МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мясников Роман Павлович**

Класс: **8**

Технический балл: **84**

Дата проведения: **19 марта 2021 года**

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Мясников Роман Павлович

7-8 классы

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Сумма***
16 баллов	16 баллов	16 баллов	16 баллов	16 баллов	0 баллов	84 балла

* К сумме баллов по всем задачам добавлялось 4 балла в случае, если в работе есть хотя бы одна верно решённая задача.

Чистовик, 1

№1.

Пусть скорость 2-го равна $3\cdot 2^8 v = 3\cdot 256 v = 768 v$, тогда скорость первого равна $256 v$ по усл. Заметим, что 1 пройдёт трассу за время $\frac{S}{256v}$, где S – длина трассы.

~~(Трасса – это общее пройденное расстояние~~

(Трасса – это одинаковое расстояние, которое преодолел каждый из них). Тогда время второго равно:

$$\frac{S}{2\cdot 768v} + \frac{S}{4\cdot\frac{768}{2}v} + \frac{S}{8\cdot\frac{768}{4}v} + \frac{S}{16\cdot\frac{768}{8}v} + \frac{S}{32\cdot\frac{768}{16}v} +$$

$$+ \frac{S}{64\cdot\frac{768}{32}v} + \frac{S}{128\cdot\frac{768}{64}v} + \frac{S}{256\cdot\frac{768}{128}v} + \frac{S}{512\cdot\frac{768}{256}v} +$$

$$+ \frac{S}{512\cdot\frac{768}{256}v} = \underbrace{\frac{S}{2\cdot 768v} + \frac{S}{2\cdot 768v} + \ldots + \frac{S}{2\cdot 768v}}_{10\text{ раз}} = \frac{10S}{2\cdot 768v}.$$

$$\tau_1 = \frac{S}{256v};\ \tau_2 = \frac{10S}{2\cdot 768v} \Rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\frac{10S}{2\cdot 768v}}{\frac{S}{256v}} = \frac{\cancel{10}^{5}\cancel{S}}{\cancel{2\cdot 768}_{3}\cancel{v}}\cdot\frac{\cancel{256}\cancel{v}}{\cancel{S}} =$$

$= \frac{5}{3}$; Ответ: в $\frac{5}{3}$ раз время 2-го больше времени 1-го.

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

№ 2. Чистовик, 2

Пусть Вася задумал число $\overline{ab}$, тогда по усл.: $\overline{ba} \cdot \overline{ba} = 4\overline{ab}$;

$(\overline{ba})^2 = 4\overline{ab} \Rightarrow \frac{(\overline{ba})^2}{4} = \overline{ab} \Rightarrow \left(\frac{\overline{ba}}{2}\right)^2 = \overline{ab} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Данное число это полный квадрат.

Переберём квадраты (двузначные):

$4^2 = 16 \Rightarrow \frac{61}{4}^2 = 16 \Rightarrow \frac{61}{2} = 4$ – неверно.

$5^2 = 25 \Rightarrow \frac{52}{2} = 5$ – неверно

$6^2 = 36 \Rightarrow \frac{63}{2} = 6$ – неверно

$7^2 = 49 \Rightarrow \frac{94}{2} = 7$ – неверно

$8^2 = 64 \Rightarrow \frac{46}{2} = 8$ – неверно

$9^2 = 81 \Rightarrow \frac{18}{2} = 9$ – верно

Значит, Вася задумал число 81.

Мы рассмотрели все возможные случаи, нашли ответ 81 и доказали, что других ответов быть не может. Ответ: 81.

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

№3 Чистовик, 3

Пусть n делится на 2 или более простых чисел, тогда по условию один простой делитель будет делиться на другой, т.к. если $n \vdots a_1; a_2; a_3 \ldots$ $\ldots n \vdots a_k$, ~~то~~, где $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_k$, то $a_2 \vdots a_1$; $a_3 \vdots a_2 \ldots a_k \vdots a_{k-1}$, но тогда $a_k \vdots a_1; a_2 \ldots a_{k-1}$ и аналогично каждый делитель делится на все предыдущие, тогда противоречие, т.к. ~~один простой делитель~~ одно простое число не может делиться на другое простое.

