МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Лузанин Матвей Алексеевич**

Класс: **11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	10	15	5	15	15

Вариант 210108 Чистовик

Задача 1

$$S = f(1)+f(2)+\ldots+f(12) = 4\overbrace{(1^3+2^3+\ldots+12^3)}^{x} - 6\overbrace{(1^2+2^2+\ldots+12^2)}^{y} + 4\overbrace{(1+2+\ldots+12)}^{z} + 7\cdot 12$$

$$x = 1+8+27+64+125+216+343+512+729+1000+1331+1728 =$$

$$= 6084$$

$$y = 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121+144 = 650$$

$$z = \frac{13\cdot 12}{2} = 78$$

$$S = 4\cdot 6084 - 6\cdot 650 + 4\cdot 78 + 84 = \cancel{20296}\ 20832$$

Ответ: ~~20796~~ 20832.

Задача 2. Чистовик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

Из ОДЗ замечаем, что $x^2+y-1 \geq 0$, т.е. $x^2+y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq 1$

т.к. $|y+8| \geq 0$ и $\sqrt{x^2+y} \geq 1$, то $\sqrt{x^2+y} + |y+8| \geq 1$ и рав-во достигается тогда и только тогда, когда $|y+8| = 0$, $\sqrt{x^2+y} = 1$.

Значит, $y=-8$, $x^2 = 9$, т.е. $x = \pm 3$

если $x=3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 11$ - не уд.

если $x=-3$, то $\sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5$ - уд.

Ответ: $x=-3$
$y=-8$.

Чистовик ~~Задача~~

Задача 3.

Заметим, что a, b, c - целые, (по т. Виета, т. к. корни целые)

$x^2 + bx + a = -1$ $x^2 + bx + a + 1 = 0$

$x^2 + cx + a = 0$

пусть x_1, x_2 - корни первого

x_3, x_4 - корни второго.

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = a+1 \\ x_3 x_4 = a \end{cases} \rightarrow \text{т.к. } x_i > 1, \text{ то } a, a+1 \text{ - составные числа.}$$

первый раз, когда два подряд идущих числа являются составными это 8, 9, т.е $a = 8$

Тогда $b = 6$, $c = 6$ и $x_1 = 3$, $x_2 = 3$; $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

Если есть условие, что корни не могут быть равными, то $a+1 = 9$ не подходит, т.к. оно не имеет двух разных делителей кроме 1 и 9.

Значит, первый момент, который нам подходит это 14, 15, т.е. $a = 14$, $b = 8$, $c = 9$ ~~$x_1 = 2x$~~

$x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $x_3 = 2$; $x_4 = 7$.

Ответ: $a = 8$ если равные корни

$a = 14$, если разные корни.

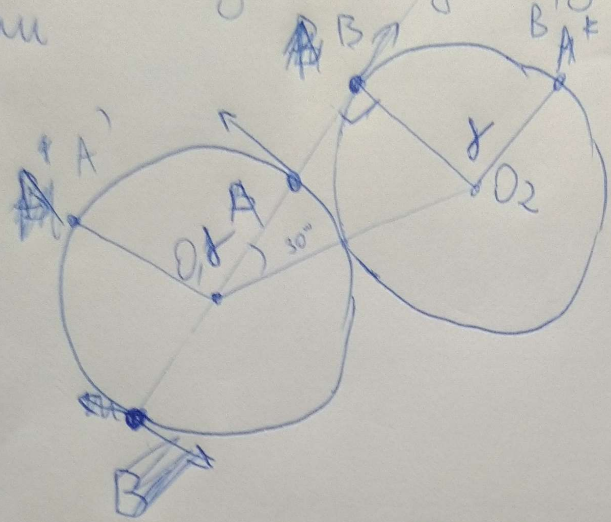
Чистовик

Задача 4.

~~т.к. ра~~ т.к. оба автомобиля проезжают круг за одно и то же время, то их угловые скорости равны.

Заметим, что в данной задаче нужно рассмотреть 4 случая.

