



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Назаров Владимир Романович**

Класс: **68**

Технический балл: **68**

Дата проведения: **19 марта 2021 года**

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Назаров Владимир Романович

7-8 классы

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Сумма*
16 баллов	16 баллов	16 баллов	16 баллов	0 баллов	0 баллов	68 баллов

* К сумме баллов по всем задачам добавлялось 4 балла в случае, если в работе есть хотя бы одна верно решённая задача.

Пусть Ваня задумал число \overline{ab} , тогда

$$\overline{ba} \cdot \overline{ba} = 4 \cdot \overline{ab}$$

$a \neq 0$; $b \neq 0$, иначе либо \overline{ab} , либо \overline{ba} не будут двузначными

$(4 \cdot \overline{ab}) : 4$, значит $(\overline{ba} \cdot \overline{ba}) : 4$, значит \overline{ba} - четное, значит $a : 2$

$$\text{при } a = 8; \quad b = 1$$

$$\overline{ab} = 81; \quad \overline{ba} = 18$$

$$18 \cdot 18 = 81 \cdot 4 = 324$$

Ответ: 81

Задача 3

1) Если число является степенью двойки (т.е. в его разложении на простые множители нет нечетных простых чисел), то число "интересное".

$$\underline{32}: 1; 2; 4; 8; 16; 32 - \text{условие выполняется}$$

$$\underline{64}: 1; 2; 4; 8; 16; 32; \cancel{64} - \text{условие выполняется}$$

2) Если в разложении числа присутствуют как и двойки, так и нечетные простые делители.

Заметим, что если есть "интересное" число n , и его кат. делители: $1; a_1; a_2 \dots a_n; n$, то $a_2 : a_1; a_3 : a_2$ и

$a_3 : a_1$; т.е. каждый делитель делится на каждой из предыдущих.

Если в данной ситуации у числа первыми двумя делителями являются 1 и 2, т.к. число четное.

На каком-либо месте в ряду делителей будет стоять нечетный делитель a_k , и делитель "2" будет стоять раньше

значит a_k должно делиться на 2, но это невозможно, т.к. a_k - простое нечетное число.

Чистовик

стр. 2 из 6

3) Число келетное, т.е. в его разложении нет 2.
1. Если в разложении числа есть хотя бы 2 келет. делителя a_1 и a_2 , причем $a_1 \neq a_2$, то в ряду делителей один из них (a_1 или a_2) будет стоять после второго, но такое невозможно, т.к. a_1/a_2 и a_2/a_1 (это два простых келетных числа)

2. В разложении числа Число является степенью простого келетного числа

$$3^3 = 27; \quad 27: 1; 3; 9; 27 - \text{усл. выполняется}$$

$$3^4 = 81; \quad 81: 1; 3; 9; 27; 81 - \text{усл. выполняется}$$

$$5^2 = 25; \quad 25: 1; 5; 25 - \text{усл. выполняется}$$

$$7^2 = 49; \quad 49: 1; 7; 49 - \text{усл. выполняется}$$

~~9~~

Значит число n является интересным, если его можно записать в виде p^k , где p - простое число; $k \in \mathbb{N}$

$$p^k: 1; p; p^2; p^3 \dots p^{k-1}; p^k$$

$$\text{Ответ: } 25; 27; 32; 49; 64; 81$$

Задача 4

Перенесем все слагаемые из правой части в левую.

$$\text{Сгруппируем: } 1) (x+1)^2 - x^2 = (x+1-x)(x+1+x) = 2x+1$$

$$2) (x+3)^2 - (x-2)^2 = (x+3-x+2)(x+3+x-2) = 5(2x+1)$$

$$3) (x+5)^2 - (x-4)^2 = (x+5-x+4)(x+5+x-4) = 9(2x+1)$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, тогда группируем скобки так:

