МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Микрюков Даниил Евгеньевич**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	0	15	5

Мерковик. 13

7.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021}$$

$$\parallel$$

$$n\sqrt{3}+m\sqrt{5}+k\sqrt{7}+l\sqrt{3\cdot5\cdot7}.$$

$$1-10^{-500}<\sqrt{35}\,\frac{l}{n}<1$$

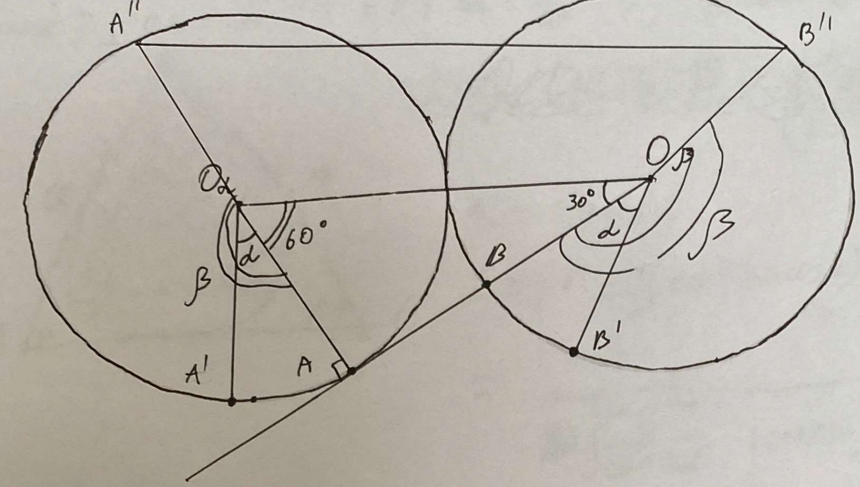
Пусть $a=\sqrt{3}$
$b=\sqrt{5}$
$c=\sqrt{7}$

$$(a+b+c)^{2021}=\underbrace{(a+b+c)(a+b+c)\cdots(a+b+c)}_{2021}$$

Слагаемые будут вида $a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{2021-\alpha-\beta}$ $\alpha,\beta\in\{0;1;2;\dots2021\}$

Чистовик.

4.



Т.к. $t_A = t_B = 1{,}5$ ч $\Rightarrow \frac{2\pi R}{v_A} = \frac{2\pi R}{v_B} \Rightarrow v_A = v_B = v \Rightarrow \omega_A \cdot R = \omega_B \cdot R \Rightarrow \omega_A = \omega_B = \omega$, где ω - угловая скорость $\Rightarrow$ за одинаковое время они описывают один угол и, следовательно, равные дуги и хорды.

$t = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} O_\alpha A \perp AB \\ O_\alpha O_\beta = 2R \\ O_\alpha A = R \\ O_\beta B = R \end{array}\right\} \Rightarrow$$ По Th. Пифагора: $(AB + BO_\beta)^2 + (AO_\alpha)^2 = O_\alpha O_\beta^2$, т.к. $O_\alpha A = \frac{1}{2} O_\alpha O_\beta$, $\angle O_\alpha O_\beta A = 30^\circ \Rightarrow \angle O_\beta O_\alpha A = 60^\circ$.

