МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Матюшевский Арсений Витальевич**

Класс: **11**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	5	5	15	0

Черновик 9 В.210204

2020, 2022

2022 − 43 = 2000 − 21 = 1979

1979, 2021

1010, 2022

2019 | 3
673

2019, 2021

3 · 673

1) 2019, 3

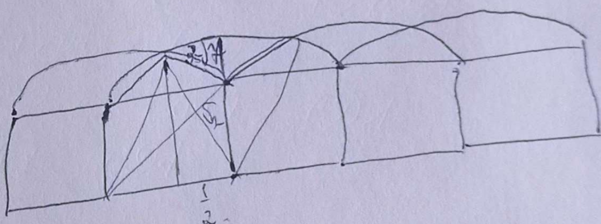
2021 − x, x · n = 2022

2) 2021 − x, x · n − 2021 + x = 1 + x

1010, 2022

101 · 5 · 2 2 · 3 · 337

q_3 q_2 q_1, p_1 p_2 p_3



$3-\sqrt{7} = 2+2-8\cos\angle$

$\frac{1+\sqrt{7}}{8} = \cos\angle$

$\sqrt{2} = \frac{1}{2}$

$2-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{7}}{4}-1\right)^2+\frac{1}{4} = \frac{7}{16}+1-\sqrt{7}+\frac{1}{4} = 3-\sqrt{7}$

$\cancel{\frac{3-\sqrt{7}}{\sin\angle}} =$

$3-\sqrt{7} = 2+1-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos\angle$

$4\cos\angle = \sqrt{7}$

$\cos\angle = \frac{\sqrt{7}}{4}$

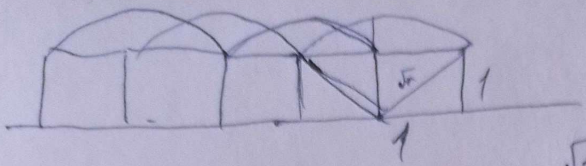
$\frac{\sqrt{7}}{16} - \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\sin = \frac{\sqrt{16-7}}{4} = \frac{3}{4}$

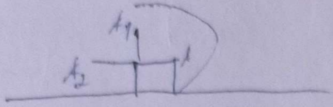
$\frac{7}{16} - \frac{\sqrt{7}}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{27}{16} - \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{27-8\sqrt{}}{16}$

$S_{тр}$

Черновик 8 B210204

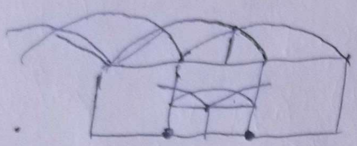


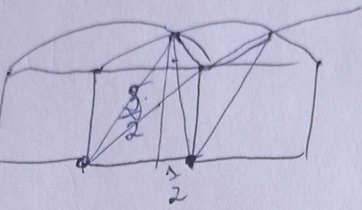
$\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$



$\frac{4a}{2} = 1$

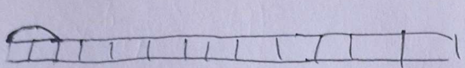
$a = \frac{1}{2}$





$2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$



$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2022 = 2 \cdot 1011 = 2 \cdot 3 \cdot$

$1011 / 3$
337

$2021 = 43 \cdot 47$

$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$

$\sin = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}$

сектор + сектор − x

208

$c + c - x + c - x$

$1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$

505

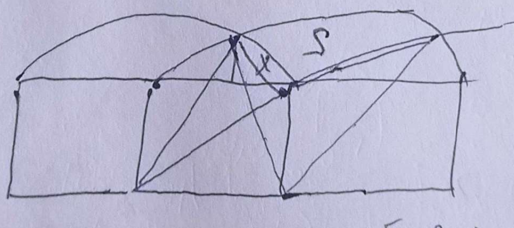
$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

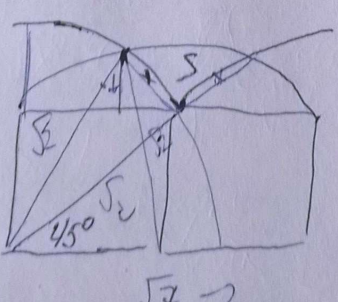
$12c - 11x$

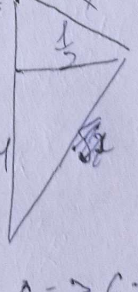
$4c - 3 \cdot 4x =$

$2 \cdot 5 \cdot 101$, $2 \cdot 3 \cdot 337$

$2021 - d_1$







$2 = \frac{1}{4} + c \Rightarrow c = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$

$t = \frac{\sqrt{7}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{7} - 2}{2}$

