МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Осотов Степан Романович**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	15	15	5

Человек

(3)

$f(x) = x^2+6x+6 = 0$ при ~~$f(x)=x$~~ $D = 36-24 = 12$

$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -3 \pm \sqrt{3}$

$f(f(f(f(f(x))))) = 0$

$x^2+6x+6 > -3+\sqrt{3}$

$f(f(f(f(x)))) = -3-\sqrt{3}$

$x^2+6x+9+\sqrt{3} \geq 0$

$\sqrt{4\sqrt{3}} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{8}}$

$D_2 = 36-36+4\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ нулей нет

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -3+\sqrt{3}$

$32\sqrt{3}$

15

1 14 105

2 13 104

3 12 123

4 11 132

5 10 141

6 9

7 8

8 7

9 6

(№2) $X = 2^2+2^1+2^0+2^{-1}+\dots 2^{-2021}$

$\sqrt{\left(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\right)^2} = x+4\sqrt{x-4}+x-4\sqrt{x-4}+2\sqrt{x^2-16(x-4)} =$

$= \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-16x+64}} = \sqrt{2x+2\sqrt{(x-8)^2}} = \sqrt{2x+2|x-8|} = 4$

докажем, что $x < 8$

$X < \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

X не беск. геом. прогрессия $\Rightarrow X < \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8 \Rightarrow \sqrt{2x+16-2x} = 4$

(№3) $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$P(-1) = 10 = -1+A-B+C-D+E$

$P(1) = 22 = 1+A+B+C+D+E$ $\ominus$ $\Big\} \Rightarrow 32 = 2A+2C+2E$

$16 = A+C+E$

$12 = 2+2B+2D$

$5 = D+B$

$16 = A+C+E$

$A+C+E$, $A,C,E \geq 1$

$1(15-1)$

15

$15 \cdot 14 \cdot 4$

$60 \cdot 14 = 840$

14

23

32

41

Чистовик | вариант 210206

№1

$f(x) = x^2+6x+6 = (x+3)^2-3$ — $f(x)$ – 1 ⇒ скобка в 2^1 степени

$f(f(x)) = ((x+3)^2-3+3)^2-3 = (x+3)^4-3$ — $f(x)$-вторая ⇒ скобка в $2^2=4$ степени

$\vdots$

$f(f(f(f(f(x))))) = (x+3)^{32}-3=0$

$(x+3)^{32}=3$

$x = \sqrt[32]{3}-3$

$x = -\sqrt[32]{3}-3$

Ответ: $x = \sqrt[32]{3}-3$

$x = -\sqrt[32]{3}-3$

№2

$x = 2^2+2^1+2^0+2^{-1}\dots+2^{-2021}$

$x <$ бесконечной суммы прогрессии с $q=\frac{1}{2}$ и $a_1=4 \Rightarrow x < \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

$x < 8$

упростим выражение:

$\sqrt{(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}})^2} = \sqrt{x+4\sqrt{x-4}+x-4\sqrt{x-4}+2\sqrt{x^2-16\sqrt{(x-4)^2}}}$

$\Rightarrow \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-16(x-4)}} = \sqrt{2x+2\sqrt{(x-8)^2}} = \sqrt{2x+2|x-8|}$

$x<8$ доказано выше

$\Rightarrow = \sqrt{2x+16-2x} = 4$

$x > 4$, т.к. $x = 4+2+1\dots$ $\Rightarrow$

Ответ: 4

№3

Чистовик

$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$\begin{cases} P(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 10 \\ P(1) = 1 + A + B + C + D + E = 22 \end{cases}$ ⊕ ① ⊖ ②

①: $2A + 2C + 2E = 32$

$A + C + E = 16$, $A, C, E \geq 1$ $\Rightarrow$ $A \leq 14$, $C \leq 14$, $E \leq 14$