1 случай



Для всех случаев стоит заметить, что O_1O_2 равен диаметру каждой окр-ти. Так же, т.к. $\angle O_1BO_2 = 90°$ и $O_1O_2 = 2O_2B$, то $\angle BO_1O_2 = 30°$

пусть в ~~мо~~ какой-то момент времени A был в A', а B был в B'. тогда т.к. угловые скорости равны,

$BO_2B' = AO_1A' = \gamma$

рассмотрим и 4-х угольник $A'O_1O_2B'$ ~~Докажем~~

~~Зна~~ $A'O_1 = B'O_2 = r$. Заметим, что если $\angle A'O_1O_2 + \angle O_1O_2B' > 180$, то $A'B' > O_1O_2$, если $\angle A'O_1O_2 + \angle O_1O_2B' < 180$, то $A'B' \leq O_1O_2$.

почему это так. ~~покажем на~~ если $A'O_1O_2 + O_1O_2B' > 180$, то пусть A'' - т. на λ: $A'O_1 \parallel O_2B' \Rightarrow A''B'O_2O_1$ - парал, $A''B' = O_2O_1$.

~~Тогда~~ Заметим, что $A'B' > A''B'$ - ч.т.д.

Значит, т.к. ~~BO_1+BO_2~~ $\angle BO_1O_2 + \angle BO_2O_1 = 90$, то ~~если~~ $AB \leq O_1O_2$ при ~~из~~ $2\gamma < 90$, т.е. $\gamma \leq 45$. Когда A и B будут с другой стороны прямой O_1O_2 тогда если $AB \leq O_1O_2$: ~~$(360-90-2\gamma) < 180$ т.е. $\gamma > 135$~~ $(720-90-2\gamma) < 180$, т.е. $\gamma > 225$. т.к. $\gamma \in [0; 360]$ и при $\gamma \in [0; 45] \cup [225; 360]$ то ~~хоро~~ значений при которых ~~время свето~~ $AB \leq O_1O_2$ достигается ровно половину времени.

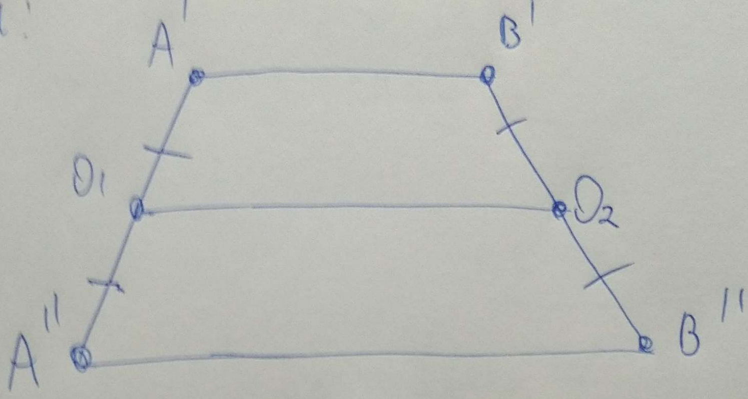
В остальных случаях аналогично. Ответ: 1 час.

Задача 4. Чистовик

Так же задача решается биекцией.

Для каждого положения $A'B'$ приведем положение $A''B''$ так: что A'' диаметрально противопол A', а B'' диаметр. противоп. ~~A''~~ B'

получаем:



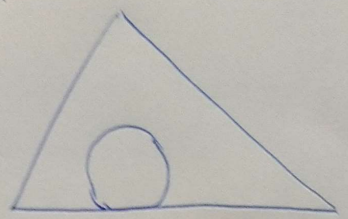
Заметим, что т.к. $\angle A'O_1A'' = \angle B'O_2B''$, то если достигается положение $A'B'$, то достигается и положение $A''B''$. при этом заметим, что ровно один из отрезков $A'B'$ и $A''B''$ больше O_1O_2. Значит, таких положений A', B': $AB < O_1O_2$ ровно половина.

Ответ: ~~A~~. 1 час.

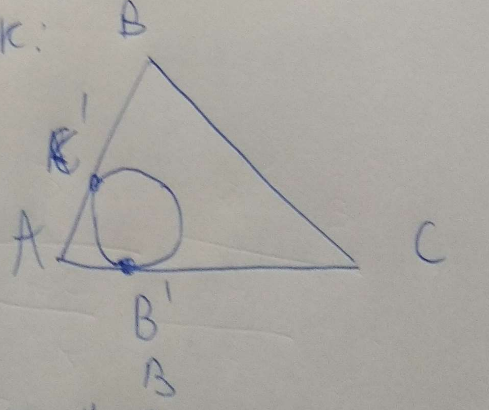
Задача 5. Чистовик

Докажем, что мы вырезали вписанный круг от противного. пусть мы вырезали какой-либо другой круг. т.к. вписанный круг только один, то наш круг не касается сразу всех сторон.