Значит, n имеет лишь один простой делитель $\Rightarrow n = p_i^k$. Переберём:

$n = 2^k \Rightarrow n = 2^5; 2^6;$ $\quad n = 5^k \Rightarrow n = 5^2;$

$n = 3^k \Rightarrow n = 3^3; 3^4;$ $\quad n = 7^k \Rightarrow n = 49 = 7^2;$

Если $p_i \ge 10$, то по условию n – не простое $\Rightarrow$ ~~то~~ n хотя бы квадрат простого числа $\Rightarrow n \ge p_i^2 \ge 100$ $\Rightarrow$ n не входит в интервал от 20 до 90.

Значит, мы перебрали все возможные случаи и доказали, что других нет. Ответ: $n = 32; 64; 27; 81; 25; 49$.

Проверка

$n = 32$

1 2 4 8 16 32

$n = 64$

1 2 4 8 16 32 64

$n = 27$

1 3 9 27

$n = 81$

1 3 9 27 81

$n = 25$

1 5 25

$n = 49$

1 7 49

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

№4 Чистовик, 4

$(x+1)^2+(x+3)^2+\ldots+(x+2021)^2=x^2+(x-2)^2+(x-4)^2+\ldots+(x-2020)^2$

Заметим, что с обеих сторон 1011 слагаемых $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ при раскрытии скобок с обеих сторон будет $1011x^2 \Rightarrow$ они сократятся.

$2x\cdot1+2x\cdot3+2x\cdot5+\ldots+2x\cdot2021+1^2+3^2+\ldots+2021^2=$
$=-2x\cdot2-2x\cdot4-\ldots-2x\cdot2020+2^2+4^2+\ldots+2020^2$

$2x(1+3+5+\ldots+2021)+1^2+3^2+5^2+\ldots+2021^2=$
$=-2x(2+4+\ldots+2020)+2^2+4^2+\ldots+2020^2$;

$2x(1+2+4+3+\ldots+2020+2021)=2^2+4^2+\ldots+2020^2-1^2-3^2-\ldots-2021^2$;

$2x(1+2+\ldots+2021)=0^2-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+\ldots+2020^2-2021^2$;

$2x(1+2+\ldots+2021)=(0-1)(0+1)+(2-3)(2+3)+\ldots+(2020-2021)(2020+2021)$

$2x(1+2+\ldots+2021)=-(0+1)-(2+3)-\ldots-(2020+2021)$

$2x(1+2+\ldots+2021)=-(1+2+\ldots+2021)$

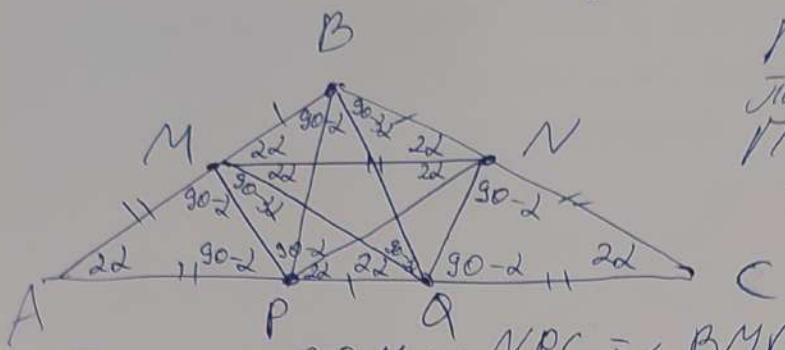
$1+2+\ldots+2021\neq0 \Rightarrow$ поделим на $(1+2+\ldots+2021) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$; Ответ: $-\frac{1}{2}$;

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

№5

Чистовик, 6



Проведём BQ. Также NQ и MP.