$A = 1 \Rightarrow C + E = 15$ – 14 вариантов

$A = 2 \Rightarrow C + E = 14$ – 13 вариантов

⋮

$A = 14 \Rightarrow C + E = 2$ – 1 вариант

⊕ $\Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{1+14}{2} \cdot 14 = 15 \cdot 7 = 105$, где n – кол-во вариантов

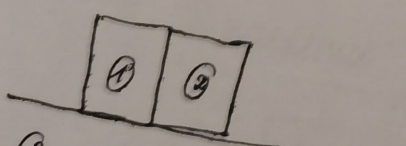
②: $12 = 2D + 2B + 2$

$D + B = 5$ – 4 варианта

итого: $n \cdot 4 = 105 \cdot 4 = 420$ вариантов

Ответ: 420

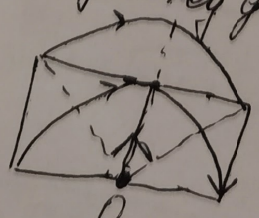
№5 квадрат 1×1:



① – 1 положение

② – после переворота

нарисуем ход движения вершин:



O – ось вращения

будет закрашено 2 квадрата и сегмент круга или 1 квадрат и сектор круга с $R = \sqrt{2}$ (диагональ кв. со ст = 1)

Чистовик

3

посчитаем: $S_1 = S_{кв} + \frac{\pi R^2}{4}$, $R=\sqrt{2}$ $\Rightarrow S_1 = 1\cdot 1 + \frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{4} = \frac{\pi}{2}+1$

$\frac{1}{4}$, т.к угол между стороной и диаг $45^\circ \Rightarrow$ между 2 диаг. 90

S_1 – при 1 обороте $\Rightarrow S_1' = 4S_1 = 2\pi+4$, где S_1' – S за 4 оборота

2 квадрат:

$\frac{P}{2} = 1 \Rightarrow P = 2 \Rightarrow q = \frac{2}{4} = 0{,}5$

аналогично: $S_2 = S_{кв} + \frac{\pi R_1^2}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\pi\cdot\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

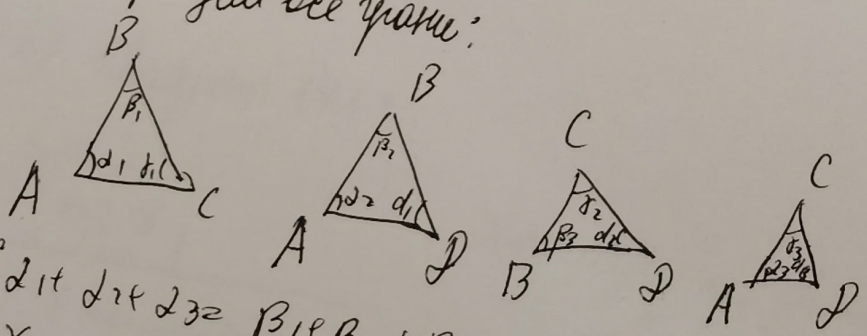
за 13 повторений: $S_2' = 13 S_2 = \frac{13}{4} + \frac{13\pi}{8}$

$|S_2' - S_1'| = S_1' - S_2' = 2\pi + 4 - \frac{13}{4} - \frac{13\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

Ответ: $\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

№6

нарисуем все грани:



$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \beta_1+\beta_2+\beta_3 \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = d_1+d_2+d_3 \end{cases}$ $+$

$(\alpha_1+\gamma_1)+(\alpha_3+\gamma_3)+\alpha_2+\gamma_2 = \beta_1+\beta_2+\beta_3+d_1+d_2+d_3$

$\underbrace{(\alpha_1+\gamma_1+\beta_1)}_{180^\circ}+\underbrace{(\alpha_3+\gamma_3+d_3)}_{180^\circ}+\alpha_2+2\gamma_2 = 2\beta_1+2d_3+\beta_2+\beta_3+d_1+d_2+\gamma_2$