$(AB + R)^2 = 3R^2$

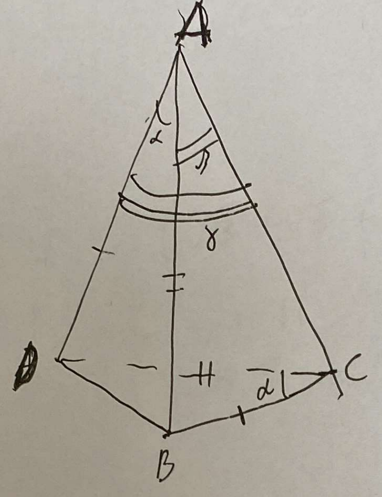
$AB = R(\sqrt{3} - 1)$

При $t = t$, автомобили отклонились на некоторый угол α и перешли в новое положение $A \to A'$, $B \to B'$, при это $A'A = B'B$. Итак, новое расстояние $A'B'$ станет равно диаметру, когда $O_\alpha A' \parallel O_\beta B' \Rightarrow 60 + 30 + 2\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. На такой угол они повернут через $\frac{45}{360} \cdot 1{,}5 = \frac{1}{8} \cdot 1{,}5 = \frac{3}{16}$ ч. Далее AB будет больше D до тех пор, пока оно снова не станет равным D, это произойдёт, когда ~~[illegible]~~ AO_α станет $\parallel BO_\beta$ во второй раз $\Rightarrow 360^\circ - (\beta + 60^\circ) + 360^\circ - (\beta + 30^\circ) = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = 450^\circ \Rightarrow \beta = 225^\circ \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ это остальные 135° они будут находится на расстоянии $\leq D \Rightarrow$ будет длиться $\frac{135}{360} \cdot 1{,}5 = \frac{3}{8} \cdot 1{,}5 = \frac{9}{16}$ ч. $\Rightarrow$ всего $\frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ ч $= 45$ минут

5

Ответ: 45 минут.

6.



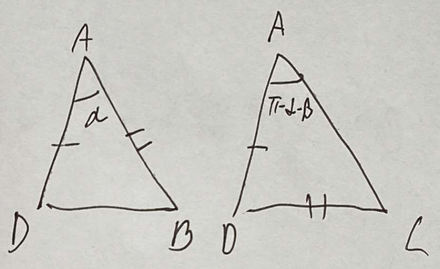
$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

S_{BCD} – ?

$S_{\text{пов}} = S$

$AB = CD$

$AD = BC$



$\triangle ABD = \triangle BCD$ (по 3 ст-м)

$\angle BDA = 180 - \angle ABD - \alpha =$

$= \beta+\gamma - \angle ABD$

$$\frac{BC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin ACB} = \frac{AC}{\sin ABC}$$

$$\frac{AB}{\sin ADB} = \frac{AD}{\sin ABD} = \frac{BC}{\sin ABD}$$

$$AB = \frac{\cancel{BC}\cdot\frac{\sin ACB}{\sin\beta}}{\sin ADB} = \frac{\cancel{BC}}{\sin ABD}$$

$$\frac{\frac{\sin ACB}{\sin\beta}}{} = \frac{\sin ADB}{\sin ABD}$$

Черновик

$1600-79=1521$

I

$\sqrt{x^2+4x+5}+|4x+5+3|=1$

$\sqrt{x^2+4x+5}+|4x+8|=1$, т.к. $x \le -3$, то $4x+8 \le -4<0$

$\sqrt{x^2+4x+5}=4x+9 \le -3\cdot4+9=-12+9=-3 \Rightarrow \varnothing$

$x=\frac{-4\cdot39\pm2\sqrt{666}}{63}$

$=\frac{-156\pm50..52}{63}$

$=\frac{-208...-104}{63}$

II.

$\sqrt{x^2+8x+17}+|8x+17+3|=1$

$\sqrt{x^2+8x+17}+|8x+20|=1$, т.к. $x \ge -3$, то

При $x\in[-3;-\frac{5}{2}]$

$\sqrt{x^2+8x+17}=8x+21$

$8x+21\in[-3;1]$

$x \ge -\frac{21}{8}$

$\sqrt{(x+4)^2+1}=8x+21$

$x^2+8x+17=64x^2-16\cdot21x+21^2$

$63x^2-x(16\cdot21+8)+21^2-17=0$

$D/4=(4\cdot43)^2-63\cdot(21^2-17)$

$4(4\cdot43^2-63\cdot(21^2-17)$

$441-17=424$

$4\cdot(4\cdot43^2-63\cdot424)=16(43^2-63\cdot106)$

$43\cdot43-63\cdot106$

$43<63$

$43<106$

$43^2<63\cdot106 \Rightarrow \varnothing$

$x_{1,2}=\frac{4\cdot43\pm2\sqrt{718}}{63}$

$\frac{4\cdot43\pm2\{26..27\}}{63}$

$\frac{172}{63}\pm\frac{52..54}{63}$

$2..3 \quad \frac{5}{6}..1$

$1..4 \; \varnothing$

при $x \ge -\frac{5}{2}$

$\sqrt{x^2+8x+17}=-8x-19$

$-8x-19\ge0$

$x^2+8x+17=64x^2+16\cdot19x+19^2$

$x \le -\frac{19}{8}=-2\frac{3}{8}$

$63x^2+8\cdot39x+19^2-17=0$

$x\in[-2{,}5;-2{,}375]$

$D/4=(4\cdot39)^2-63\cdot(19^2-17)=$

$=$

$361-17$

$351-7$

$350-6$

344

$4^2\cdot39^2-63\cdot344=$

$=4(4\cdot39^2-63\cdot86)=$

$=8(2\cdot39^2-63\cdot43)$

$=8\cdot333$

$16\cdot43^2-63\cdot424=4(4\cdot43^2-63\cdot106)=676\;729$

$=8(2\cdot43^2-63\cdot53)=8\cdot359$

$3042-2709=333$

$63\cdot43$: 189, 252, 2709

156^2, $\frac{-208}{63}\;\frac{-206}{63}\;\varnothing$

$25\cdot25$: 125, 50, 625

$26+27=53$

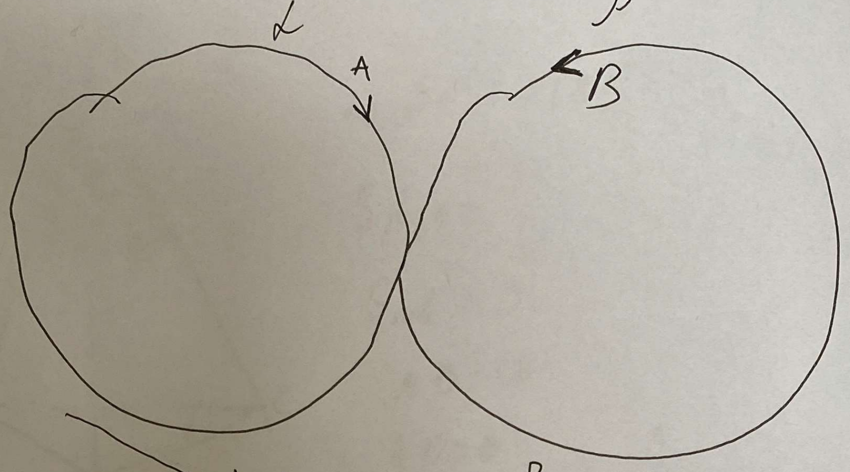
$43\cdot43$: 129, 172, 1849

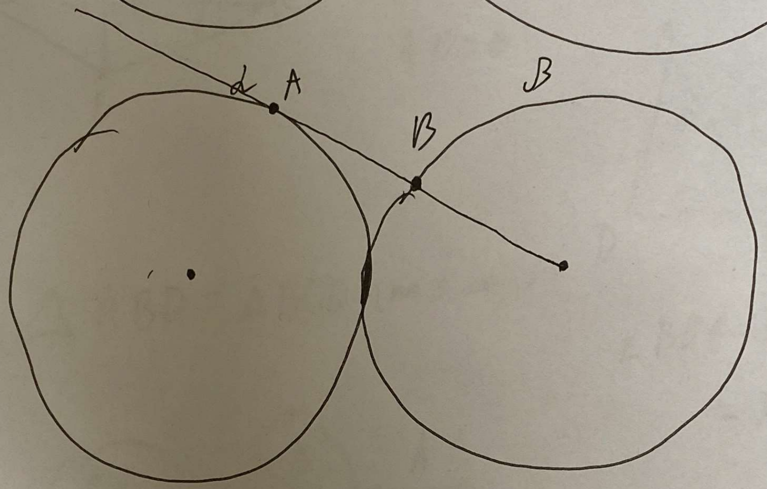
$1849\cdot2=3698$

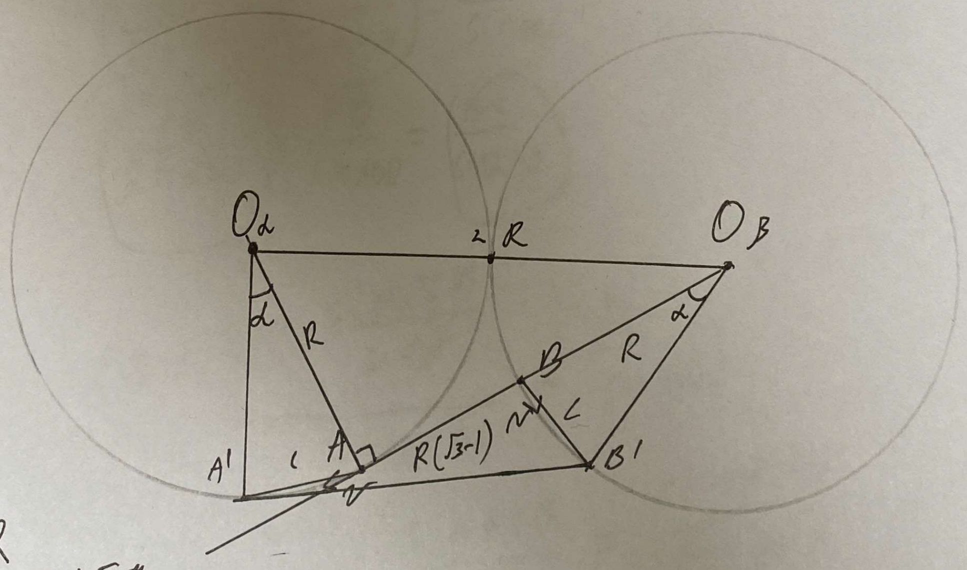
$63\cdot53$: 189, 315, 3339

$3698-3339=359$

6 ч.







$$\frac{2\pi R}{v} = 1{,}5^{ч}$$

$t - ?$: $AB \le 2R$

Черновик (10)

3.

$x^2+bx+a=0$ $\quad x^2+cx+a=1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \leq -1$

$x^2+bx+a=0$ $\quad x^2+cx+(a-1)=0$

$\begin{cases} x_1x_2=a \\ x_1+x_2=-b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_3x_4=a-1 \\ x_3+x_4=-c \end{cases}$

$b^2-4a>0$ $\quad b^2>4a$

