



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Лунев Максим Александрович**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	15	0	15

числовик

$$2. x = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-2021}$$

заметьте, что x — сумма геом. прогрессии, где $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$;
 $\Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^{2021})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^{2021}$ $((\frac{1}{2})^{2021} < 1) !!!$

$$\Rightarrow \sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2 - (\frac{1}{2})^{2020} + 2\sqrt{2 - (\frac{1}{2})^{2020} - 1}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}} + 1 - (\frac{1}{2})^{2020}}$$

$$= \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} = 1 + \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}}$$

$$\text{||} \cdot \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}} + 1 - (\frac{1}{2})^{2020}}$$

$$= 1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}} = 1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}} + \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}} + 1 = 2$$

\Rightarrow Ответ: 2

①

ответ

$$1. f(x) = x^2 + 18x + 72$$

$$x^2 + 18x + 72 = (x+9)^2 - 9$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+9)^2 - 9$$

$$\Rightarrow f(f(x)) = ((x+9)^2 - 9 + 9)^2 - 9$$

$$\Rightarrow f(f(f(x))) = (((x+9)^2 - 9 + 9)^2 - 9 + 9)^2 - 9 = (x+9)^8 - 9$$

$$\Rightarrow f(f(f(f(x)))) = ((x+9)^8 - 9 + 9)^2 - 9 = (x+9)^{16} - 9$$

$$\Rightarrow (x+9)^{16} - 9 = 0$$

$$(x+9)^{16} = 9$$

$$\Rightarrow x+9 = \pm \sqrt[16]{9}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[8]{3} - 9$$

ответ: $\pm \sqrt[8]{3} - 9$

$$3. P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

$$\begin{cases} P(-1) = 9 \\ P(1) = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + A - B + C - D + E = 9 \\ 1 + A + B + C + D + E = 21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - B + C + E - D = 10 \\ A + B + C + D + E = 20 \end{cases}$$

$$\hline 2A + 2C + 2E = 30 \Rightarrow A + C + E = 15$$

$$\Rightarrow B + D = 20 - A - C - E = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C + E = 15 \\ B + D = 5 \end{cases}$$

переберем комбинации B и D:

1	4	
2	3	
3	2	
4	1	
сумм.		4 комбинации

(2)

Читовик

продолжение 3.

меньше переберем комбинации A, C, E:

~~м.к.~~ $\{A, B, C, D, E\} > 0$
 $\{A, B, C, D, E\} \in \mathbb{Z}$, но ~~м.к.~~ $A, C, E < 15 - 2 = 13$

- $\Rightarrow A=13$ 1;1 - 1 вар.
- $A=12$ 1;2, 2;1 - 2 вар.
- $A=11$ 1;3, 2;2, 3;1 - 3 вар.
- $A=10$ 4
- $A=9$ 5
- $A=8$ 6
- $A=7$ 7
- $A=6$ 8
- $A=5$ 9
- $A=4$ 10
- $A=3$ 11
- $A=2$ 12
- $A=1$ 1;13, 2;12, 3;11, ..., 13;1 - 13 вар.

$1+4=5$ 2 3 3 2 4 1 <hr/> 4	$4+5=6$ 2 4 3 3 4 2 5 1 <hr/> 5	$1+6=7$ 2 5 3 4 4 3 5 2 6 1 <hr/> 6	$1+7=8$ 2 6 3 5 4 4 5 3 6 2 7 1 <hr/> 7
$1+8=9$ 2 7 3 6 4 5 5 4 6 3 7 2 8 1 <hr/> 8	$4+9=10$ 2 8 3 7 4 6 5 5 6 4 7 3 8 2 9 1 <hr/> 9	$1+10=11$ 2 9 3 8 4 7 5 6 6 5 7 4 8 3 9 2 10 1 <hr/> 10	$1+11=12$ 2 10 3 9 4 8 5 7 6 6 7 5 8 4 9 3 10 2 11 1 <hr/> 11
			$1+12=13$ 2 11 3 10 4 9 5 8 6 7 7 6 8 5 9 4 10 3 11 2 12 1 <hr/> 12

\Rightarrow суммарно $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13 = 91$ вариантов A, C, E

$\Rightarrow 91 \cdot 4$ вариантов подобрать все 5 инструментов.

