3+6n^2+4n+5$

$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=$

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(14)=$

$=4(1^3+2^3+\ldots+14^3)+6(1^2+2^2+\ldots+14^2)+$

$+4(1+2+\ldots+14)+5\cdot 14=$

$=4\cdot\left(\frac{14\cdot 15}{2}\right)^2+6\cdot\frac{14\cdot 15\cdot 29}{2}+4\cdot\frac{14\cdot 15}{2}+5\cdot 14=$

$=14^2\cdot 15^2+14\cdot 15\cdot 3\cdot 29+14\cdot 15\cdot 2+14\cdot 5=$

$=14\cdot 15(14\cdot 15+3\cdot 29+2)+70=$

$14\cdot 15=210$

$=210(210+87+2)+70=$

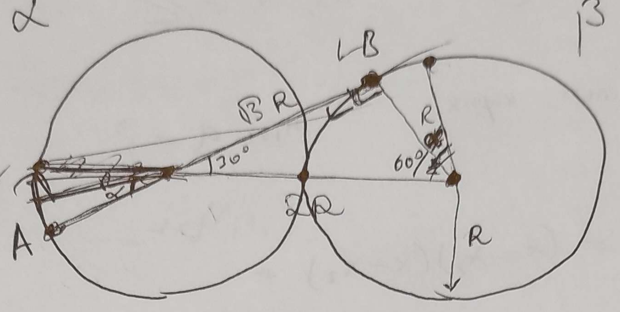
$=210\cdot 299+70$

$=$

$$\begin{array}{r} \times 299 \\ 210 \\ \hline 299 \\ 598 \\ \hline 62790 \end{array}$$

Ответ: $\underline{62860}$

Черновик $\qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$



$\cos(30-\alpha) = \cos 30\cdot\cos\alpha + \sin 30\sin\alpha$

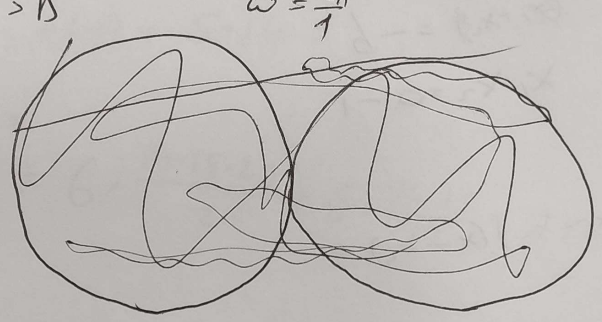
$\cos 60\cos\alpha - \sin 60\sin\alpha$

$(\cos 30+\cos 60)\cos\alpha - \sin 30 - \sin 60$

$(\frac{\pi}{4})\ V = \frac{2\pi R}{T_4}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$d_0 = (\sqrt{3}+1)R > D \qquad \geq D$



~~Rcos α~~

$y = R\sin(60+\alpha) + R\sin(30-\alpha)$

$x = 2R + R\cos(30-\alpha) - R\cos(60+\alpha)$

$d^2 = x^2 + y^2 = \qquad — 2 —$

$= R^2\Big(\sin^2(60+\alpha) + \sin^2(30-\alpha) + 2\sin(60+\alpha)\sin(30-\alpha) +$

$+ 4 + \cos^2(30-\alpha) + \cos^2(60+\alpha) + 4\cos(30-\alpha) - 4\cos(60+\alpha) -$

$- 2\cos(30-\alpha)\cos(60+\alpha)\Big) =$

$= 2R^2\Big(3 + \underbrace{\cos(60+\alpha+30-\alpha)}_{\cos 90^\circ = 0} + \underbrace{2\cos(30-\alpha) - 2\cos(60+\alpha)}_{=}\Big) =$

$-4\sin 45^\circ \sin\frac{-2\alpha-30}{2} = \qquad -2\alpha-30$

$= 4\sin 45^\circ \sin\frac{2\alpha+30}{2}$

$=$ ~~$2R^2(3$~~

$= 2R^2\Big(3 - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Черновик

$x^2+bx+a=1$ $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$x^2+cx+a=0$ $\quad x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ $\quad x_{1,2,3,4} < -1$

по 2 целых корня $\quad \min a = ?$

$x^2+bx+a-1 = (x-x_1)(x-x_2) =$

$= x^2-(x_1+x_2)x + x_1x_2$

$\cancel{= -b = -(x_1+x_2}$ $(x_1+x_2) = -b$

$x_1x_2 = a-1$

$x^2+cx+a = (x-x_3)(x-x_4) =$

$= x^2-(x_3+x_4)x+x_3x_4$

$x_3+x_4 = -c$

$x_3x_4 = a$

$\begin{cases} x_1x_2 = a-1 \\ x_3x_4 = a \end{cases}$

$\cancel{x<-1}$

$x_1 < -1$

$x_2 < -1$

$x_3 < -1$

$x_4 < -1$

$\Rightarrow x_1x_2 > 1 \Rightarrow a-1>1 \Rightarrow a>2$

$x_3x_4 > 1 \Rightarrow a>1 \Rightarrow a>1$

$x_3x_4 > 2$

$\cancel{(-1,-1)}$

$\cancel{(-1,-2)}$