МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Лепехин Егор Владимирович**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	0	15	0

(Чистовик №1) Вариант № 210103

№ 1

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)-?$

$f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$

$1+2+3+\ldots+13=\frac{13(13+1)}{2}=13\cdot7$

$1^2+2^2+3^2+\ldots+13^2=\frac{13(13+1)(2\cdot13+1)}{6}=\frac{13\cdot\cancel{14}^{7}\cdot\cancel{27}^{9}}{\cancel{6}_{\cancel{3}}}=13\cdot7\cdot9$

Выведем формулу:

$2^4+3^4+\ldots+(n+1)^4=1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4+4(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+$
$+6(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+4(1+2+3+\ldots n)+1$, ч

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\Big((n+1)^4-(n+1)-6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-$
$-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}\Big)=\frac{1}{4}(n+1)\big((n+1)^3-1-n(2n+1)-2n\big)=$
$=(n^3+3n^2+3n+1-1-2n^2-n-2n)\cdot\frac{1}{4}(n+1)=$
$=\frac{1}{4}(n+1)(n^3+n^2)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, ч $1^3+2^3+3^3+\ldots+13^3=$
$=\frac{13^2(13+1)^2}{4}=\frac{13^2\cdot14^2}{4}$, ч

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)=4(1^3+2^3+3^3+\ldots+13^3)-$
$-6(1^2+2^2+3^2+\ldots13^2)+4(1+2+3+\ldots+13)+13\cdot13=$
$=\cancel{4}\cdot\frac{13^2\cdot14^2}{\cancel{4}}-6\cdot13\cdot7\cdot9+4\cdot13\cdot7+13\cdot13=$
$=169\cdot196-13\cdot14\cdot27+2\cdot13\cdot14+169=$

№ 7 (Чистовик N10)

Заметим, что это раскладывается, как $\sum_i k_i \sqrt{5}^{\alpha_i} \cdot \sqrt{7}^{\beta_i} \cdot \sqrt{11}^{\gamma_i} + c$, где $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 2021$, — по биному Ньютона, и ответ с.

$= 13 \cdot 14(13 \cdot 14 - 27 + 2 + 1) - 13 =$ (Чистовик N2)

$= 182(182 - 24) - 13 = 182 \cdot 158 - 13 = 28743$

Ответ: 28743.

№2 (Чистовик N 3)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+|y-5|=2 \ (1) \\ \sqrt{x^2-y-4}+|x-2|=1 \ (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-y \geqslant 0 \\ x^2-y-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-y \geqslant 4$, сл $\sqrt{x^2-y} \geqslant 2$

(1) $\sqrt{x^2-y}+|y-5|=2$, т.к $\sqrt{x^2-y} \geqslant 2$, а $|y-5| \geqslant 0$,

а $\underbrace{\sqrt{x^2-y}}_{\geqslant 2}+\underbrace{|y-5|}_{\geqslant 0}=2$, сл

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}=2 \\ |y-5|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y=4 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases} \end{array} \right.$$

решения первого (1) ур-ия подставим во ~~(2)~~ второе (2):

а) при $x=3$, $y=5$:

$\sqrt{3^2-5-4}+|3-2|=1 \Leftrightarrow 1=1$ — верно, сл $x=3, y=5$ — решение

б) ~~$\sqrt{(-3)^2-5}$~~ при $x=-3$; $y=5$:

$\sqrt{(-3)^2-5-4}+|-3-2|=1 \Leftrightarrow 5=1$ — неверно, сл $x=-3$, $y=5$ — не решение.

Ответ: $(3;5)$.

№ 3 (Чистовик № 4)

$x^2 + bx + a - 1 = 0$ (1) корни меньше (-1),
$x^2 + cx + a = 0$ (2) корни целые, a_{min} - ?,

$\exists$ корни (1) ур-ия — x_1, x_2, $x_1 \geq x_2$
корни (2) ур-ия — x_3, x_4, $x_3 \geq x_4$

т.к. $x_1 < -1$, $x_2 < -1$, сл $x_1 x_2 > 1$,
сл $a - 1 > 1$

т.к $x_3 < -1$, $x_4 < -1$, сл $x_3 x_4 > 1$,
сл $a > 1$

т.к x_1, x_2, x_3, x_4 — целые ~~и~~ и меньше (-1), сл a и $a-1$ — составные, подберём $\min a$ и $\min a-1$:

1) $a = 2$ — 2 простое, сл не верно
2) $a = 3$ — 3 простое, сл не верно
3) $a = 4$, сл $a - 1 = 3$, — 3 простое, сл не верно
4) $a = 5$ — 5 простое, сл не верно
5) $a = 6$, сл $a - 1 = 5$ — 5 простое, сл не верно
6) $a = 7$, — 7 простое, сл не верно
7) $a = 8$, сл $a - 1 = 7$, — 7 простое, сл не верно
8) $a = 9$, сл $a - 1 = 8$ — подходит,