$180^\circ+\alpha_2+2\gamma_2 = 2\beta_1+2d_3+\beta_2+d_1$

$360^\circ+2\gamma_2 = 2\beta_1+2d_3+2\beta_2+2d_1 \Rightarrow 180^\circ = \beta_1+\beta_2+d_1+d_3-\gamma_2$

Чистовик

$\gamma_2 = 180^\circ - \beta_3 - \alpha_2$

$180^\circ = \beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_3$ $\Big\} \Rightarrow$ $\boxed{360^\circ = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ (1)

2) ΔABB_1, ΔACC_1:

$\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_1 = 180^\circ$

$\alpha_3 + \gamma_3 + \alpha_3 = 180^\circ$ $\Big\} \Rightarrow$ (1): $360^\circ = \beta_1 + 180^\circ - \alpha_2 + \beta_3 + \alpha_2 + 180^\circ - \alpha_3 - \gamma_3$

$\beta_1 + \beta_3 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma_3$

$\alpha_2 - \alpha_3 = \beta_1 - \gamma_2$

$\alpha_2 + \gamma_2 = \beta_1 + \alpha_3$

3) Вследствие равенства углов между общими сторонами, делаем вывод, что все треугольники одинаковы $\Rightarrow$ площадь 2 из них будет равна $\frac{S}{2}$

Ответ: $\frac{S}{2}$

(N7) Катя, Вова

(1) 2021 V 2023

пусть 1 ходом Катя меняет 2023 $\Rightarrow$ т.к. 7021 - простое, то она может получить (2021; 2) а) или (2021; 2022) б)

а) Вова делает (2021; 1) и выигрывает, т.к. придется отнимать из 1 куча камни, потому что из (n; 0) $\rightarrow$ (0; 0)

сумма четная $\Rightarrow$ выигр. Вова

б) (2021; 2022) $\xrightarrow{B}$ (2021; 1) $\Rightarrow$ выигрывает Вова (См. п. а)

(2) 2023 = 1·7·17·17 $\Rightarrow$ Катя, изменив 2021, может получить:

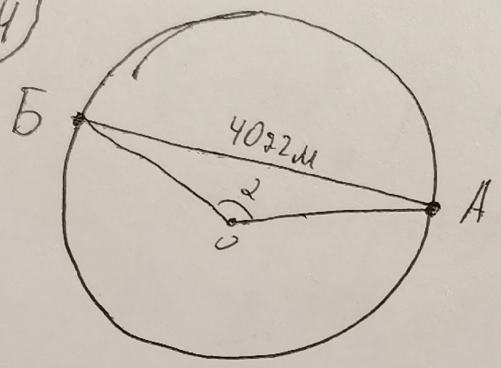
в) 2020, г) 2014, д) 2004

в) (2020; 2023) $\xrightarrow{B}$ (2020; 3) 2020+3=2023 $\Rightarrow$ удваивая 1 - выиграет Катя

удваивая от 2020 3 - Катя, 2 - тоже Катя.

5

№4



Чистовик

$v_м = \frac{2\pi R}{32} = \frac{\pi R}{16}$ м/мин

$v_в \in [\frac{2\pi R}{55}; \frac{\pi R}{32}]$

1) навстречу: $(v_м + v_в) \cdot t_{б_1} = 2\pi R$

$v_в t_{б_1} = \frac{\pi R \alpha}{180}$

$\cos\alpha = 1 - 2\left(\frac{2021}{R}\right)^2$ (Т. косинусов)

Если бы $v_в = \frac{\pi R}{32}$, то он проехал бы $\frac{1}{3}$ круга $= \frac{\pi R}{3} = \frac{\pi R \alpha}{180}$

$\Downarrow$

$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{2021}{R}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{2021}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$R = 2021\sqrt{2}$