$x^2 = \frac{1}{4} + \frac{7 + 2 - 4\sqrt{7}}{4} = \frac{10 - 4\sqrt{7}}{4} = \frac{5 - 2\sqrt{7}}{2}$

$\frac{5 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 + 2 - 2 \cdot \cos\alpha$

$5 - 2\sqrt{7} = 8 - 4\cos\alpha$

$4\cos\alpha = 3 + 2\sqrt{7}$

$\cos\alpha = \frac{3 + 2\sqrt{7}}{4}$

Черновик 7 В 210204

3. $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$P(-1) = 11 \qquad P(1) = 21$

$-1 + A - B + C - D + E = 11$

$1 + A + B + C + D + E = 21$

$2 + 2B + 2D = 10$

$1 + B + D = 5$

$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 3 + 1$ — 3 варианта B и D

$A + C + E = 16$

$16 = 1 + 1 + 14 = 1 + 2 + 13 = 1 + 3 + 12 = 1 + 4 + 11 = 1 + 5 + 10 = 1 + 6 + 9 = 1 + 7 + 8 = 1 + 8$

$A = 1, \quad C, D = 14$
$A = 2 \quad C, D;\ 13$
$A = 3 \quad 12$
$A = 4 \quad 11$
$A = 5 \quad 10$
6 9
7 8
8 ~~7~~
9 6
10 5
11 4
12 3
13 2
14 1

2021

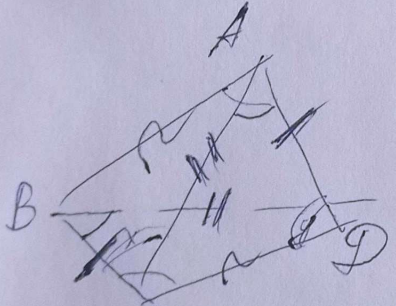
$\frac{1+14}{2} \cdot 14 = 7 \cdot 15 = 70 + 35 = 105$

$105 \cdot 3 = 315$

$ABC = ABD \quad S_{ABD} + S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ПОВ} = \frac{1}{2} S$

$BCD = ADC$

6.



$\angle BAC + \angle \underline{CAD} + \angle BAD = \angle ABD + \angle DBC + \angle CBA$

$\angle BCD + \angle \underline{ACD} + \angle BCA = \angle BDA + \angle BDC + \angle \underline{CDA}$

CDA, CAD, DCA

$\angle \underline{BAC} + \angle \underline{BAD} + \angle \underline{BCD} + \angle CAD + \angle ACD + \angle \underline{BCA} =$

$\angle BAC + \angle CAD + \angle BAD + \angle BDA + \angle BDC + \angle CDA = \angle \underline{ABD} + \angle \underline{DBC} + \angle \underline{CBA} + \angle \underline{BDA} + \angle \underline{BDC} + \angle CDA$

$= \angle ABD + \angle DBC + \angle CBA$

$+ \angle BCD + \angle ACD + \angle BCA$

AH-HO

$180 - \angle CBA + 180 - \angle CDA + \angle BAD + \angle BCD =$

$= 180 - \angle BAD + 180 - \angle BCD + \angle CBA + \angle CDA$

$\underline{\underbrace{\angle BAD + \angle BCD}_{BD} = \underbrace{\angle CBA + \angle CDA}_{AC}}$

$\underset{BC}{\angle BAC} + \angle BDC = \underset{AD}{\angle ACD} + \angle DBA$

$\angle BAC + \underbrace{\angle \underline{BDC}}_{180 - \angle DBC} + \angle BAD + \angle \underline{BCD} = \angle CBA + \angle CDA + \angle ACD + \angle DBA$

$\angle BAC + \angle CBA + \angle CDA + \angle BDC = \angle BAD + \angle DBA + \angle BCD + \angle ACD$

$180 - \angle BCA + \angle CDA + \angle BDC = 180 - \angle ADB + \angle BCD + \angle ACD$