$91 \cdot 4 = 364$

Ответ: 364

числовик

$K = 2022$ - количество красных
 $Z = 2024$ - количество зеленых

Таня первой

Заметим, что ~~если~~ любая позиция игры при некоторой ~~в обеих руках камней~~ камнями обеих цветов нечетное количество, ~~то такая позиция для~~ является проигрышной для попавшего в нее игрока, так как тогда суммарное количество камней ~~в игре~~ четно, а ~~он~~ удалить он может только нечетное (т.к. $K \div 2$ и $Z \div 2$). Удаляя нечетное количество в такой ситуации получаем разные четности у количеств камней разных цветов \Rightarrow второму игроку достаточно удалить 1 камень, чтобы вернуть игру в ту же позицию (либо же выиграть).

~~И~~ стартовая позиция $(2022; 2024)$ дает Тане K -четное и Z -четное \Rightarrow у нее 2 варианта:

① удалить нечетное кол.

\Rightarrow ~~получаем~~ получаем разные четности и Келля может следующим ходом отнять 1, делая $K \div 2$, $Z \div 2$.
 \Rightarrow проигрышной ход для Тани.

② удалить четное кол.

\Rightarrow тогда четность K и Z сохраняется и у Келли те же 2 варианта хода, что были у Тани.

Таким образом, тот кто первым отнимет нечетное количество проигрывает.

\Rightarrow рассмотрим, что будет, если оба игрока будут поочередно отнимать четное количество:

④

Читовик.

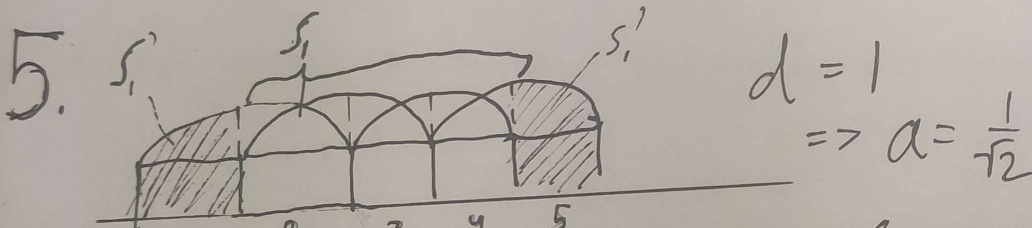
продолжение 7.

$\Rightarrow K_1 = \frac{K}{2}$ $Z_1 = \frac{Z}{2}$, где K_1 и Z_1 - количество пар ^(каждого) одного цвета

$K_1 = 1011$ $Z_1 = 1012$

\Rightarrow Если Таня первым ходом отнимет ~~два~~ 2 зеленых камня, то Кеша попадает в аналогично проигранную ситуацию, только теперь с парами камней, Тане достаточно ~~еще~~ отнимать по 2 камня, чтобы $K_1 \setminus 2$ и $Z_1 \setminus 2$, а если Кеша отнимет нечетное ~~и~~ количество, действовать как было описано ранее.

\Rightarrow Ответ: Таня



найдем для начала стороны квадратов:

сторона первого $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

сторона второго $b = \frac{p}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = K = 2\sqrt{2}$

Заметим, что получившийся узел можно разбить на определенное количество ~~и~~ частей, как показано на рисунке (две по бокам будут зеркальными друг другу, а те, что между ними все одинаковы).

причем в первом случае их будет $4+1=5$, а во втором.

$25+1=26$, "центральных" кусочков будет $5-2=3$ и $26-2=24$

т.к. в речь идет о площади, то значения будут соответствия как квадрат координатного поля

квадратов K ; $K^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

⑤

Читовик

продолжение 5.

\Rightarrow заметим, что на первой стене \mathcal{Z} "центральных" отверстий, а на второй стене их $2\mathcal{Z} \Rightarrow$ если суммарная площадь их на первой стене равна S_1 , а на второй S_2 , то

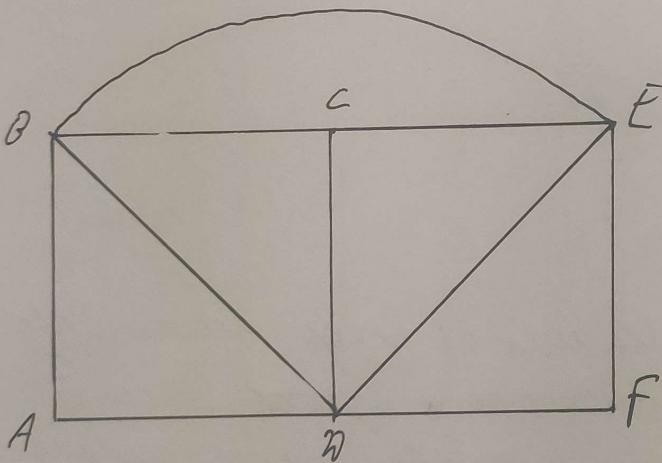
$$\frac{S_2}{2\mathcal{Z}} = \frac{S_1}{\mathcal{Z}} \cdot K^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{2\mathcal{Z}} = \frac{S_1}{\mathcal{Z}} \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow S_1 = S_2$$