Пусть $\angle A = 2\alpha$

Тогда $\angle AMP = \angle APM = \angle ABQ = \angle AQB = 90-\alpha$;

Также $\angle PQM = \angle NPC = \angle BMN = \angle BNM = \angle QMN = \angle MNP = 2\alpha$; $\angle MPN = 90-\alpha$; $\angle PMN = 90-\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PMQ = 90-3\alpha$. $\angle QBC = 180-4\alpha-90+\alpha = 90-3\alpha$;

$\angle MQB = \angle PMQ$ ($MP \parallel BQ$) $= 90-3\alpha$; $\angle NQC = \angle QNC = 90-\alpha$. Рассмотрим ~~△ MPQ и △ QNB~~;

△PMB и △NQP; MP = NQ из △AMP = △NCQ;

Тогда △PMB = △NQP (по 1 приз =△), т.к. $\angle PMB = \angle PQN \Rightarrow PB = PN$; △APB = △CQB (по 1 приз =△)

$\Rightarrow BP = BQ \Rightarrow BQ = PN$; Рассмотрим BNQP;

В ней △PBN = △BPQ по 3-м сторонам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PQB = \angle BNP \Rightarrow 4\alpha = 90-\alpha \Rightarrow 5\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 18$;

$\angle MQB = 90-3\alpha = 90-3\cdot 18 = 90-54 = 36°$;

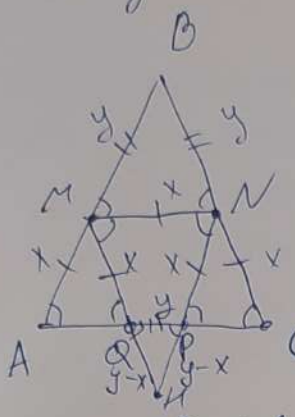
Ответ: 36°.

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

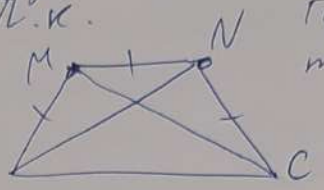
№5 Чистовик, 5

1 случай: Пусть MQ и NP - не пересек.

Заметим, что AMNC - равнобокая трапеция;



Т.к.



Проведем AN и MC, т.к. $\triangle ABC$ - равнобед, то $\angle MAC = \angle NCA \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle AMC = \triangle CNA$ (по 1 приз $=\triangle$), т.к. AC общ.

Тогда по 3-м сторонам равны $\triangle MNC = \triangle NMA \Rightarrow \angle AMN = \angle CNM \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AMN + \angle MAC = 180°$, т.к. Σ всех углов $= 360°$.

Тогда $\angle BMN = \angle MNB = \angle MAC = \angle NCA \Rightarrow \triangle MBN$ - равнобед.

AMNP - параллелограмм ($MN \parallel AP$ и $AM \parallel NP$) $\Rightarrow NP = AM$, аналогично $MQ = NC$; $\angle QMB$, как внеш для $\triangle AMQ$, равен $2\angle MAQ \Rightarrow \angle QMN = \angle MAQ$ ($\angle BMN = \angle MAQ$); Аналогично, с $\angle MNP$; Продлим MQ и NP до пересеч; Пусть получиться точка H. Тогда $\triangle QHP$ - равнобед, т.к. $\angle HQP = \angle AQM$ (верт) и $\angle QPH = \angle NPC$ (верт);

Также $\triangle MBN = \triangle MHN$ (по 2 приз $=\triangle$) $\Rightarrow MH = MB$;

Пусть $AM = x$; $MB = y$; Тогда $QH = y - x$;

$\triangle QHP \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y-x}{y} \Rightarrow y^2 = xy - x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - xy + x^2 = 0$; Заметим, что $x \neq y$, т.к. $QH > 0$;

$y^2 - xy + x^2 = \frac{y^3 + x^3}{y + x}$; т.к. $y + x > 0$, т.к. $y > 0$ и $x > 0$.

$\Rightarrow \frac{y^3 + x^3}{y + x} = 0 \Rightarrow y^3 + x^3 = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow$ противоречие, т.к. обе стороны полож. и не 0.

2 случай: Пусть MQ и NP - пересек.