$+ \angle ADB \qquad + \angle BCA$

Черновик 6 В 210204

$\vec{\vartheta_1}$

$2\pi R$

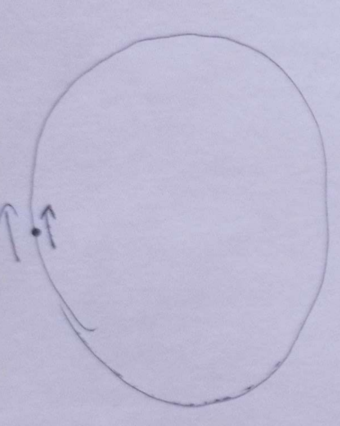
ϑ_1, ϑ_2

ϑ_1 - мотоцикл

ϑ_2 - велосипед

$\vartheta_1 = \frac{2\pi R}{38 (\text{мин})}$

$\frac{2\pi R}{76} \le \vartheta_2 \le \frac{2\pi R}{64 \text{мин}}$



$\cancel{\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{4028 м}{t_1}}$

$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{4028 м}{t_2}$

$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{2\pi R}{t_1}$

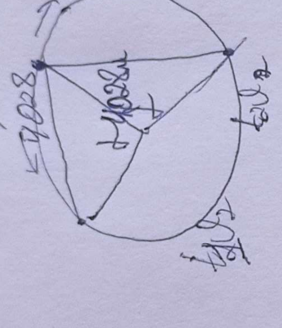
$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{}{t_2}$

$S_1 \; 2\pi R + S$

$S < 2\pi R$

$\begin{cases} t_1\vartheta_2 = 2\pi R - t_2\vartheta_2 \\ (t_2 - 38)\vartheta_1 = t_1\vartheta_1 \\ t_1\vartheta_1 \end{cases}$

$t_1\vartheta_1 =$

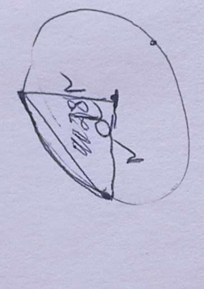


4028

$t_1\vartheta_1$

$t_2\vartheta_2$

$t_1(\vartheta_1 + \vartheta_2) = 2\pi R$



$t_2\vartheta_2 = \frac{2\pi R}{\cancel{t_1}} + \cancel{\frac{t_2\vartheta_2}{t_2 - 38}} \; \vartheta_1 \cdot (t_2 - 38)$

$(t_2\vartheta_2 - 38)(t_2 - 38) = t_2\vartheta_2$

$\vec{\vartheta_1}$ $\overleftarrow{\vartheta_2}$

$2\pi R$ $2\pi R - x$

$\frac{2\pi R + 2\pi R - x}{t_2} = \vartheta_1 - \vartheta_2$

$t_1\vartheta_2 + t_2\vartheta_2 =$

$t_1\vartheta_1 = t_2\vartheta_2$

$\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$

$4028^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos\alpha$

$\left(\frac{4028}{r}\right)^2 = 2 - 2\cos\alpha$

$t_2 = 38 + \frac{t_2\vartheta_2}{\vartheta_1}$

$t_2\vartheta_2 = 2\pi R + \vartheta_1 t_2 - \vartheta_1 \cdot 38$

$t_2\left(1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right) = 38$

$t_2\vartheta_2 = 2\pi R + \frac{2\pi R}{38} \cdot t_2 - 2\pi R$

$1 - \frac{38}{t_2} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$

$t_2\vartheta_2 = \frac{2\pi R}{38} \cdot t_2$

$t_2 \cdot \frac{2\pi R}{38} - 2\pi R = t_1 \cdot \frac{2\pi R}{38}$

$\vartheta_2 = \frac{2\pi R}{38}$

$t_2 - 38 = t_1 \Rightarrow$

$t_2 - 38 = t_1$

$\Rightarrow$

$t_2\vartheta_2 - 38\vartheta_2 = 2\pi R - t_2\vartheta_2$

$2t_2\vartheta_2$

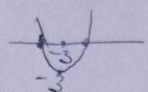
Черновик 5 Вариант 210204

1. $f(x)=x^2+6x+6$

$36-24=(2\sqrt{3})^2$

$\frac{-6}{2}=-3$

$9-18+6=-3$



$f(f(f(f(f(x)))))=0$

$f(f(x))=(x^2+6x+6)^2+6(x^2+6x+6)+6$

$\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{2}=-3\pm\sqrt{3}$

$f(f(f(f(x))))=-3\pm\sqrt{3}$

$x^2+6x+6=-3-\sqrt{3}$

$x^2+6x+9+\sqrt{3}=0$

$36-36-4\sqrt{3}<0$

$x^2+6x+6=-3+\sqrt{3}$

$x^2+6x+9-\sqrt{3}=0$

$36-36+4\sqrt{3}=(2\sqrt{\sqrt{3}})^2$

$\frac{-6\pm2\sqrt[4]{3}}{2}=-3\pm\sqrt[4]{3}$

$f(f(f(x)))=-3\pm\sqrt[4]{3}$

Ан-но

$f(f(x))=-3\pm\sqrt[8]{3}$

$f(x)=-3\pm\sqrt[16]{3}$

1) $x^2+6x+6=-3-\sqrt[16]{3}$

нет корней

2) $x^2+6x+6=-3+\sqrt[16]{3}$

$x^2+6x+9-\sqrt[16]{3}=0$

$D=4\cdot\sqrt[16]{3}$

$x_1, x_2=\frac{-6\pm2\sqrt[32]{3}}{2}=-3\pm\sqrt[32]{3}$

2. $x=2^2+2^1+2^0+2^{-1}+\ldots+2^{-2021}$

$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=\sqrt{(\sqrt{x-4})^2+4+4\sqrt{x-4}}+\ldots=$