Ответ: $R = 2021\sqrt{2}$

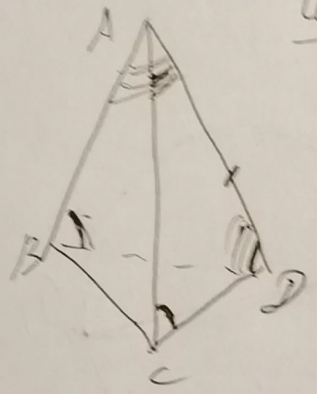
Черновик

1

$\frac{2\pi R}{55}$ ⊙

$\frac{2\pi R}{32}$ $\frac{55}{32}$

$2\pi R \cdot \frac{55}{32}$



$\alpha_3+\alpha_2$ $\frac{2\pi R}{55}$ $\frac{2\pi R}{32}$

$\gamma_1+\beta_2$

d_1+d_2 $S=S_1+S_2=\frac{87}{55}x \Rightarrow S_2=\frac{55}{87}S$

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{55}{32}$

$\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1+\beta_2+d_1+d_2=360^0$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3+d_1+d_2+d_3=360^0$ ⊖

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3$

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=d_1+d_2+d_3$

$\gamma_1-\alpha_1+\beta_2-d_3=0$

$\gamma_1+\beta_2=\alpha_1+d_3$

$\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1+\beta_2+d_1+d_2=360^0$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3+d_1+d_2+d_3=360^0$

$\alpha_1+\beta_2+d_1+d_2-\gamma_2-\gamma_3=0$

$d_1+d_2+\underset{d_3}{\beta_2}=\underset{\gamma_1}{\alpha_1}+\gamma_2+\gamma_3$

$\begin{cases} d_1=d_2 \vee d_1=\alpha_3 \\ \alpha_2=d_2 \vee \alpha_2=\alpha_3 \end{cases}$

$f\,\underbrace{f\,f\,f\,f(x)}_{\parallel}=0$

$x^2+6x+6=0$

$x_{1,2}=\frac{-6\pm 2\sqrt{3}}{2}=-3\pm 2\sqrt{3}$

2020+2

2022 | :2

1011 нечет

$g(x)=3\pm 2\sqrt{3}=x^2+6x+6-3+2\sqrt{3}=0$ $D<0$

$x^2+6x+\underbrace{6-3}_{3}-2\sqrt{3}$ $D>0$

$x_{1,2}=36+12+8\sqrt{3}=48+8\sqrt{3}=8(6+\sqrt{3}=2\sqrt{2(6+\sqrt{3})}$

$D=36+12-8\sqrt{3}=48-8\sqrt{3}$

$2\sqrt{2(6-\sqrt{3})}$

$f(f(f(f(f(x))))=0$

$\Downarrow$

$3\pm 2\sqrt{3}$

$(x+3)^2-3 \Rightarrow$ при любом $x\neq -3$ ф-ия возр.

и в 0 обращается только при $x=-3\pm\sqrt{3}$

заметим, что $f(-3)=-3$

$2019 \,|\, 3$

$21 \quad 673$

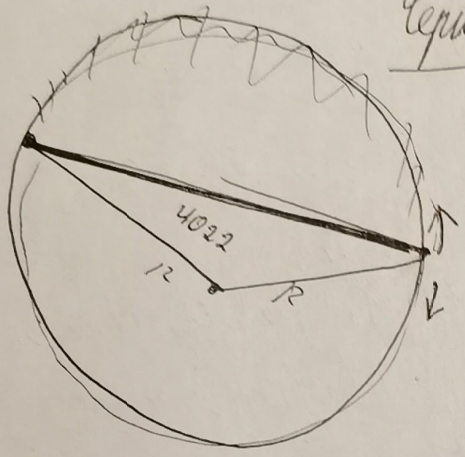
9

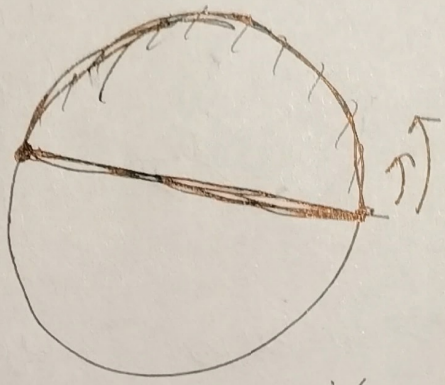
$-673 \to (1;3)$

1111

(2)