Начнем двигать нашу окр-ть в каком-либо направлении. Заметим, что рано или поздно она каснётся стороны Δ-ка. получим такую картинку:

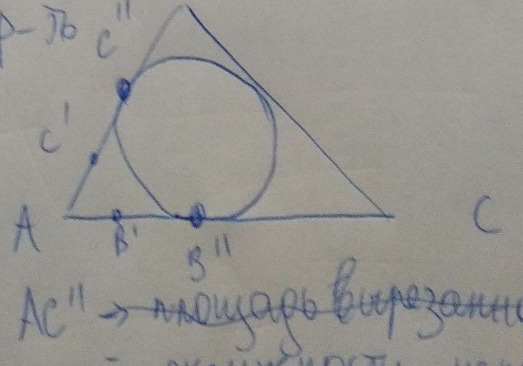


теперь будем двигать окр-ть вдоль той стороны, которой она касается. опять же рано или поздно она каснется какой-либо другой стороны. получим такой рисунок:



~~теперь, раздувая~~

впишем в ABC окр-ть



Заметим, что $AC' < AC''$ → ~~площадь вырезанной~~

А значит, радиус вырезанной окружности меньше радиуса вписанной, чего быть не может. ч.т.д.

Задача 5. Чистовик

Пусть R - радиус описанной окр-ти исходного $\triangle$-ка, r - радиус его вписанной окр-ти. (назовем $\triangle$-к N)

Заметим, что для полученного в итоге $\triangle$-ка (назовем его M) r - радиус описанной окр-ти.

Тогда т.к. $N \sim M$, то отношение их ~~пр~~ площадей это квадрат коэф. подобия. Коэф-т подобия это отношение соответствующих эл-тов. Тогда коэф-т подобия N и M равен $\frac{R}{r}$, т.е. $\frac{S_N}{S_M} = \frac{R^2}{r^2}$ $S_M = \frac{r^2}{R^2} \cdot S_N = \frac{r^2}{R^2}$

т.е. S_M максимальна, когда максимальна дробь $\frac{r}{R}$ и минимальна, когда эта дробь минимальна.

Найдем зависимость $\frac{r}{R}$ от α.

Пусть боковая сторона N равна a. Тогда $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ ~~по т~~ по т. синусов. Пусть x - основание.

~~по т~~ Тогда: $\frac{x}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow x = 2\cos\alpha \cdot a$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 2\alpha}{a + \cos\alpha\, a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 2 \cdot \frac{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha$$

заметим, что при $\alpha \in [30°; 60°]$, $\cos\alpha \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\cos\alpha = x$

$\frac{r}{R} = f(x) = 2x - 2x^2$, где $x \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\max f(x)$ достигается в вершине, т.е. при $x = \frac{1}{2}$ $f(x) = \frac{1}{2}$

$\min f(x)$ достигается при $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $f(x) = \sqrt{3} - 1{,}5$ (т.к. $f(x)$ - кв-ный трехчлен с отрицат. старшим коэф)

Тогда $\max S_M = \frac{1}{4}$, $\min S_M = (\sqrt{3} - 1{,}5)^2$

Ответ: $\frac{1}{4}$; $(\sqrt{3} - 1{,}5)^2$

Задача 6. Чистовик

$\triangle ABD = \triangle CDB$ по трем сторонам

$\triangle ACD = \triangle CAB$ по трем сторонам. $\Rightarrow \angle CAD = \angle ACB$

$\angle ABC = \angle ADC$

$\angle ABC = 180 - \angle BAC - \angle BCA = 180 - \angle BAC - \angle CAD = \angle BAD$ по условию

$\angle ABC = \angle ADC = \angle BAD$

~~$S = ab$ $AB = a$, $AD = b$~~

$S = \frac{1}{2}$. Значит, $\triangle BAD = \triangle ABC = \triangle CDA = \triangle DCB$ по углу и двум прилегающим сторонам.