$=\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}=|\sqrt{x-4}+2|+|\sqrt{x-4}-2|$

$x=\frac{2^2\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2024}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{4\left(1-\frac{1}{2^{2024}}\right)}{\frac{1}{2}}=8\cdot\frac{2^{2024}-1}{2^{2024}}=\frac{2^{2024}-1}{2^{2021}}$

$\sqrt{\frac{2^{2024}-1}{2^{2021}}-4}>2$

$2^{2024}-1>2^{2023}$ – верно

$\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2=2\sqrt{x-4}=2\sqrt{\frac{2^{2024}-1-2^{2023}}{2^{2021}}}=2\sqrt{\frac{2^{2023}-1}{2^{2021}}}=\sqrt{\frac{2^{2023}-1}{2^{2019}}}=$

$=\frac{1}{2^{1009}}\cdot\sqrt{\frac{2^{2023}-1}{2}}$

Чистовик 4 Вариант 210204

4 продолжение

Также мы знаем, что

$t_1(\vartheta_1+\vartheta_2) = 2\pi R$

А тогда $t_1\vartheta_1 = t_2\vartheta_2$

$$(t_2-38)\frac{2\pi R}{38} = t_2\vartheta_2$$

$$\vartheta_2 = \frac{2\pi R}{38} - \frac{2\pi R}{t_2}$$

5. Пусть Аня первым ходом возьмет 2 камня из 2021

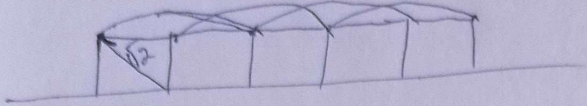
тогда осталось 2019, 2022

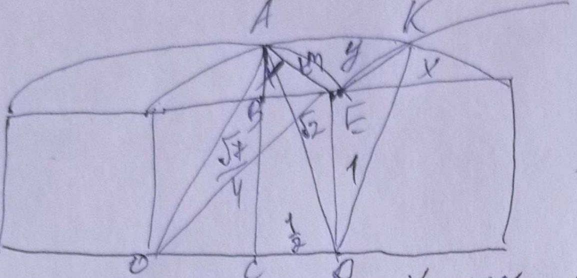
Тогда пусть она берет либо все камни из кучи, если это возможно, в ином случае берет столько же сколько и Петя. Такая стратегия поможет ей победить

Ответ: Аня обеспечит себе победу.

Чистовик 3 Вариант 210204

5. Квадратики рисуют следующую картину:





Найдя площадь фигуры X, мы сможем посчитать площадь картины. Найдем площадь y $AC = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{7}}{4} - 1 \Rightarrow AE = EK =$

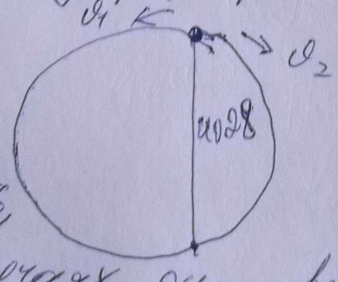
$DC = \frac{1}{2}$ (т.к. картинка симметрична)

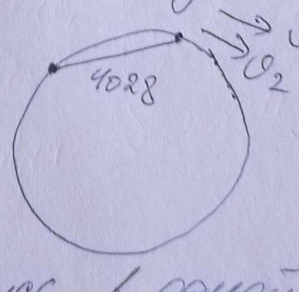
$= \frac{27 - 8\sqrt{7}}{16}$. Знаем $AE \Rightarrow$ Знаем площадь сегмента t, площадь $\triangle AED \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Знаем площадь y, а значит и площадь x $\left(\frac{S\text{ большого сегмента}}{2} - y\right)$. Тогда знаем площадь картины на обоих стенах и знаем разность площадей.

4. Обозначим ~~за~~ v_1 – скорость мотоцикла
v_2 – скорость велосипеда
$2\pi R$ – длина окружности, по которой они ездят.