Человек





$\frac{2\pi R}{2\pi n}$

$w_M = \frac{2\pi R}{32} = \frac{\pi R}{16}$

$w_B = \frac{32}{55} w_M$

$w_B \in [\frac{2\pi R}{55}; \frac{2\pi R}{64}] = [\frac{\pi R}{55}; \frac{\pi R}{32}]$

$\frac{32}{55} w_M \leq w_B \leq \frac{w_M}{2}$

Навстречу: $w_B t_1 + w_M t_1 = 2\pi R$

$\frac{1}{16} t_1 + \frac{2}{x} t_1 = 2$

$\pi R \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi R \alpha}{180}$

$2 \cdot 2011 \quad 4 \cdot (2011)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{R^2 - 2 \cdot 2011^2}{R^2} = 1 - \frac{2 \cdot 2011^2}{R^2} = 1 - 2\left(\frac{2011}{R}\right)^2$

$\cup = l = \frac{\pi R \cdot \arccos\left(1 - 2\left(\frac{2011}{R}\right)^2\right)}{180} = \frac{2}{\frac{1}{16} + \frac{2}{x}} \cdot \frac{2\pi R}{x}$

$\arccos\left(1 - 2\left(\frac{2011}{12}\right)^2\right) = \frac{\pi \cdot 2}{\left(\frac{1}{16} + \frac{2}{x}\right) x} = \frac{2\pi}{\frac{x}{16} + 2}$

$-1 \leq \frac{x}{16} + 2 \leq 1$

$\frac{x}{16} + 2 \leq 2\pi$

$x \leq 32\pi - 32$

$\frac{x}{16} + 2 \geq -2\pi$

$\frac{x}{16} + 2 \geq 2\pi$

$x \geq 32\pi - 32$

$x \geq -32\pi - 32$

$X = \frac{32(n+1) + \frac{16l}{\pi R}}{n + \frac{l}{2\pi R}} =$

$= \frac{l(32\pi R(n+1) + 16l)}{2n\pi R + l} =$

$= \frac{64\pi R(n+1) + 32l}{2\pi n R + l} =$

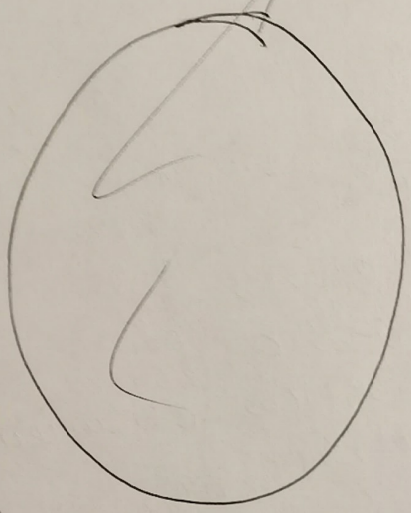
$= 32 + \frac{64\pi R}{2\pi n R + l}$

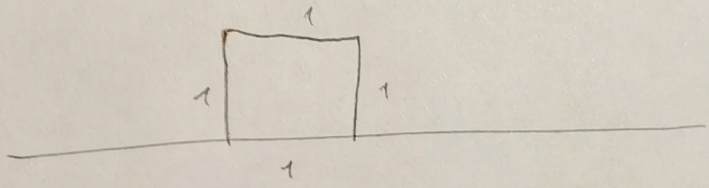
$\frac{n \cdot 2\pi R + l}{w_B} = \frac{(n+1) 2\pi R + l}{w_M + w_B}$

$\frac{n \cdot 2\pi R + l}{\frac{2\pi R}{x}} = \frac{(n+1) 2\pi R + l}{\frac{2\pi R}{32}} \Rightarrow nx + \frac{lx}{2\pi R} = 32(n+1) + \frac{16l}{\pi R}$

Черновик

4

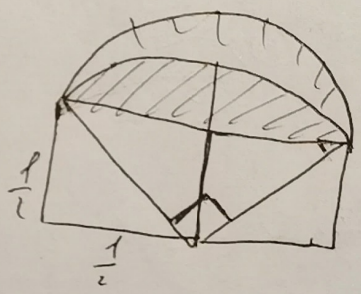


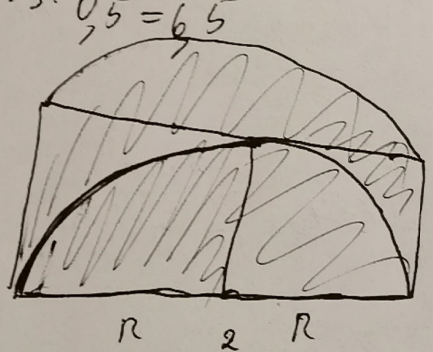


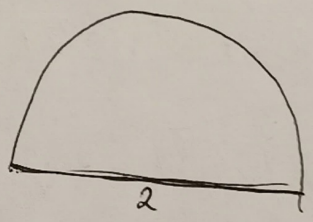
1) - $S=4$ (каждая сторона ~~ко~~ коснулась)

2) ~~S_{2}~~ $\frac{P}{2}=l \Rightarrow P=2 \Rightarrow a=0,5$

$S = 13 \cdot 0,5 = 6,5$







$S = aS + \frac{1}{4}\pi \cdot R^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2 = \frac{\pi}{2}+1$

$R = a\sqrt{2} = \sqrt{2}$ $\quad 4S = 2\pi + 4$

~~$2\pi R$~~ $\frac{2\pi R}{4} + \frac{2\pi R^2}{4} + \frac{2\pi R}{2} = 2\pi R = 2\pi$

$4 \Rightarrow S$ $\quad$ 2) $S_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\pi R_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\pi$

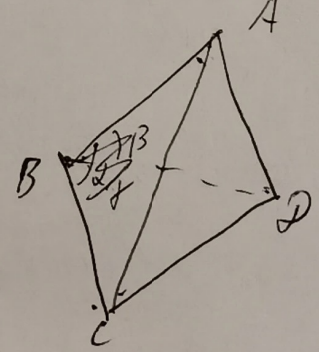
$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$13S_1 = \frac{13}{4} + \frac{13}{8}\pi$

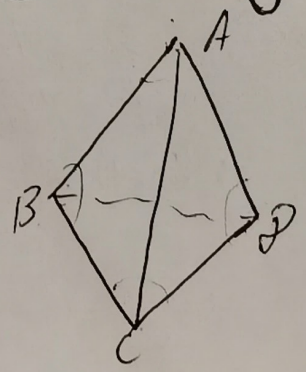
$\frac{13}{4} = 3,25$, $\frac{13}{8}\pi = 1\frac{5}{8}\pi$

$4S - 13S_1 = 2\pi + 4 - 3,25 - 1,625\pi = 0,375\pi + 0,75 = \frac{3}{8}\pi + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

N6



S



Человек (6)

2021
простое
1·2021

V 2023 = 7·17·17

V 7·17·17
1·2023

К 1·2021
П 2020

2 2023

Ч 1
П 3 1
К 2 1
П 1 1
К 1 0
П 0 0

2021 - 2^{-1} - Петя

2020 1 - Петя

К 2021
П 2021 2022
К 0
П 0 X

2022 → К 1·2021

К 2020 1

2021 V 2023 → 2021 2 → Петя
2021 V 2023 → 2021 2021 → Петя
2021 V 2023 →

2021 - 7 → 2014 2023 → 2014 2021
2·1007

2021 - 17 → 2004 2023 → 2004 19
2·1007
2·2·501
2·2·3·167

2·1007 = 7·13·53

1007 | 19
95 53
57

2021-1 → 2020 2023
2020 3 13
К 2020 1 → П
К 2017 3 → 2017 2
2016 1
2017 1
2016 2
2015 1 → 3

Черновик (7)

$(x+3)^2-3$ $(x^3+3)^2-3$

$f(f(x)) = (x_2+3)^2-3 = (x_1+3)^4-3$

$f(f(f(x))) = (x_1+3)^8-3$

$f(f(f(f(x)))) = (x_1+3)^{16}-3$

$f(f(f(f(f(x))))) = (x_1+3)^{32}-3$

$x+\frac{x}{2}=y$

$x=\frac{2}{3}y$

$x_1 = \sqrt[32]{3}-3 \quad \vee \quad x_1 = \sqrt[32]{3}+3$

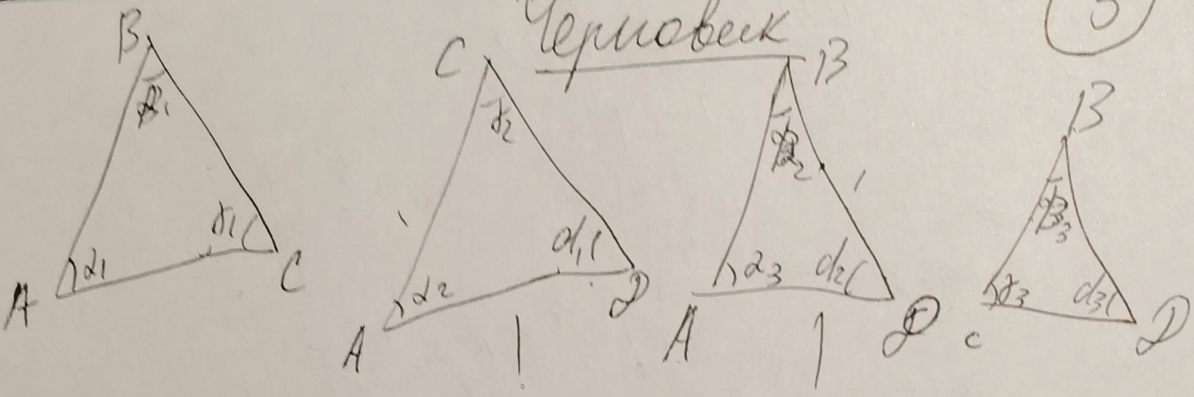
$S_{цел} = q_1 \cdot$ $\vee$ $\frac{1}{A}$

$4+2+1=7$

$V_t = \frac{1}{2}V_t = \frac{V_t}{2}$

Черновик

5



$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3$

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=d_1+d_2+d_3$

$(\alpha_2+\gamma_2)+(\alpha_1+\gamma_1)+(\alpha_3+\gamma_3)=\beta_1+\beta_2+\beta_3+d_1+d_2+d_3$

$\underbrace{(\alpha_2+\gamma_2+d_1)}_{180}+\underbrace{(\alpha_1+\gamma_1+\beta_1)}_{180}+\underbrace{(\alpha_3+\beta_2+d_2)}_{180}+2\gamma_3=2\beta_1+2\beta_2+2d_1+2d_2+\overbrace{d_3+\beta_3+\gamma_3}^{180^0}$

$2\gamma_3+360^0=2\beta_1+2\beta_2+2d_1+2d_2$

$\gamma_3+180^0=\beta_1+\beta_2+d_1+d_2$

$180^0-\beta_3-d_3$

$360^0=\beta_1+\beta_2+\beta_3+d_1+d_2+d_3$

66
×289
7
2023

2021 кр

2023 ж

IK

2021
2x 3x

2021 | 11
-19
32
-88
41
18

2023
2x 3x

2100-77

3300-11
289

7·17·17

2021 | 13
-72
-65
71
155

2021 | 17
-32
151
1

2021 | 19
-19
121
10

2021 | 23
-184
181
-161
20
887