$$(x+k+1)^2 - (x-k)^2 = (x+k+1-x+k)(x+k+1+x-k) = (2k+1)(2x+1)$$

$$4) (x+2021)^2 - (x-2020)^2 = (x+2021-x+2020)(x+2021+x-2020) =$$

$$= 4041(2x+1).$$

Вынесем за скобки $(2x+1)$

Чистовик

стр. 3 из 6

$$(2x+1)(1+5+9+\dots+4041)=0$$

$$(1+5+9+\dots+4041) \neq 0$$

$$\text{А-ко } 2x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2}$$

Задача 1

Пусть V - скорость паравоза скрывает 2-20

тогда $\frac{V}{3}$ - ск. 1-20

Проедем отсюда расстояние S

$$t_1 = \frac{S}{\frac{V}{3}} = \frac{3S}{V} - \text{время в пути 1-20 в пути}$$

$$t_2 = \frac{S}{2V} + \frac{2S}{4V} + \frac{4S}{8V} + \frac{8S}{16V} + \frac{16S}{32V} + \frac{32S}{64V} + \frac{64S}{128V} + \frac{128S}{256V} + \left(S - \left(\frac{S}{2} + \frac{S}{4} + \frac{S}{8} + \frac{S}{16} + \frac{S}{32} + \frac{S}{64} + \frac{S}{128} + \frac{S}{256} \right) : \frac{V}{256} \right) =$$

$$= \frac{4S}{V} + \left(\frac{S}{256} : \frac{V}{256} \right) = \frac{4S}{V} + \frac{S}{V} = \frac{5S}{V}$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{5S}{V} : \frac{3S}{V} = \frac{5S}{3S} = \frac{5}{3}$$

Ответ: в $\frac{5}{3}$ раза

Черновик

$ab \quad ba \quad ba \cdot ba = 4ab$

$(10b+a)(10b+a) = 4(10a+b)$

$100b^2 + 20ab + a^2 = 40a + 4b$

$100b^2 - 40a - 4b + 20ab + a^2$

$20(ab - 2a) + 4(25b^2 - b)$

$b \quad a \quad 39 \quad 3$

$a \neq 0; \quad b \neq 0$

$a:2$

$(10b+2)^2 = 4(20+b)$

$100b^2 + 40b + 4 = 80 + 4b$

$100b^2 + 36b - 76 = 0$

$50b^2 + 18b - 38 = 0$

$25b^2 + 9b - 19 = 0$

$\Delta = 81 + 1900 = 1981$

$100b^2 + (10b+6)^2 = 4(60+b)$

$100b^2 + 120b + 36 = 200 + 4b$

$100b^2 + 116b - 204 = 0$

$25b^2 + 29b - 51 = 0$

$\Delta = 841 + 5100 = 5941$

$n = a_1 a_2 a_3 a_4$

$2 \cdot 1245$

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$100b^2 - ub + a^2 - 40a + 20ab = 0$

$4b(25b-1) + a(a-40) + 20ab = 0$

$21 = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3$

$1 \quad a_1 \quad a_2 \quad n$

$13927 \quad a_2: a_1 \quad n: a_2$

$(10b+4)^2 = 4(40+b)$

$100b^2 + 80b + 16 = 80 + 4b$

$100b^2 + 76b - 64 = 0$

$25b^2 + 19b - 16 = 0$

$\Delta = 361 + 3600 =$

$= 3961$

$\neq 16$

$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$

$32 \quad + 144$

$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \quad 324$

$64 \quad 181$

$a_1:$

$a_2: a_1 \quad 81$

$a_2 = k a_1 \times 4$

$a_3: a_2: k a_1 \quad 324$

$78 \quad 18$

$144 \quad 18$

$n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$

$n = a_1 a_n = a_2 a_{n-1}$

$a_1 a_n = a_2 a_{n-1}$

$a_1 \cdot k a_{n-1} = a_2 a_{n-1}$

$a_1 \cdot k = a_2$

cmp. $4 \cdot 4 \cdot 6$
 $244 \cdot 4$
 $24 \cdot 161$

16
 $\times 16$
 $244 \cdot 4$

$61 \cdot 4 = 244$

$244 \cdot 16$
 $16 \cdot 161$
 84

2564
 $24 \cdot 164$
 16

16
 $\times 16$
 96
 16
 $\times 16$
 256

124510

$21 \quad 13721 \quad 61$

366
 3221
 59
 169

31
 $\times 31$
 93
 861

39
 $\times 39$
 117
 7521

43
 $\times 43$
 129
 1849

29
 $\times 29$
 261
 58
 841

79
 $\times 79$
 531
 553
 6061

71
 $\times 71$
 497
 5041

Черновик

смп. 5/36

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 = x^2 + (x-2)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + x^2 - 4x + 4$$

