



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА**

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Липский Андрей Владимирович**

Класс: **8**

Технический балл: **68**

Дата проведения: **19 марта 2021 года**

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике  
2020/2021 учебный год  
Заключительный этап

ФИО участника: Липский Андрей Владимирович

7-8 классы

<b>Задача 1</b>	<b>Задача 2</b>	<b>Задача 3</b>	<b>Задача 4</b>	<b>Задача 5</b>	<b>Задача 6</b>	<b>Сумма*</b>
16 баллов	16 баллов	16 баллов	16 баллов	0 баллов	0 баллов	68 баллов

\* К сумме баллов по всем задачам добавлялось 4 балла в случае, если в работе есть хотя бы одна верно решённая задача.

Условие

Условие.

(начальная)

Пусть  $v$  первого равна  $x$ , тогда  $v$  второго равна  $3x$ .

$$v_1 = x \text{ (на всем } S)$$

$$v_2 = 3x \text{ (на } \frac{1}{2}S)$$

$$v_2 = \frac{3x}{2} \text{ (на } \frac{1}{2^2}S)$$

...

$$v_2 = \frac{3x}{2^8} \text{ (оставшиеся } S)$$

$$s_1 = s_2 = S$$

$$s_2 = v \cdot t; t_2 = \frac{S}{v}$$

$$t_1 = \frac{S}{x}$$

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2}S}{3x} + \frac{\frac{1}{2^2}S}{\frac{3x}{2}} + \frac{\frac{1}{2^3}S}{\frac{3x}{2^2}} + \dots + \frac{S_{\text{ост.}}}{\frac{3x}{2^8}}$$

М.к. в этой части и числитель и знаменатель все время увеличиваются в 2 раза, их отношение не меняется. Следовательно все дроби этой части равны.

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{\frac{1}{2}S}{3x} \cdot 8 + \frac{S_{\text{ост.}}}{\frac{3x}{2^8}} = \frac{1S}{6x} \cdot 8 + \frac{S_{\text{ост.}}}{\frac{3x}{2^8}} = 1 \frac{1S}{3x} + \frac{S_{\text{ост.}}}{\frac{3x}{2^8}} = \\ &= 1 \frac{1S}{3x} + \frac{(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256}) S}{\frac{3x}{2^8}} = \\ &= 1 \frac{1S}{3x} + \frac{1}{256} S : \frac{3x}{2^8} = 1 \frac{1S}{3x} + \frac{S \cdot 2^8}{256 \cdot 3x} = \frac{1}{256} \cdot \frac{S}{3x} + 1 \frac{1S}{3x} = \\ &= \frac{1S}{3x} + 1 \frac{1S}{3x} = 1 \frac{2S}{3x} \end{aligned}$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{5S}{3x}}{\frac{S}{x}} = \frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$$

Ответ:  $t_2 > t_1$  в  $1 \frac{2}{3}$  раза

Лист 3

№ 2 Числовик.

Загаданное =  $\overline{ab}$

Второе число =  $\overline{ba}$

$\overline{ab} \cdot 4 = \overline{ba}^2$

$a \neq b, b \neq 0$ , т.к. они в разряде десятков в одном

из чисел.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a <sup>2</sup>	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

1(4), 9(6), 5

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b · 4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6

(4), 8, 2(6), 0

~~Последняя цифра в  $\overline{ab} \cdot 4$  и  $\overline{ba}^2 - 4$  или 6.  
 Или совпадают цифры a и b равные 4 и 6~~

~~$46^2 = 64 \cdot 4$  Проверка:  $46 \cdot 46 = 2116$   
 $46 \cdot 4 \neq 64^2$   
 $48^2 \neq 48 \cdot 4$   
 $66^2 \neq 66 \cdot 6$  согласно таблице:~~

Варианты  $\begin{cases} b = 1, 4, 6, 9 \Rightarrow b = 1, \text{ т.к.} \\ a = 2, 4, 6, 8 \text{ если } b > 2, \text{ то} \end{cases}$

Также a может быть равно 2 или 8

b может быть равно 1 или 9

$14^2 \neq 41 \cdot 4$

$18^2 = 81 \cdot 4$

$324 = 324$

$\frac{\overline{ba}^2}{\overline{ab}} > 4$

Ответ: 81

Лист 4

$$8 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$$

$$4 = 1 \cdot 2 \cdot 4$$

$$9 = 1 \cdot 3 \cdot 9$$

$$16 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$$

$$18 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9$$

$$64 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$36 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6$$

$$1010 \cdot 4 = 4040$$

$$1 \cdot 7 \cdot 49$$

1011 слова

$$4042 \cdot 1010 + 2021$$

Ответ: 32, 64, 27, 81, 25, 49

✓4

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 + (x+5)^2 + \dots + (x+2021)^2 = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \dots + (x-2020)^2$$

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 + (x+5)^2 + \dots + (x+2021)^2 = (x+0)^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \dots + (x-2020)^2$$

$$(2x+1) + 5(2x+1) + 9(2x+1) + 13(2x+1) + \dots + 4040(2x+1) = 0$$

$$(x+7)^2 - (x-6)^2$$

$$\frac{5(x+7+x-6)(x+7-x+6)}{9-5} = \frac{2022}{2} = 1011$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \\ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \end{array}$$

$$1011x^2$$

$$1011x^2$$

$$9 - 5$$

$$1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \end{array}$$

$$2$$

$$1$$

$$(x+1)^2 - (x-0)^2$$

$$(x+1)^2 - (x-0)^2$$

$$(x+1+x-0)(x+1-x+0)$$

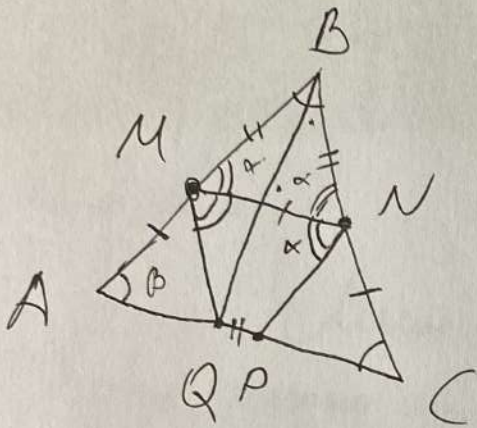
$$(x+3)^2 - (x-2)^2$$

$$(x+3+x-2)(x+3-x+2) = (2x+1) \cdot 5$$

$$2x+1$$

$$(x+5)^2 - (x-4)^2$$

$$(x+5+x-4)(x+5-x+4) = (2x+1) \cdot 9$$



Задача 7 Чеботарев

$$2\alpha + \beta = 180 \Rightarrow \angle B = \beta = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

Лист 1

Числовик.

№ 4

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 + (x+5)^2 + \dots + (x+2021)^2 = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \dots + (x-2020)^2$$

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 + (x+5)^2 + \dots + (x+2021)^2 = (x-0)^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \dots + (x-2020)^2$$

$$\left( (x+1)^2 - (x-0)^2 \right) + \left( (x+3)^2 - (x-2)^2 \right) + \left( (x+5)^2 - (x-4)^2 \right) + \dots + \left( (x+2021)^2 - (x-2020)^2 \right) = 0$$

$$(x+1+x-0)(x+1-x+0) + (x+3+x-2)(x+3-x+2) + (x+5+x-4)(x+5-x+4) + \dots + (x+2021+x-2020)(x+2021-x+2020) = 0$$

$$(2x+1) \cdot 1 + (2x+1) \cdot 5 + (2x+1) \cdot 9 + \dots + (2x+1) \cdot 4041 = 0$$

$$(2x+1) \cdot (1+5+9+13+\dots+4041) = 0 \quad | : (1+5+9+13+\dots+4041) > 0$$

$$2x+1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Ответ:  $x = -0,5$

№ 3

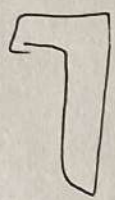
Чтобы каждый из делителей числа, расположенных по возрастанию, делился на предыдущий, нужно чтобы каждый из них раскладывался на одинаковые простые множители. Следовательно, все множители «интересных» чисел являются степенями одного и того же простого числа. Следовательно, «интересные» числа являются степенями простых чисел.