пример: $b=6$, $c=6$ (Чистовик N 5)

(1) $x^2+6x+8=0 \Leftrightarrow (x+4)(x+2)=0$, сл

$x_1=-4$, $x_2=-2$ — подходит

(2) $x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2=0$, сл

$x_3=-3$, $x_4=-3$ — подходит, сл

$a_{min}=9$, но если считать, что

~~Ответ: $a_{min}=9$~~ числа a, b, c —

— различны, тогда:

9) $a=10$, сл $a-1=9$ — ~~не~~ подходит,

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

пример: $b=6$ $c=7$

(1) $x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2=0$, сл

$x_1=-3$, $x_2=-3$ — подходит

(2) $x^2+7x+10=0 \Leftrightarrow (x+5)(x+2)=0$, сл

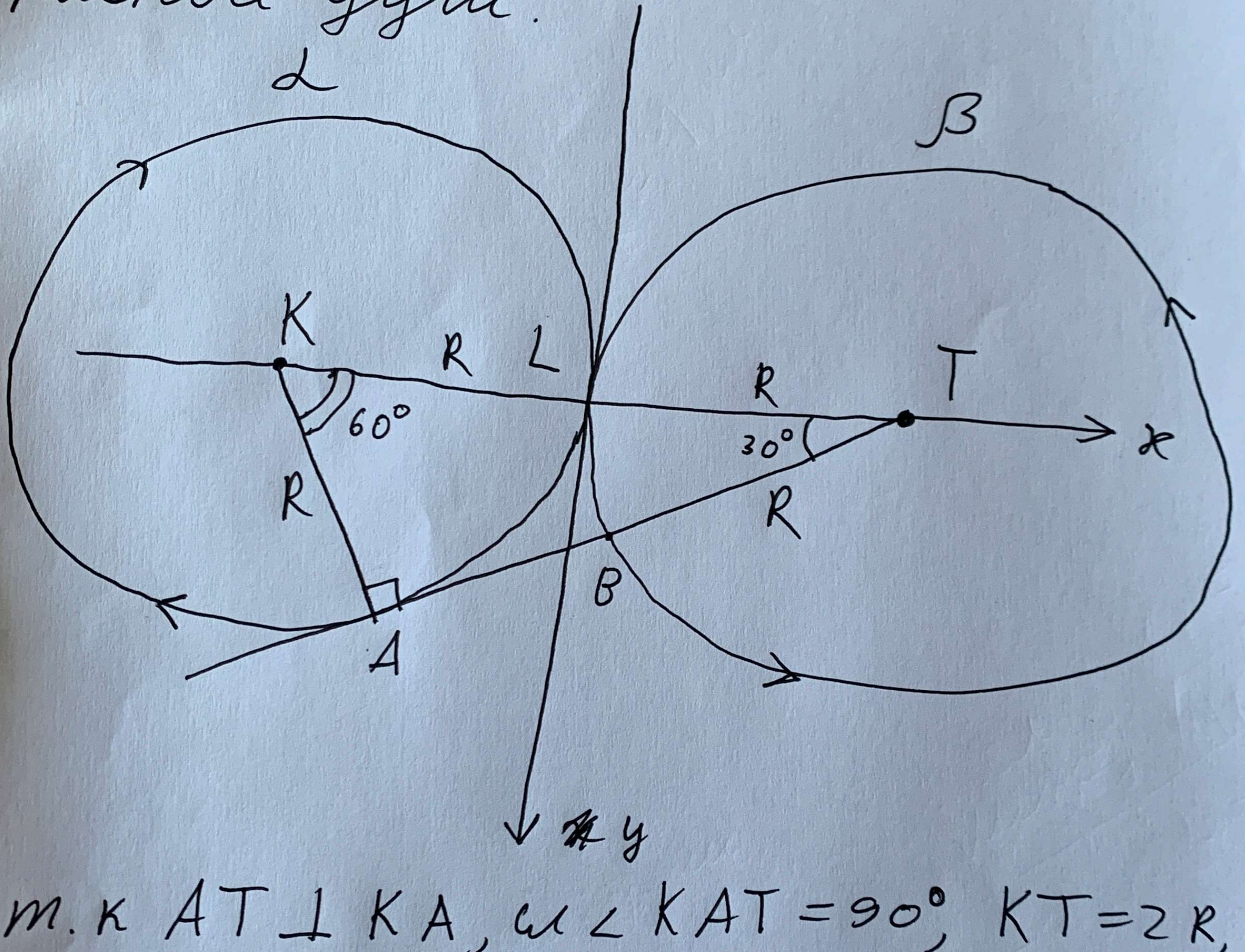
$x=-2$, $x=-5$ — подходит, сл

$a_{min}=10$

Ответ: если a, b, c — различные числа, тогда $a_{min}=10$, если нет, то $a_{min}=9$.