$c^2-4(a-1)>0$ $\quad c^2>4a-4$

$b^2>c^2$

$-b\leq-2$

$b>2$

$c>2$

$a>1$

$a-1>1$

$a>2$

$a\in\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

a не меньше 3.

если $a=3$, тогда

$x^2+bx+3=0$ $\quad x^2+cx+2=0$

$x_1x_2=3$

$x_1+x_2=-6$

$x_1x_2=2$

$x_1+x_2=-c$

$-1 \quad -2$

$-2 \quad -1$

т.к. x_1 и $x_2 \in \mathbb{Z}$

$(x_1;x_2)=\{(-1;-3);(-3;-1)\}$

$c=3$

$\Downarrow$

$b=4$

$a=3$ $\ominus$

$a=4$

$x_1x_2=4$

$b=4$

$b=5$

$b=6$

$-2 \quad -2$

$\ominus$

$a=5$

$-2 \quad -3$

$a=6$

$-2 \quad -4$

$-2 \quad -3$

$c=5$

Ответ: $a=6$

Вариант: 210104 Чистовик.

1. $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(11)$ - ? , $f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$

$$\sum_{n=1}^{11} f(n)=\sum_{n=1}^{11} 4n^3+6n^2+4n+9 = 4\cdot\sum_{n=1}^{11} n^3+6\sum_{n=1}^{11} n^2+4\sum_{n=1}^{11} n+\sum_{n=1}^{11} 9$$

$$\sum_{n=1}^{11} n = 1+2+3+\ldots+11 = \frac{(11+1)\cdot 11}{2} = 6\cdot 11 = 66$$

$$\sum_{n=1}^{11} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{11\cdot 12\cdot 23}{6} = 22\cdot 23$$

$$\sum_{n=1}^{11} n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 66^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{11} f(n) = 4\cdot 66^2+6\cdot 22\cdot 23+4\cdot 66+9\cdot 11 = 17424+3036+264+99=$$

$$=20823$$

Ответ: 20823

2. $$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+3|=1 \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1; \end{cases}$$

$x^2+y-1\geq 0 \Rightarrow x^2+y\geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y}\geq 1$, а $|y+3|\geq 0 \Rightarrow$
$\sqrt{x^2+y}+|y+3|\geq 1$, и когда равно 1, то $x^2+y=1$, а $|y+3|=0 \Rightarrow y=-3$
$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. Проверка:

$(-2;-3)$

$\sqrt{4-3-1}+|-2+3|=1$

$\sqrt{0}+|1|=1$

$1=1$

$+$

$(2;-3)$

$\sqrt{4-3-1}+|2+3|=1$

$\sqrt{0}+|5|=1$

$5=1$

$\Downarrow$

$-$

Ответ: $(-2;-3)$.