\Rightarrow разность суммарной площади отверстий будет являться разность $2S_1' - 2S_2'$ площадей боковых частей

найдем $2S_1'$ и $2S_2'$:

оставим две боковые части любого из отверстий и получаем такую фигуру:



$$\begin{cases} \angle BDC = 45^\circ \\ \angle CDE = 45^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle BDE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\text{hole}} = \frac{\pi \cdot DE^2}{4} - S_{BDE} = \frac{\pi \cdot DE^2}{4} - \frac{2 \cdot DE^2}{4}$$

$$\Rightarrow \text{для первого } DE = a\sqrt{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2S_1' = \frac{\pi-2}{4} + 2a^2 = \frac{\pi-2}{4} + 1$$

$$\text{для второго } DE = b\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow 2S_2' = \frac{\pi-2}{32} + 2b^2 = \frac{\pi-2}{32} + \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 2S_1' - 2S_2' = \frac{7\pi}{32} + \frac{1}{2}$$

$$\text{ответ: } \frac{7\pi}{32} + \frac{1}{2}$$

6

число букв.

4. язык R - регулярный язык

X - язык без повторений

Y - язык без вложенных повторений

$$\Rightarrow \text{~~число букв~~ } Y = \frac{2\bar{n}R}{32} = \frac{\bar{n}R}{16}$$

$$\frac{2\bar{n}R}{64} < X < \frac{2\bar{n}R}{55} \Rightarrow \frac{\bar{n}R}{32} < X < \frac{2\bar{n}R}{55}$$

неравен

$$x^2 + 18x + 72 = -6$$

$$78 = 0$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ 18 \\ 144 \\ 180 \\ 324 \end{array}$$

~~$$(x+13)(x+6)$$~~

1) $f(f(f(f(x)))) = 0$

$$((x+6)(x+12)+6)((x+6)(x+12)+12)$$

$$\begin{cases} f(f(f(x))) = -6 \\ f(f(f(x))) = -12 \\ \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(f(x)) = \sqrt{3}-9 \\ f(f(x)) = -9-\sqrt{3} \\ \emptyset \end{cases}$$

$$3(1-2^4)$$

$$D = 12 = 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}-18}{2} = \sqrt{3}-9$$

$$x = \frac{-2\sqrt{3}+18}{2} = -9-\sqrt{3}$$

$$3 \quad 6 \quad 12 \quad 24$$

$$9 \quad 36$$

$$45$$

$$f(f(x)) = \sqrt{3}-9$$

$$x^2 + 18x + 72 = \sqrt{3}-9$$

$$3(1-16)$$

$$x^2 + 18x + 72 = -9-\sqrt{3}$$

$$81$$

$$4$$

$$\emptyset - 324$$

$$x^2 + 18x + 81 - \sqrt{3} = 0$$

$$D = 324 - 324 + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

2) $2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-2021} \Rightarrow f(x) = \frac{-18 - 2^4\sqrt{3}}{2} = -9 - \sqrt[4]{3}$

$$S_1 = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^{2021})}{1 - \frac{1}{2}} \quad f(x) = \frac{-18 + 2^4\sqrt{3}}{2} = -9 + \sqrt[4]{3}$$

$$x^2 + 18x + 72 = -9 - \sqrt[4]{3} \quad \emptyset$$

$$x^2 + 18x + 72 = \sqrt[4]{3} - 9$$

$$2 - (\frac{1}{2})^{2020} + 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}} \quad x^2 + 18x + 81 - \sqrt[4]{3} = 0$$

$$D = 324 - 324 + 4\sqrt[4]{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-18 + 2^4\sqrt[4]{3}}{2} = -9 + \sqrt[8]{3}$$

$$x = -9 - \sqrt[8]{3}$$

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}} + 1 - (\frac{1}{2})^{2020}}$$

$$= \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}} + \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{2020}}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ 144 \\ 180 \\ 324 \end{array}$$