Аналогично, MBN - равнобед, AMNC - ~~по~~ равнобок. трапеция; AMNP - параллелограмм и MNCQ - параллелограмм. Тогда AMNP - ромб, MQCN - ромб ($AM = MN = NC$). $\Rightarrow AP = PN = MN =$ $= MQ = QC$

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

Черновик, 1

1) S

$2^8 \cdot 3 = 256 \cdot 3 = 512 + 256 = 768$

1) $768v$

2) $256v$

$\frac{S}{256v}$ $\quad v = \frac{S}{t} \Rightarrow t = \frac{S}{v}$

$\frac{S}{2 \cdot 768v} + \frac{S}{2 \cdot 768v}$

$\frac{9S}{2 \cdot 768v}$ $\quad \frac{10S}{2 \cdot 768v} = \frac{S}{256v} \cdot k$

$\frac{5}{768} = \frac{k}{256}$ $\quad \boxed{\frac{5}{3} = k}$

$\overline{ab}$ $\quad \overline{ba} \cdot \overline{ba} = 4\overline{ab}$

$(10b + a)(10b + a) = 4(10a + b)$

$100b^2 + 20ab + a^2 = 40a + 4b$

$a > b$ $\quad \left(\frac{\overline{ba}}{2}\right)^2 = \overline{ab}$

$\overline{ab} = m^2$ $\quad$ 16 25 36 49

64 81

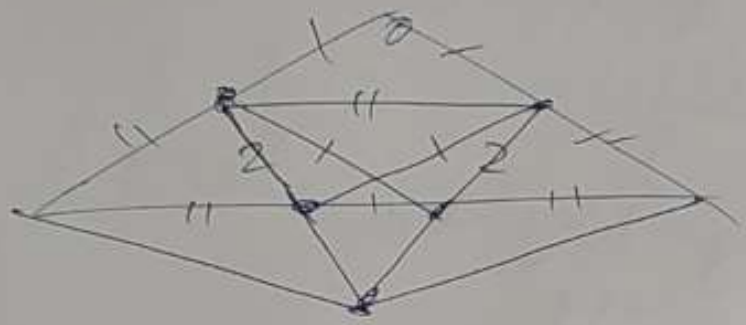
$\overline{ba} \cdot \frac{\overline{ba}}{4} = \overline{ab}$

$\frac{\overline{ba}}{4} \geq 2 \Rightarrow \overline{ab} > \overline{ba} \Rightarrow \boxed{a > b}$