Рассмотрим степени простых чисел от 20 до 90.

$$2^5 = 32, \quad 2^6 = 64, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 4$$

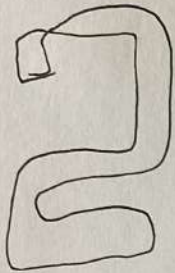
$$5^2 = 25, \quad 5^3 = 125, \quad 7^2 = 49.$$

Ответ: 25, 27, 32, 49, 64, 81.

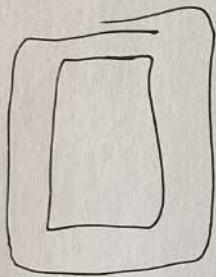


Лист 6 Черновик

- всегда можно уч. 2-кл. или 2 x 1-кл.



- обз. 1 x 1-кл.



- всегда можно 2-кл.



~~Клиент~~  
 Задача 3

Дано:  
 $S_1 = S_2 = S$   
 $v_1 = x$   
 $v_2 = 3x \left(\frac{1}{2} S\right)$   
 $v_2 = 1,5x \left(\frac{1}{4} S\right) = \frac{3}{2} x \left(\frac{1}{4} S\right)$   
 $\dots$   
 $v_2 = \frac{3}{28} x \left(1S - \left(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \dots + \frac{1}{28}S\right)\right)$

~~Клиент~~

Черновик

Решение:  
 $S = v \cdot t ; t = \frac{S}{v}$   
 $t_1 = \frac{S}{x}$

~~$t_2 = \frac{3x}{\frac{1}{2}S} + \frac{3x}{\frac{1}{4}S} + \dots + \frac{3x}{\frac{1}{28}S}$~~

$\frac{t_2}{t_1} = ?$

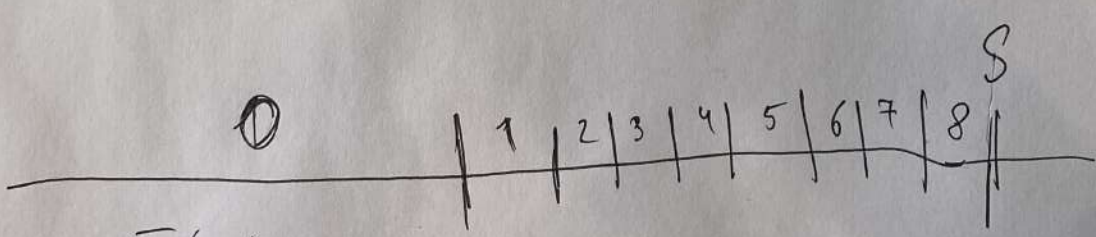
~~$t_2 = \frac{\frac{1}{2}S}{3x} + \frac{\frac{1}{4}S}{\frac{3}{2}x} + \dots + \frac{3x}{\frac{1}{28}S}$~~

~~423~~

$1 - \frac{128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1}{256}$

$\frac{1}{256}$

$1 - \frac{\frac{5}{3} \cdot x}{\frac{8}{x}} = 1 - \frac{2}{3} x^2$



$\frac{5x}{3x} \cdot \frac{x}{x} = 5$

Лист 2

~~Черновик~~ Черновик  
№1

Пусть  $V$  второго равна  $3x$ , тогда  $V$  первого равна  $x$

$$S_1 + S_2 = S \quad (\text{начальная})$$
$$V_1 = x \left( \frac{1}{S} \right)$$

$$V_2 = 3x \left( \frac{1}{2} S \right)$$

$$V_2 = \frac{3x}{2} \left( \frac{1}{4} S \right)$$

$$\dots$$
$$V_2 = \frac{3x}{2^7} \left( \frac{1}{2^8} S \right)$$

$$V_2 = \frac{3x}{2^8} \quad (\text{самое маленькое } S)$$

$$S = v \cdot t ; t = \frac{S}{v}$$

$$t_1 = \frac{S}{x}$$

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2} S}{3x} + \frac{\frac{1}{2^2} S}{\frac{3x}{2}} + \frac{\frac{1}{2^3} S}{\frac{3x}{2^2}} + \dots + \frac{S_{\text{очн.}}}{\frac{3x}{2^8}}$$

$$t_2 = \frac{1}{6} Sx + \frac{1}{6} Sx + \frac{1}{6} Sx + \dots + \frac{S_{\text{очн.}}}{\frac{3x}{2^8}}$$

$$t_2 = 8 \cdot \frac{1}{6} Sx + \frac{(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256}) S}{\frac{3x}{2^8}}$$

$$t_2 = 1 \frac{1}{3} Sx + \frac{\frac{1}{256} S}{\frac{3x}{2^8}} = 1 \frac{1}{3} Sx + \frac{1 \cdot 256}{256 \cdot 3} Sx = 1 \frac{2}{3} Sx$$