Тогда $v_1 = \frac{2\pi R}{38\text{мин}}$ Тогда пока мотоцикл проедет два круга, велосипед не проедет даже одного, то есть,

$\frac{2\pi R}{76\text{мин}} < v_2 < \frac{2\pi R}{64\text{мин}}$. Если они едут в одном направлении и где-то встретились, в след. раз. при встрече велосипед не проехал полный круг





Если предположить, что в обоих случаях они встретились в одной точке, то некоторые дуги равны:

$$\begin{cases} t_1 v_2 = 2\pi R - t_2 v_2 \\ (t_2 - 38) v_1 = t_1 v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 v_2 = 2\pi R - t_2 v_2 \\ t_2 \cdot \frac{2\pi R}{38} - 2\pi R = t_1 \cdot \frac{2\pi R}{38} \Rightarrow t_2 - 38 = t_1 \end{cases}$$

Чистовик 2 Вариант 210204

3. $P(x)=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

$P(-1)=11 \quad P(1)=21$

$$\begin{cases} -1+A-B+C-D+E=11, & (2) \\ 1+A+B+C+D+E=21; & (1) \end{cases}$$

(1)-(2): $1+B+D=5$

$5=1+1+3=1+2+2=1+3+1$ – 3 варианта для B и D

$A+C+E=16$

$A=1 \quad 16=1+1+14=1+2+13=1+3+12=\ldots=1+14+1$ – 14 вариантов

$A=2$ – 13

$A=3$ – 12

⋮

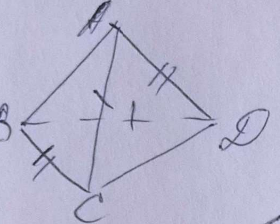
$A=14$ – 1

Итого вариантов для A, C, E: $\frac{1+14}{2}\cdot 14=105$

Всего вариантов $105\cdot 3=315$

Ответ: 315.

6.



$\angle BAC+\angle CAD+\angle BAD=\angle ABD+\angle DBC+\angle CBA$

$\angle BCD+\angle ACD+\angle BCA=\angle BDA+\angle BDC+\angle CDA$

① + ③ = ② + ④

$\angle BAC+\angle BAD+\ldots+\angle BCA=\angle ABD+\ldots+\angle CDA$

$180-\angle CBA+180-\angle CDA+\angle BAD+\angle BCD=$

$=180-\angle BAD+180-\angle BCD+\angle CBA+\angle CDA$

$\angle BAD+\angle BCD=\angle CBA+\angle CDA$

① + ④ = ② + ③

Ан-но получим

$\angle BAC+\angle BDC=\angle ACD+\angle DBA$

$\angle BAD$, $\angle BCD$ опир. на ребро BD; $\angle CBA$, $\angle CDA$ опир. на ребро CA =>

=> $BD=CA$, ан-но $BC=AD$ => $\triangle BCD=\triangle ADC$, $\triangle BCA=\triangle ADB$ } =>

=> $S_{пов}=2(S_{ADC}+S_{ADB})$ => $S_{ADC}+S_{ADB}=\frac{S}{2}$

Ответ: $\frac{S}{2}$.

Чистовик 1 Вариант 210204

1. $f(x)=x^2+6x+6$

$f(f(f(f(f(x)))))=0$

$f(f(f(f(x))))=t$

$f(t)=0$

$t^2+6t+6=0$

$t_{1,2}=-3\pm\sqrt{3}$

1) $f(f(f(f(x))))=-3-\sqrt{3}$

$f(f(f(x)))=c$

$c^2+6c+6+3+\sqrt{3}=0$

нет корней

2) $f(f(f(f(x))))=-3+\sqrt{3}$

$c^2+6c+6+3-\sqrt{3}=0$

$f(f(f(x)))=-3\pm\sqrt[4]{3}$

Аналогично получим

$f(f(x))=-3\pm\sqrt[8]{3}$

$f(x)=-3\pm\sqrt[16]{3}$

$x_{1,2}=-3\pm\sqrt[32]{3}$

Ответ: $-3\pm\sqrt[32]{3}$

2. $x=2^2+\ldots+2^{-2021}=\dfrac{4\left(1-\frac{1}{2^{2024}}\right)}{\frac{1}{2}}=8\cdot\dfrac{2^{2024}-1}{2^{2024}}=\dfrac{2^{2024}-1}{2^{2021}}<2^3=8$

отметим, что $x>4$

$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}=$

$=|\sqrt{x-4}+2|+|\sqrt{x-4}-2|=\sqrt{x-4}+2+|\sqrt{x-4}-2|=\Big|_{x<8}=\sqrt{x-4}+2-\sqrt{x-4}+2$

$=4$

Ответ: 4.