тогда их ~~три~~ площади равны и общая ~~три~~ площадь 45.

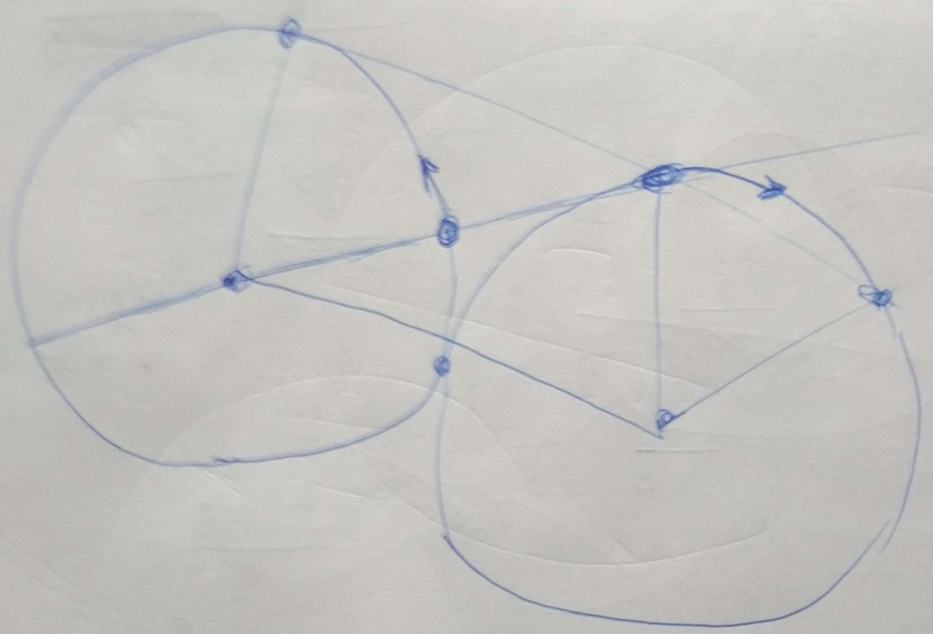
Ответ: 45.

Задача 7. Чистовик

$$(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021}=\underbrace{(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})\dots(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})}_{2021}$$

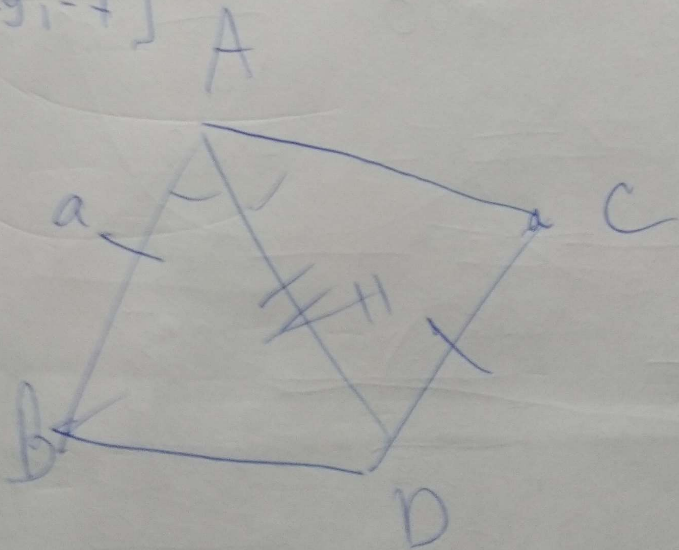
Заметим, что каждый одночлен равен произведению по одному множителю из каждой скобки.
Т.е. имеет вид: $\sqrt{5}^{\alpha}\cdot\sqrt{7}^{\beta}\cdot\sqrt{11}^{\gamma}$, где $\alpha+\beta+\gamma=2021$. и
$\alpha,\beta,\gamma\in N,0$