$$x^2 + 18x + 72 = (x+9)^2 - 9 \text{ "зрмовник"}$$

$$(x+9)^2 - 9 + 9 = (x+9)^2 - 9 + 9$$

$$(((x+9)^2 - 9 + 9)^2 - 9 + 9)^2 - 9 + 9$$

$$3. P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E(x+9)^{16} - 9 = 0$$

$$+E(x+9)^{16} = 9$$

$A, B, C, D, E \in \mathbb{Z}; > 0$

$$P(-1) = 9$$

$$P(1) = 21$$

$$\Rightarrow x+9 = \pm \sqrt[16]{9}$$

$$x = \pm \sqrt[16]{9} - 9$$

$$x = \pm \sqrt[8]{3} - 9$$

$$-1 + A - B + C - D + E = 9$$

$$1 + A + B + C + D + E = 21$$

$$A - B + C - D + E = 10$$

$$A + B + C + D + E = 20$$

$$2A + 2C + 2E = 30$$

$$\begin{cases} A + C + E = 15 \\ 3B + 3D = A + C + E \end{cases}$$

$$\Rightarrow B + D = 5$$

$$A + C + E = 15$$

$$A + C + E = 15$$

$$2A - 2B + 2C - 2D + 2E = A + B + C + D + E$$

$$A - 3B + C - 3D + E = 0$$

$$A + C + E = 3B + 3D$$

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$

(4)

$$\begin{array}{r} 13 \\ 12 \\ 11 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{array} \begin{array}{l} \frac{(11-2)(\frac{1}{8})}{4} \\ \frac{11-2}{32} \\ \frac{1}{91} \\ \frac{13}{91} \end{array}$$

$$91 \cdot 4 = 364$$

$$\frac{11-2}{4}$$

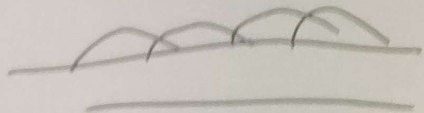
2

черновик

2022 апр
2024 зел.

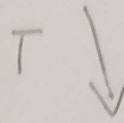
Треть.

2022
2 10 11
3



-K
-Z

Z:K
K:Z



$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

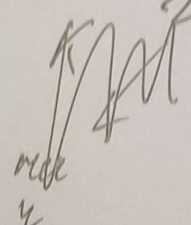
$$a_1 = \frac{1}{4}$$

$$K = 2\sqrt{2}$$

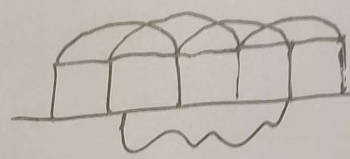
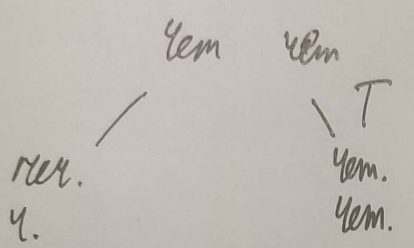
$$\Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = 8$$

2021 неч
2022 ч.

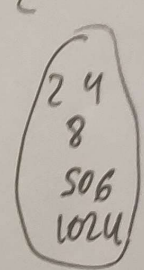
0 - ~~высота~~
1 - ~~высота~~
вот.



↓ K
неч.
неч.



2024
2 1024
2 506
2 253

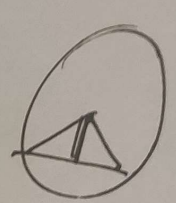
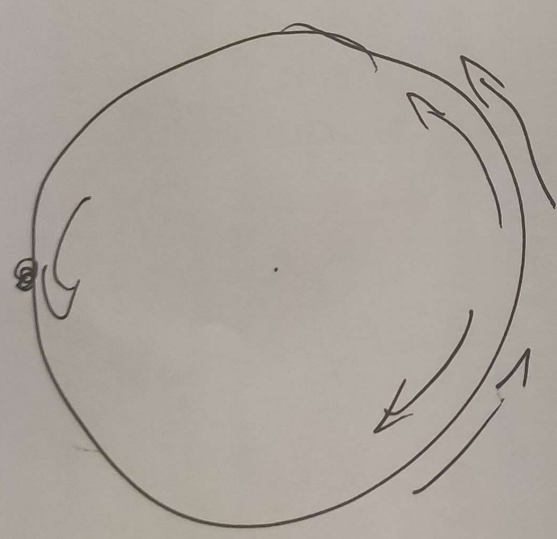


1011 1012

1011 1012

$$T_m = 32$$

$$55 < T_B < 64$$



$$2 \cdot r \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$2r \sin \frac{\alpha}{2} = 4072$$

~~3~~

черновики

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{4} - \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$
$$-\frac{\sqrt{11}}{32} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{7\sqrt{11}}{32} - \frac{15}{16} + \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{4} - \frac{1}{2} + 1$$
$$\frac{7\sqrt{11}}{32}$$

$$-\frac{\sqrt{11}}{32} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8}$$
$$\frac{17}{16} - \frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{16} - \frac{8}{16} - \frac{2}{16} - \frac{9}{16}$$

4