№ 4 (Чистовик № 5)

1) т.к окружности равны, время полного оборота равно, ⇒ за равное время автомобили проедут равные дуги.



т.к $AT \perp KA$, ⇒ $\angle KAT = 90°$; $KT = 2R$, $KA = R$, ⇒ $\angle LTB = \sin\frac{1}{2} = 30°$, ⇒ $\angle LKA = 60°$, ⇒ из (1) $\angle LKA = \angle LTB + 30°$ — всё время, введём систему координат с осью x, вдоль $\overrightarrow{KT}$, и осью y ~~и~~ проходящей через. т L и

нарравлена вниз перп. оси x, (Листовик N67)
единичные отр. выберем так, что

$R = 1$, ш ~~$x_B = 1-\cos\alpha$~~] $\angle LTB = \alpha$,

ш $x_B = 1 - \cos\alpha$

$x_A = -(1 - \cos(\alpha + 30°))$

$y_B = \sin\alpha$

$y_A = \sin(\alpha + 30°)$, ш расстояние

между автомобилями будет:

$$S = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - \cos\alpha - \cos\alpha - \cos(\alpha + 30°))^2 + (\sin(\alpha+30°) - \sin\alpha)^2},$$

найдём, при каких α $AB \leq 2$:

$$\sqrt{(\sin x - \sin(x+30°))^2 + (2 - \cos x - \cos(x+30°))^2} \leq 2$$

$$\sqrt{(2\cos(x+15°)\sin 15°)^2 + (\cancel{2}2 - 2\cos(x+15°)\cos 15°)^2} \leq 2$$

$$\cos^2(x+15°)\sin^2 15° + 1 - 2\cos(x+15°)\cos 15° + \cos^2(x+15°)\cos^2 15° \leq 1$$

$$\cos^2(x+15°) - 2\cos(x+15)\cos 15° \leq 0$$

$$\cos(x+15°)\big(\cos(x+15°) - 2\cos 15°\big) \leq 0.$$

$$0 \leq \cos(x+15°) \leq 2\cos 15° \iff$$

(Чистовик N 8)

$2\pi n - \frac{7}{12}\pi \le x \le 2\pi n + \frac{5}{12}\pi$, т.е

при $x \in [0; 2\pi]$ ровно половина

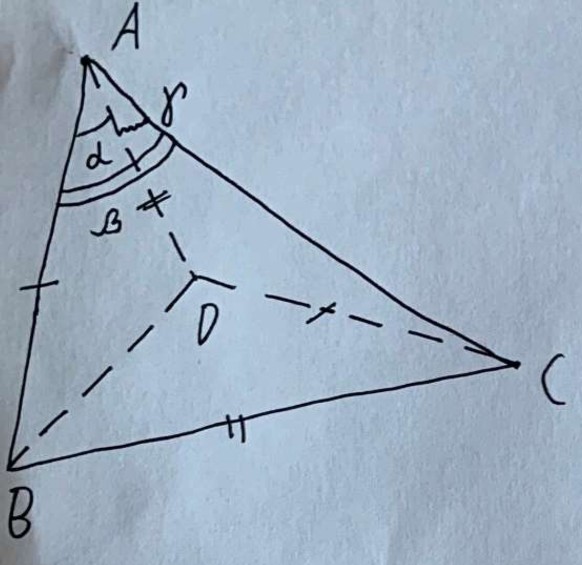
x подойдёт, т.е половину всего

времени S не более диаметра.

Ответ: половину времени, т.е

45 мин.

№ 6 (Листовик N 9)



Дано:

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$S_{ABC}=S$

$AB=CD$

$AD=BC$

Найти:

$S_{пов.}$ − ?

] $\angle DAB=\alpha$; $\angle CAB=\beta$; $\angle DAC=\gamma$

т.к $AB=CD$, $AD=BC$, сл по III признаку равенства треугольников:

$\triangle ABD=\triangle CDB$, т.к BD — общая,

$\triangle ABC=\triangle CDA$, т.к AC — общая,

сл $\angle DAB=\angle BCD=\alpha$; $\angle CAB=\angle DCA=\beta$; $\angle DAC=\angle BCA=\gamma$, как соотв. элементы, а т.к $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, сл $\angle ADC=180^\circ-(\beta+\gamma)=\alpha$, $\angle ABC=180^\circ-(\beta+\gamma)=\alpha$, сл $\triangle ABD=\triangle ADC=\triangle ABC=\triangle BCD$ по I признаку, сл $S_{пов}=S_{ABD}+S_{ADC}+S_{ABC}+S_{BCD}=4S_{ABC}=4S$ **Ответ:** $4S$.