Т.к. $\alpha+\beta+\gamma$ - нечётное число, то либо одно из α,β,γ нечётное, либо все нечётные.
если одно нечётное БОО ~~это~~ это α, то $\beta=2a$, $\gamma=2b$
тогда одночлен равен: $\sqrt{5}\cdot5^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot7^{a}\cdot11^{b}$
если сложить все одночлены такого вида получится как раз $n\sqrt{5}$.
аналогично $m\sqrt{7}$ и $k\sqrt{11}$. - заметим, что $k,m,n\in N$ - ч.т.д.
если все нечётные, то одночлен равен:
$5^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot7^{\frac{\beta-1}{2}}\cdot11^{\frac{\gamma-1}{2}}\cdot\sqrt{5\cdot11\cdot7}$. если сложить все такие одночлены, то получится как раз ~~$l\sqrt{5}$~~ $l\sqrt{5\cdot7\cdot11}$, где $l\in N$ - ч.т.д.



y`отр

$y \in [-9; -7]$



$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(12)$

$\sqrt{x^2+y}$

14
30
55
91

$a, a+1$

8 9

24 33

$$\begin{array}{r} 6084 \\ \times\ 4 \\ \hline 24336 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24336 \\ -\ 3900 \\ \hline 20400 \end{array}$$

150 140

$6 \cdot 650$

$$\begin{array}{r} 650 \\ \times\ 6 \\ \hline 3900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 78 \\ \times\ 4 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$

204
285

20712
20796

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 7 \\ \hline 343 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 385 \\ +\ 121 \\ \hline 506 \end{array}$$

343

$64 \times 8 = 512$

650

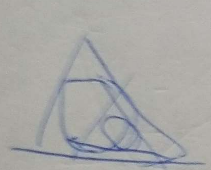
$$\begin{array}{r} 24336 \\ -\ 3900 \\ \hline 20436 \\ +\ 123 \\ \hline 20748 \\ +\ 84 \\ \hline 20832 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

729

1000

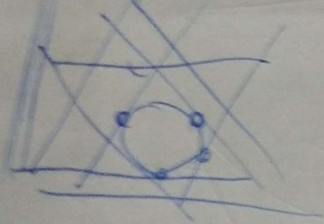
$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$



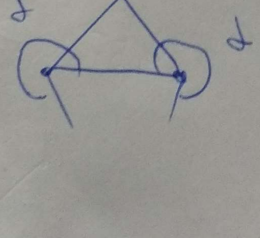
$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

5300+
34
5643

$$\begin{array}{r} 1728 \\ +\ 1331 \\ \hline 3059 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 5859 \\ +\ 125 \\ \hline 5984 \\ +\ 64 \\ \hline 6048 \\ 27 \\ \hline 6075 \end{array}$$

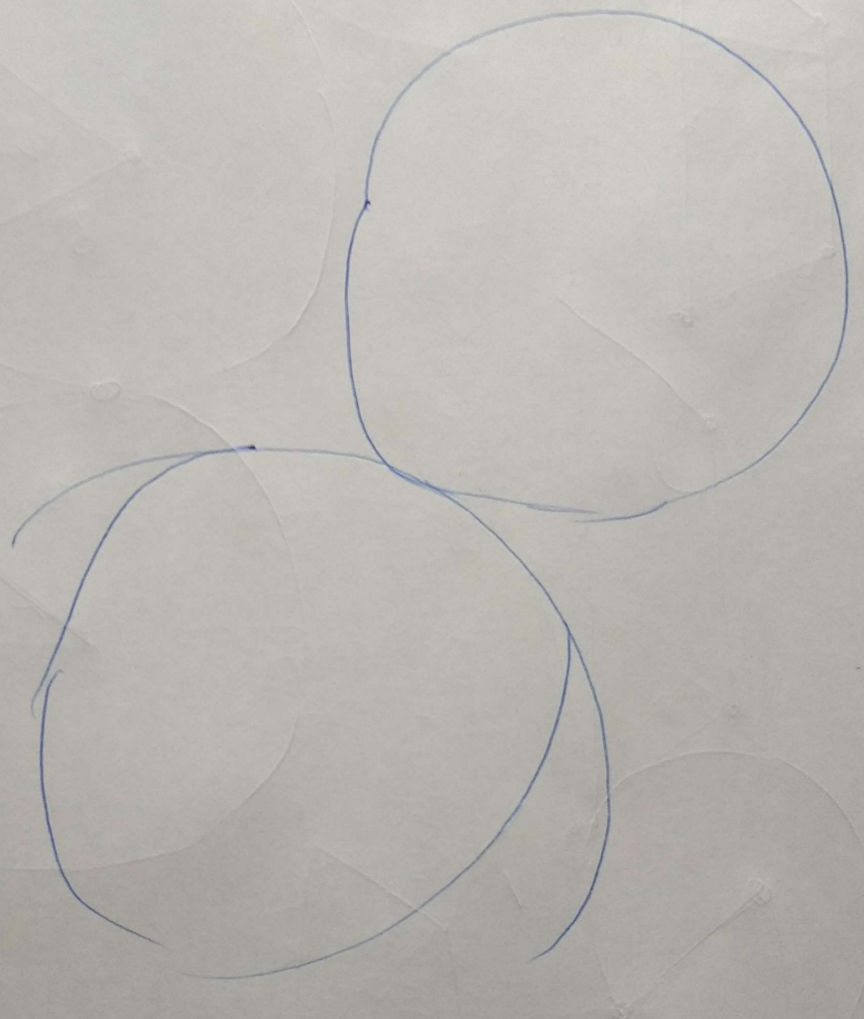


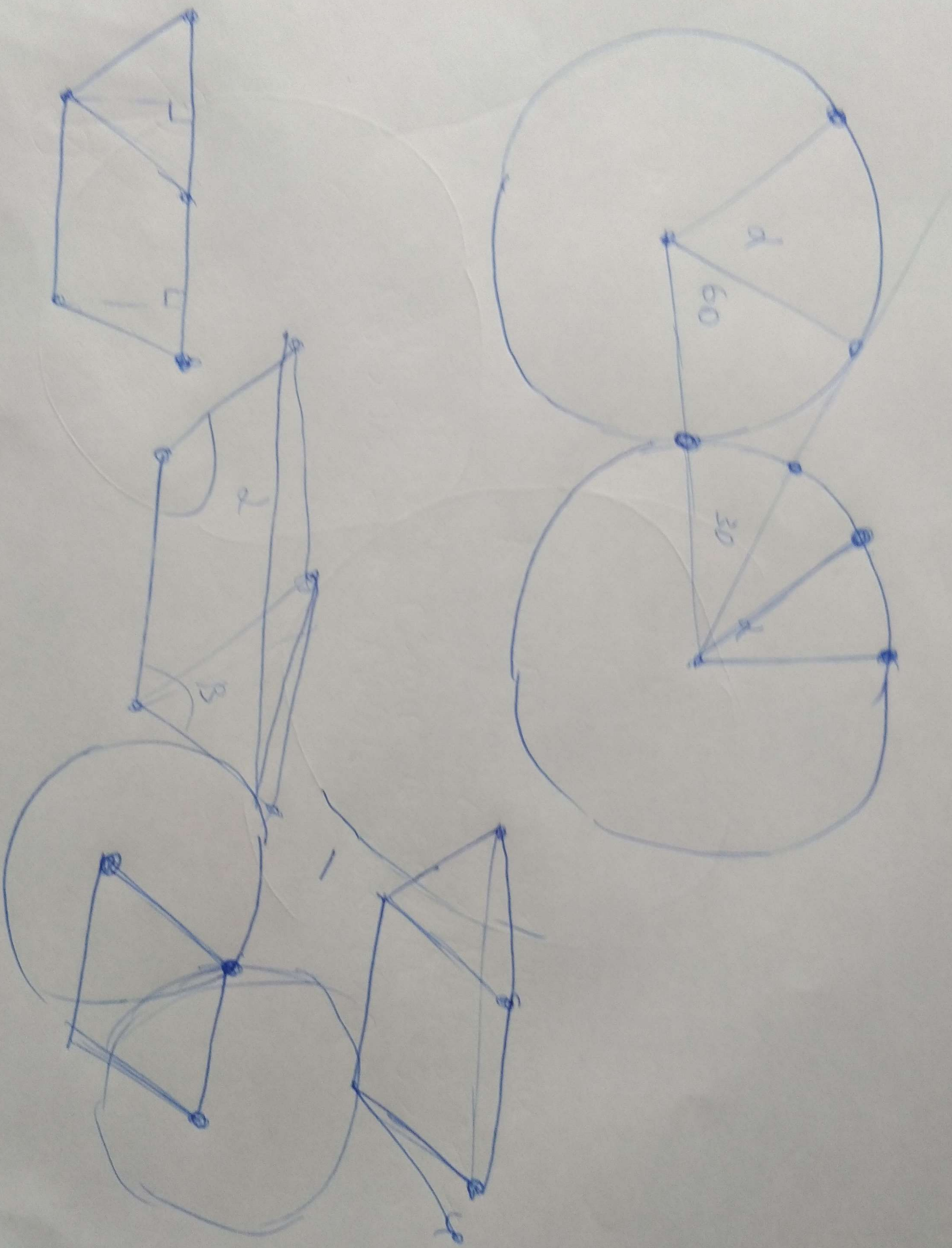
$$\begin{array}{r} 4059 \\ +\ 729 \\ \hline 4788 \\ +\ 512 \\ \hline 5300 \end{array}$$

6083
6084

$630 - 180 = 450$

225





60
30
α
β

$\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)^{2021}$ чернова

$m\sqrt{7}$

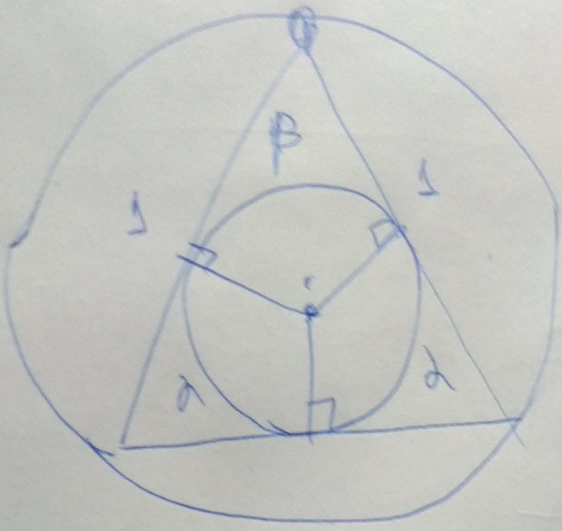
$k\sqrt{11}$

$\sqrt{\frac{11}{7}}\,\frac{k}{m} < 1 + 10^{-500}$

$(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})\ldots(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})$

$\sqrt{7}$

черновик



$\frac{1}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{\sin\alpha}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin2\alpha} = \cancel{\cos\alpha}$

$\frac{1}{2\sin\alpha}$

$\frac{1}{2\cos\alpha}$

$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{x}{2\cos\alpha\sin\alpha}$

$x = 2\cos\alpha$

$r = \frac{\frac{\sin2\alpha}{2}}{1+\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$= 2\sin\alpha^2\cdot\cos\alpha$