1

чистовик.

$a=8$: $x_3 \cdot x_4 = 7 \Rightarrow (x_3; x_4) = (-1; -7)$ или $(-7; -1) \Rightarrow \ominus$

Не трудно заметить, что пока a и $a-1$ будут одновременно не простыми или не квадратом простого числа мы не сможем найти подходящее разложение.

$a=9=(-3)\cdot(-3)=(-1)\cdot(-9)=(-9;-1) \Rightarrow \ominus$

$a=10$: $10-1=9 \Rightarrow \varnothing$

$a=11$ $\ominus$

$a=12$: $12-1=11$ $\ominus$

$a=13$ $\ominus$

$a=14$; $14-1=13$ $\ominus$

$a=15$: $(x_1; x_2) = (-3; -5)$ или $(-5; -3)$, тогда $b=8$

$15-1=14$ $(x_3; x_4) = (-2; -7)$ или $(-7; -2)$, тогда $c=9$ $\Rightarrow$ $x^2+bx+a=0$ $\quad x^2+cx+a-1$

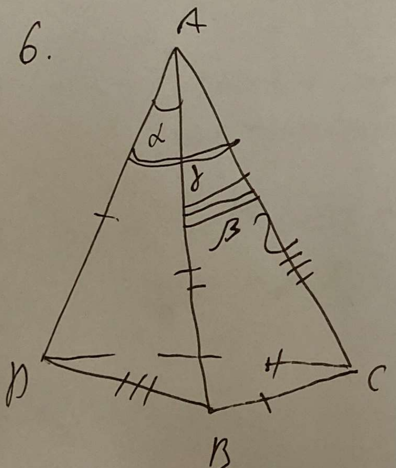
$x^2+8x+15=0 \qquad x^2+9x+14=0$

$x_{1,2} = -3; -5 \qquad x_{3,4} = -7; -2$

7

Ответ: $a=15$.

6.



$\triangle DAC = \triangle ABC$ (по 3 сторонам)

$\Downarrow$

$\angle ACD = \beta \Rightarrow \angle ADC = 180° - \gamma - \beta = \alpha \Rightarrow$ по двум сторонам и углу $\triangle ADB = \triangle ADC \Rightarrow DB = AC$

$\Downarrow$

$\triangle ADB = \triangle ABC = \triangle ADC$.

$\triangle ADB = \triangle DCB$ (по 3 сторонам) $\Rightarrow$

$\triangle ADB = \triangle ABC = \triangle ADC = \triangle BCD \Rightarrow S = S_{ABD} + S_{ABC} + S_{ACD} + S_{BCD}$

$= 4 S_{BCD} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{4} S$

Ответ: $S_{BCD} = \frac{S}{4}$.

3

Черновик. (7)

1.

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(11),\quad f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$$

$$\sum_{n=1}^{11} f(n)=\sum_{n=1}^{11} 4n^3+6n^2+4n+9 = 4\cdot\sum_{n=1}^{11} n^3+6\sum_{n=1}^{11} n^2+4\sum_{n=1}^{11} n+11\cdot 9=$$

$$=$$

$$\sum_{n=1}^{11} n = 1+2+3+\ldots+11=\frac{(11+1)\cdot 11}{2}=66$$

$$\sum_{n=1}^{11} n^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+11^2=\frac{11(11+1)(2\cdot 11+1)}{6}=\frac{11\cdot \cancel{12}^{2}\cdot 23}{\cancel{6}}=22\cdot 23$$

$$\sum_{n=1}^{11} n^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+11^3=(1+2+3+\ldots+11)^2=\left(\frac{(11+1)\cdot 11}{2}\right)^2=66^2$$

$$\sum_{n=1}^{11} f(n)=4\cdot 66^2+6\cdot 22\cdot 23+4\cdot 66+99=11(4\cdot 6\cdot 66+12\cdot 23+4\cdot 6+9)$$