Мисал 1  $S_1 = S_2$  Чарновик

$$v_1 = x$$

$$v_2 = 3x \quad \left(\frac{1}{2} S\right)$$

$$v_3 = 1,5x \quad \left(\frac{1}{4} S\right)$$

$$v_4 = 0,75x \quad \left(\frac{1}{8} S\right)$$

$$v_5 = 0,375x \quad \left(\frac{1}{16} S\right)$$

$$v_{10} =$$

$$t_2 = ?$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1000}{3^3} = \frac{1}{6} xy$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1000}{3^3} = \frac{1}{2} S$$

- $2^3 = 8$
- $2^4 = 16$
- $2^5 = 32$
- $2^6 = 64$
- $2^7 = 128$
- $2^8 = 256$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1000}{3^3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2^2} S$$

$$\frac{1}{2^3} S$$

$$\frac{1}{2^8} S$$

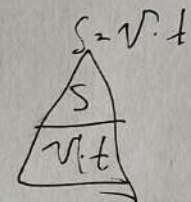
4-5  
5-6  
6-7  
7-8  
8-9  
9-10  $\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{650}$

$$\frac{1}{2} xy - \frac{1}{6} xy$$

$$3x \quad \frac{1}{6} xy$$

$$\frac{1}{4} S =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1000}{3^3} = \frac{1}{6} xy$$



$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1000}{3^3} = \frac{1}{12}$$

$$t = \frac{S}{v} \quad \frac{1}{4} S =$$

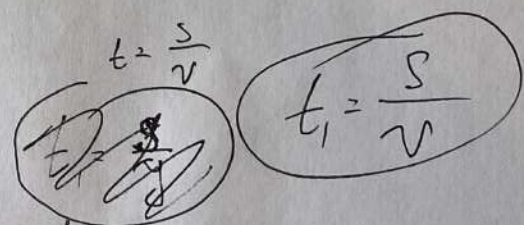
$$\frac{1}{2^8} \cdot \frac{1000}{3} = \frac{1}{96} \quad 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}\right) = 1 - \frac{64+32+16+8+4+2+1}{128}$$

$$\frac{1}{2^8} \cdot \frac{3}{2^8} = 1 - \frac{96+24+6+1}{128} = 1 - \frac{102+25}{128} = 1 - \frac{127}{128} = \frac{1}{128}$$

$$S_{10} = \frac{1}{128} S$$

$$v_{10} = \frac{1}{256} \cdot 3x$$

$$\frac{1}{15} \cdot \frac{10000}{3^3}$$



$$t_2 = \frac{1}{6} xy + \frac{1}{6} xy + \frac{1}{12} xy + \frac{1}{12} xy + \frac{1}{6} xy$$

$$t_2 = \frac{1}{6} xy \cdot 8 + \frac{1}{3} xy = \left(\frac{8}{6} + \frac{2}{6}\right) xy = \frac{10}{6} xy = \frac{5}{3} xy$$

Мисал:  $8 \frac{1}{3}$  жаза  $1 \frac{4}{8} = 1 \frac{2}{3}$

$$4042 \cdot 1010 + 2021$$

$$\begin{array}{r} 4042 \overline{) 1010} \\ + 4042 \\ \quad 00 \\ \hline 404200 \\ \hline 408242 \end{array}$$

Лист 5 Черновик

$$408242 (2x+1) = 0$$

$$2x+1=0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2}$$

$$y = 2^2$$

Мам 8 репробун

$$\overline{ab} \cdot y = \overline{ba}^2$$

$$\overline{ab} \cdot 2^2 = \left(\frac{ba}{2}\right)^2 \cdot 2^2$$

$$2 \cdot ab = ba^2$$

$$ab \cdot 2a^2$$

$$ab = \left(\frac{ba}{2}\right)^2$$

$$81 = \left(\frac{18}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{ab} = \frac{ba}{2}$$