$2(1-\cos^2\alpha)(\cos\alpha)$

$\frac{1}{2\sin\alpha}$

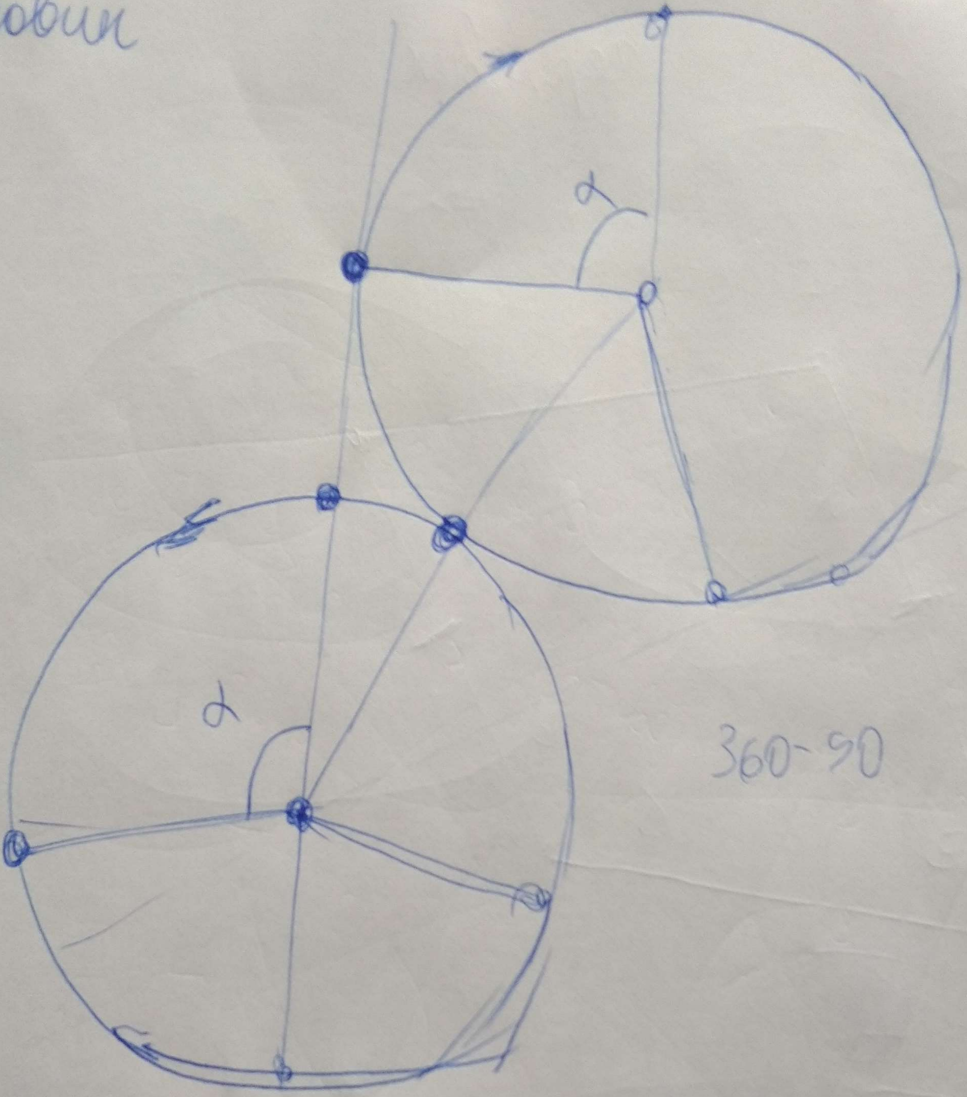
$\frac{x}{\sin2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$

$x = 2\cos\alpha$

$r = \frac{\sin2\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$

$\frac{\sin\alpha\cdot\sin2\alpha}{1+\cos\alpha}$ (2sin)

Черновик

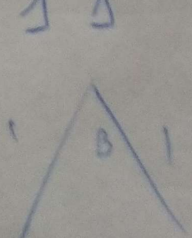


360-90

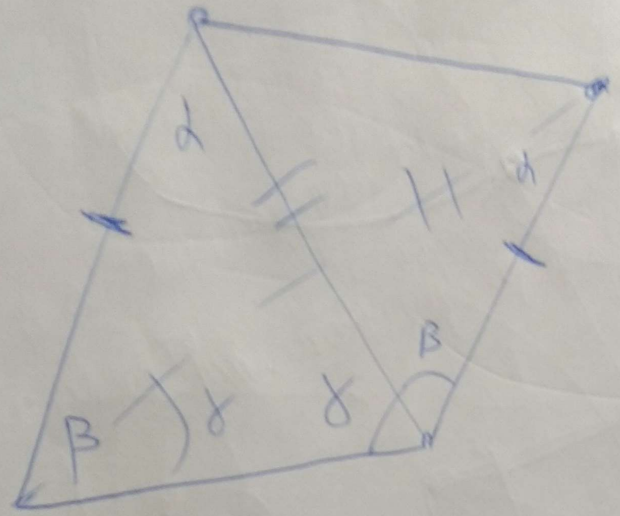
$\frac{r}{R}$ $\quad \cancel{\frac{S}{R}}$ $\quad \frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{4S}}$ $\quad \frac{a \sin \beta}{\frac{(1+1+a)}{2} \cdot a}$

$\frac{k}{4}$ $\quad 1 \quad 1 \quad \alpha$

$\frac{4abc}{4S}$



черновик



$\sqrt{\frac{11}{7}}$

$\sqrt{\frac{11}{7}}$ $\frac{k}{n}$

k при $\sqrt{11}$ $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021}$

n при $\sqrt{7}$

$\sqrt{7}$

$(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})(\cdots(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})$

2021.