$$=33(8\cdot 66+2\cdot 23+8+3)=19305$$

$$\begin{array}{r} 66\\ \times\ 8\\ \hline 528\\ +\ 46\\ \hline 574\\ +\ 11\\ \hline 585\\ \times\ 33\\ \hline 1755\\ 1755\ \ \\ \hline 19305 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 66\\ \times\ 4\\ \hline 264 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 66\\ \times 66\\ \hline 396\\ 396\ \ \\ \hline 4356\\ \times\ \ 4\\ \hline 17424 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 22\\ \times 23\\ \hline 66\\ 44\ \ \\ \hline 506\\ \times\ \ 6\\ \hline 3036 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17424\\ 3036\\ \hline 20460\\ +\ 264\\ \hline 20724 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 20724\\ +\ \ 99\\ \hline 20823 \end{array}$$

Ответ: 19305

Черновик.

(8)

2.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1; \end{cases}$$

ОДЗ

$$\begin{cases} y \geq -x^2 \\ y \geq -x^2+1; \end{cases}$$

$y \geq -x^2+1$

$$\begin{cases} |y+3| = 1 - \sqrt{x^2+y} \\ |x+3| = 1 - \sqrt{x^2+y-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+3)^2 = 1 + x^2 + y - 2\sqrt{x^2+y} \\ (x+3)^2 = 1 + x^2 + y - 1 - 2\sqrt{x^2+y-1} \end{cases}$$

$\sqrt{x^2+y} = 1 - |y+3|$

$\sqrt{x^2+y-1} = 1 - |x+3|$

$(y+3)^2 = 1 + x^2 + y - 2 + 2|y+3|$

$(y+3)^2 - 2|y+3| + 1 - y = x^2$

$x^2 + y = (|y+3|-1)^2$

$x^2 + y = (1 - |y+3|)^2$

$x^2 + y - 1 = (1 - |x+3|)^2$

$1 = (1-|y+3|)^2 - (1-|x+3|)^2$

$1 = (|x+3| - |y+3|)(2 - |y+3| - |x+3|)$

$\sqrt{x^2+y-1} = \sqrt{(|y+3|-1)^2 - 1} = \sqrt{|y+3|(|y+3|-2)}$

$x^2 + y = 1 + y^2 + 6y + 9 - 2|y+3|$

$x^2 + y - 1 = 1 + x^2 + 6x + 9 - 2|x+3|$

$|y+3|(|y+3|-2) = 1 + x^2 + 6x + 9 - 2|x+3|$

$y = 2 + 6x + 9 - 2|x+3|$

при $x \geq -3$

$y = 5 + 4x = 4x + 5 \quad (y \geq -7)$

при $x \leq -3$

$y = 8x + 17 \quad (y \leq -7)$

$\Longleftrightarrow$

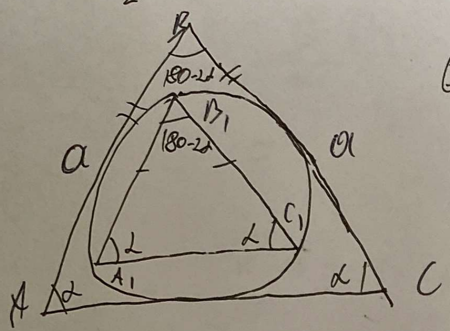
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 5 + 4x, \text{ при } x \geq -3 \quad \text{I} \\ y = 8x + 17, \text{ при } x \leq -3 \quad \text{II} \end{array} \right. \end{cases}$$

Милтовик.

(7)

5. $60^\circ \le \alpha \le 120^\circ$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(180-2\alpha) = 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2}{a^2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha}}$



$AC = 2a\cos\alpha$

$S = pr = \frac{1}{2}(2a + 2a\cos\alpha)\cdot r \Rightarrow r = \frac{1}{a(1+\cos\alpha)} = \frac{1}{a(1+\cos\alpha)}$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha}}\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sqrt{2}(1+\cos\alpha)} = R$

$S = \frac{abc}{4R} = \frac{a_1^2 \cdot 2a_1\cos\alpha}{4R} \Rightarrow R = \frac{a_1^3\cos\alpha}{2} =$

$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sqrt{\sin 2\alpha}}$

Т.к. Δ подобны, то $\frac{a}{a_1} = \frac{R}{R_1} = k = \frac{\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\sin 2\alpha\sqrt{\sin 2\alpha}}}{\frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sqrt{2}(1+\cos\alpha)}} = \frac{2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin 2\alpha}$

$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{k^2} S_{ABC} = \frac{\sin^4 2\alpha}{4\cos^2\alpha(1+\cos\alpha)}$

Наименьшее значение при

(6)

Чистовик.

3. $x^2+bx+a=0$ $\qquad$ $x^2+cx+a=1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$

$x_1, x_2, x_3, x_4 < -1$

$x^2+6x+a=0$

По Th. Виета:

$\begin{cases} x_1x_2=a \\ x_1+x_2=-6 \end{cases}$, т.к. x_1 и $x_2 < 1$ и $\in \mathbb{Z}$, то a и b так же $\in \mathbb{Z}$, и $a=x_1x_2 \Rightarrow$

$a \geq (-1)\cdot(-1)=1.$

$x^2+cx+(a-1)=0$

По Th. Виета:

$\begin{cases} x_3x_4=a-1 \\ x_3+x_4=-c \end{cases}$, т.к. x_3 и $x_4 < 1$ и $\in \mathbb{Z}$, то c так же $\in \mathbb{Z}$, и $(a-1)=x_3x_4 \Rightarrow$

$a-1 \geq (-1)\cdot(-1)=1 \Rightarrow a \geq 2 \Rightarrow a$ может принимать натуральные значения, начиная с 2. Проверим все значения a, начиная с 2.

При $a=2$:

$x_3\cdot x_4=2-1=1 \Rightarrow x_3=-1$ и $x_4=-1$, что противоречит условию.

$a=3$:

$x_3\cdot x_4=3-1=2 \Rightarrow (x_3;x_4)=(-2;-1)$ или $(-1;-2)$, но $x_3, x_4 < -1 \Rightarrow \ominus$

$a=4$:

$x_3\cdot x_4=4-1=3 \Rightarrow (x_3;x_4)=(-1;-3)$ или $(-3;-1) \Rightarrow \ominus$

$a=5$:

$x_3\cdot x_4=5-1=4 \Rightarrow (x_3;x_4)=(-1;-4)$ или $(-4;-1)$ или $(-2;-2)$, но при первых двух случаях один из корней равен -1, что противоречит условию, а в 3-ем оба корня совпали $\Rightarrow D=0$, что так же противоречит условию.

$a=6$:

$x_3\cdot x_4=6-1=5 \Rightarrow (x_3;x_4)=$ $(-1;-5)$ или $(-5;-1) \Rightarrow \ominus$ $\qquad$ 2

$a=7$:

$x_1\cdot x_2=7 \Rightarrow (x_1;x_2)=(-1;-7)$ или $(-7;-1) \Rightarrow \ominus$

Чистовик

7. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{2021}$

Пусть $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5}$; $c=\sqrt{7}$, тогда $(a+b+c)^{2021}=\underbrace{(a+b+c)(a+b+c)\ldots}$

$\underbrace{\ldots(a+b+c)}_{2021}$ => каждое слагаемое будет иметь вид $a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}$, где

$\alpha+\beta+\gamma=2021$ => если:

1) α - чёт, β - чёт => γ - нечёт => $\sqrt{7}$ - останется.

2) α - чёт, β - нечёт, => γ - чёт => $\sqrt{5}$ - останется

3) α - нечёт, β - чёт => γ - чёт => $\sqrt{3}$ - останется.

4) α - нечёт, β - нечёт => γ - нечёт => $\sqrt{3\cdot5\cdot7}$ - останется.

$\Downarrow$

каждое из слагаемых будет ~~...~~ содержать в себе натуральный коэффициент и один из данных корней ($\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{7\cdot5\cdot3}$)

=> ~~...~~ $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{2021}$ представимо, как $n\sqrt{3}+m\sqrt{5}+K\sqrt{7}+L\sqrt{3\cdot5\cdot7}$,

где $n, m, K, L \in \mathbb{N}$