$$8x + 10 = -4x + 4$$

$$12x = -6$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$(x - 2020)^2 = (x+1)^2$$

$$x^2 - 4040x + 2020^2$$

$$(x+k)^2$$

$$(x+k)^2$$

$$(x - (k-1))^2$$

$$(x+1)^2 - x^2 = (x+1-x)(x+1+x) =$$

$$= 2x+1$$

$$(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$(x+3)^2 - (x+2)^2 =$$

$$(x - (k-1))^2 = x^2 - 2x(k-1) + k^2 - 2k + 1$$

$$= (x+3-x-2)(x+3+x+2) =$$

$$x^2 + 2kx + k^2 - x^2 - 2x(k-1) - k^2 + 2k - 1 = 2x + 5$$

$$= 4k + 2x(k-1) - 1$$

$$(x+k+1)^2$$

$$(x+3)^2 - (x-2)^2 = (x+3-x+2)(x+3+x-2) =$$

$$= 5(2x+1)$$

$$(x+5)^2 - (x-4)^2 = (x+5+x+4)$$

$$(x+5)^2 - (x-4)^2 =$$

$$(x+k+1)^2 - (x-k)^2 =$$

$$= (x+k+1-x+k)(x+k+1+x-k) = (2k+1)(2x+1)$$

$$(x+2021)^2 - (x-2020)^2 = (x+2021-x+2020)(x+2021+x-2020) =$$

$$= 24041(2x+1) = (1+5+9+\dots+4001)(2x+1) = 0$$

$$2x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Упробук

V-квр. СК. 1-20

$\frac{V}{3}$ - СК. бморо

смп. 6 уз 6

$$\frac{128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1}{160 + 80 + 40 + 5} = 255$$

$$t_1 = \frac{S}{\frac{V}{3}} = \frac{3S}{V}$$

$$t_2 = \frac{S}{2V} + \frac{S}{4} : \frac{V}{2} + \frac{S}{8} : \frac{V}{4} + \frac{S}{16} : \frac{V}{8} + \frac{S}{32} : \frac{V}{16} + \frac{S}{64} : \frac{V}{32} + \frac{S}{128} : \frac{V}{64} + \frac{S}{256} : \frac{V}{128} + \frac{S}{512}$$

$$+ \left(S - \left(\frac{S}{2} + \frac{S}{4} + \frac{S}{8} + \frac{S}{16} + \frac{S}{32} + \frac{S}{64} + \frac{S}{128} + \frac{S}{256} \right) \right) : \frac{3V}{256} =$$

$$= \frac{S}{2V} + \frac{2S}{4V} + \frac{4S}{8V} + \frac{8S}{16V} + \frac{16S}{32V} + \frac{32S}{64V} + \frac{64S}{128V} + \frac{128S}{256V} +$$

$$+ \left(S - \frac{18 \cdot 128S + 64S + 32S + 16S + 8S + 4S + 2S + S}{256} \right) : \frac{V}{256} =$$

$$= \frac{S}{2V} + \frac{S}{2V} + \frac{S}{2V} + \frac{S}{2V} + 8 \cdot \frac{S}{2V} +$$

$$= \frac{4S}{V} + \left(S - \frac{255S}{256} \right) = \frac{4S}{V} + \frac{256S - 255S}{256} = \frac{4S}{V} +$$

$$\frac{4S}{V} + \frac{S}{256} + \left(\frac{S}{256} : \frac{V}{256} = \frac{4S}{V} + \frac{S}{V} = \frac{5S}{V} \right)$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{5S}{V} : \frac{3S}{V} = \frac{5SV}{3SV} = \frac{5}{3}$$