$4 \cdot 64 = 46 \cdot 46$ $\quad \boxed{81 \cdot 4 = 18 \cdot 18}$

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

Черновик, 2



$13 + 13 + 13 + 8$

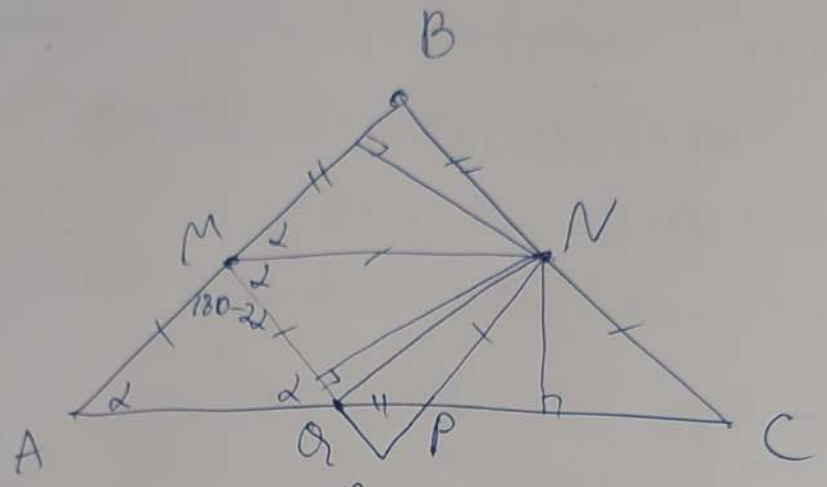
$26 + 26 = 52$

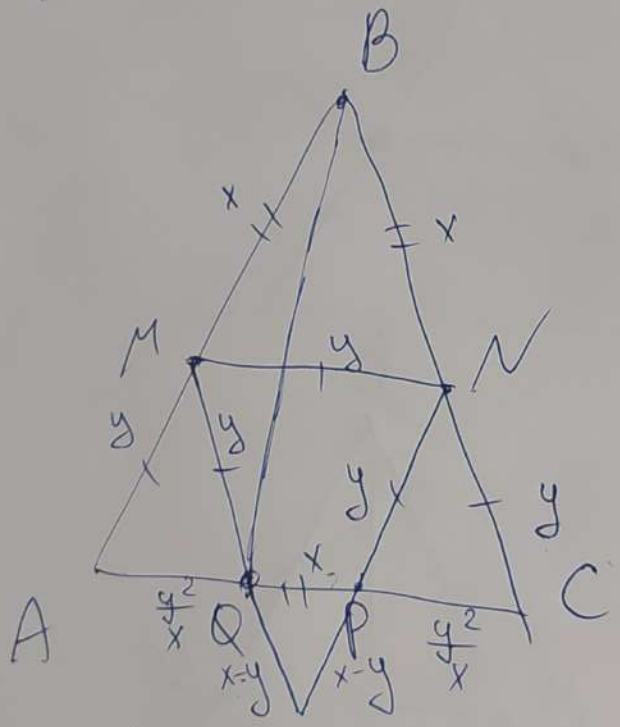
$4 + 48 = 52$

$6 \cdot 2 \cdot$

6 2 6 1

Черновик, 3





$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$$

$$\frac{y^2}{x} = z$$

$$\frac{x-y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$xy - y^2 = x^2$$

$$x^2 - xy + y^2 = 0$$

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = 0$$

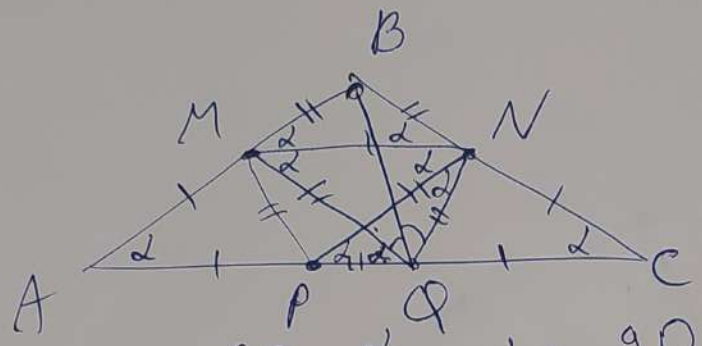
$$\boxed{x=y}$$

$$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y} = 0$$

$$x^3+y^3=0$$

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

Черновик, 4



$$90 - \frac{\alpha}{2} - \alpha = 90 - \frac{3\alpha}{2} = \frac{180 - 3\alpha}{2}$$

$$180 - 2\alpha - 90 + \frac{\alpha}{2} = 90 - \frac{3\alpha}{2}$$

$$180 - 3\alpha$$

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

Черновик, 5

a | a

xm^2

b a

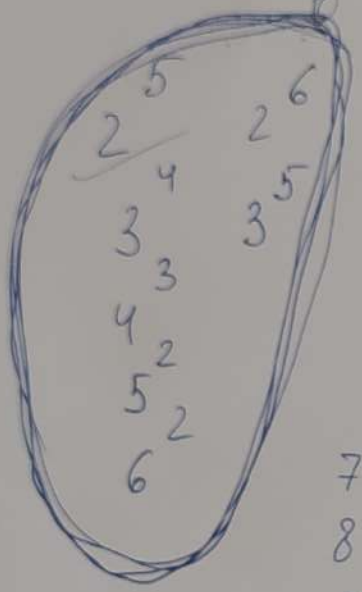
5 2 6 2

4 3 5 3

3 4

2 5

2 6



7^2

8^2

9^2

10

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA