МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Павлов Евгений Александрович**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	15	0

Чистовик

№3.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+|y-9|=4 & (1)\\ \sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2 & (2)\end{cases}$$

подкоренные выражения ≥ 0:

$$\begin{cases} x^2-y\geq 0\\ x^2-y-16\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x^2-y\geq 16, \text{ т.е } \sqrt{x^2-y}\geq 4.$$

Тогда $\underbrace{\sqrt{x^2-y}}_{\geq 4}+\underbrace{|y-9|}_{\geq 0}=4 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-y}=4\\ |y-9|=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y=16\\ y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=-5\end{array}\right.\\ y=9\end{cases}$

Проверим эти решения подстановкой во (2):

$\sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=|x-3|=2$

а) $x=5$ - подходит. $|5-3|=2$.

б) $x=-5$ - не подходит $|-5-3|=8\neq 2$

Ответ: $(5;9)$

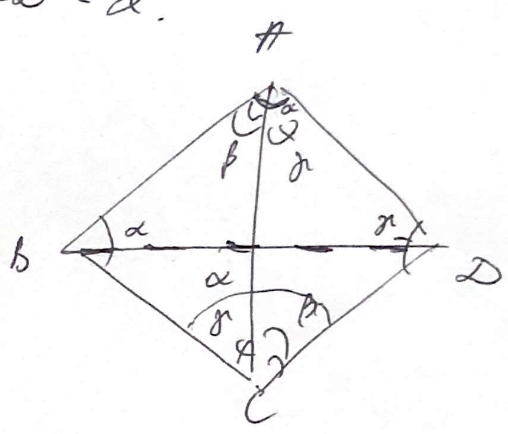
№6.

$\angle BAD = \alpha$; $\angle BAC = \beta$; $\angle CAD = \gamma$

$AB = CD$

$AD = BC$ по усл.

$\left.\begin{array}{l} \Delta BAD = \Delta BCD \text{ (по III призн.)} \\ \Delta ABD = \Delta ADC \text{ (по II призн.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BCD = \alpha.$



$\angle ACD = \beta$; $\angle BCA = \gamma$, т.к.

$\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ$

$\angle BAC = \angle ACD = \alpha$ (по I призн.)

$\Delta ABC = \Delta ACD = \Delta BCD = \Delta ABD.$

$S_{пов} = 4S_{\Delta ABC} = S \Leftrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{S}{4}.$

Ответ: $\frac{S}{4}.$

Чистовик

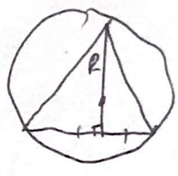
№5

Заметим, что наиб. впис. окружность — это окр., впис. в треуг., т.к. если она не кас. всех сторон, то её можно сдвинуть, чтобы она не касалась ни одной стороны, а потом увеличить.

Аналог. для наиб. треуг. у окр. — он вписан. в окр., т.к. треуг. остроуг. Тогда когда $2x'$ — основание сумм. треуг.
Тогда если R — рад. окр., то $x' = \frac{R}{tg\frac{\alpha}{2}}$

Если $2x$ — сторона нового треуг., то

$R = \frac{2}{3} \cdot l_{мед} = x \cdot \frac{2}{3} tg\alpha$, ч.



$x' = \frac{\frac{4}{3}x}{(1-tg\frac{\alpha}{2})^2}$, ч. т.к. $30° \leq \alpha \leq 60°$

$tg\frac{\alpha}{2}$ — монот.

при этом $tg\frac{\alpha}{2} < 1$, а $(1-tg\frac{\alpha}{2})^2$ — монот.

ч., макс. знач. x достиг. при границе знач. α, ч.

$S_\alpha = \frac{1}{\left(\frac{4/3}{(1-tg\frac{\alpha}{2})^2}\right)^2}$ у подоб.

Т.к. $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $S_{min} = \frac{7}{4} - \sqrt{3}$

$S_{max} = \frac{63}{4} - 9\sqrt{3}$.

чистовик!

№3

$x^2+bx+a=0$ - два ц. к. $\exists$ $x_1 \geq x_2$

$x^2+cx+a=1$ - два ц. к. $\exists$ $x_3 \geq x_4$

По т. Виета $x_3 x_4 = a-1 > 1$ (т.к. оба к. отриц.)

$x_1 x_2 = a > 2$

Заметим, что $x_1 x_2$ и $x_3 x_4$ - это сост. числа, т.е. a и $a-1$ - сост. Тогда нужно найти наименьшее a такое, что a и $a-1$ - сост. Переберём:

- $a=3$ не подх.
- $a=4$ не подх., т.к 3 - прост.
- $a=5$ не подх
- $a=6$ не подх
- $a=7$ не подх.
- $a=8$ не подх
- $a=9$ - подх., если кратные к. считаются.

Пример при $a=9$:

$x_1=x_2=3 \Rightarrow b=-6$

$x_3=4$, $x_4=2 \Rightarrow c=-6$

Если не считаются кратные к., то:

- $a=10$ не подх т.к $a-1=9$
- $a=11$ не подх
- $a=12$ не подх
- $a=13$ не подх
- $a=14$ не подх

$a=15$ - подх.

Пример при $a=15$: $x_1=5$, $x_2=3 \Rightarrow b=-8$

$x_3=7$, $x_4=2 \Rightarrow b=-9$

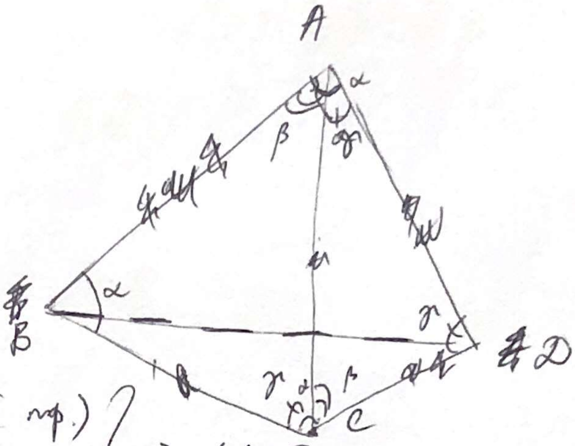
Ответ: наим. $a=9$, если корни считаются

$a=15$, если нет.

5

Черновик

№6.



$\angle BAD = \alpha$; $\angle BAC = \beta$; $\angle CAD = \gamma$

$AB = CD$

$AD = BC$

$\left.\begin{array}{l}\Delta BAD = \Delta BCD \text{ (по III пр.)} \\ \Delta ABD = \Delta ADC \text{ (по II пр.)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle BCD = \alpha.$

$\angle ACD = \beta$; $\angle BCA = \gamma$, т.к

$\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ$

$\angle BAC = \angle ACD = \alpha$. (по I пр.)

$\Delta ABC = \Delta ACD = \Delta BCD = \Delta ABD$;

$S_{пов} = 4 S_{\Delta ABC} = S \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{S}{4}$

Черновик

№2

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+|y-9|=4\\ \sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2\end{cases} \Leftrightarrow$$

D_f: $x^2-y\geq 16$

$$\begin{cases}|y-9|=4-\sqrt{x^2-y} \quad (1)\\ |x-3|=2-\sqrt{x^2-y-16}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y-9=4-\sqrt{x^2-y}\\ y-9=\sqrt{x^2-y}-4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} x-3=2-\sqrt{x^2-y-16}\\ x-3=\sqrt{x^2-y-16}-2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-y}=4-(y-9)\\ \sqrt{x^2-y}=y-9+4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-y-16}=2-(x-3)\\ \sqrt{x^2-y-16}=x-3+2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-y}=-y+13\\ \sqrt{x^2-y}=y-5\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-y-16}=-x+5\\ \sqrt{x^2-y-16}=x-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x^2-y=y^2-26y+169\\ x^2-y=y^2-10y+25\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} x^2-y-16=x^2-10x+25\\ x^2-y-16=x^2-2x+1\end{array}\right.\end{cases}$$

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3+11^3+12^3=$

$=1+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121+144=650$

$=1+8+27+64+125+216+316+512+729+1000+1331+1728$

У D_f $x^2-y-16\geq 0 \Leftrightarrow x^2-y\geq 16$

при $x^2-y>16$ ур. (1) не имеет реш. т.к. $4-\sqrt{x^2-y}<0$

Тогда $x^2-y=16$

$$\begin{cases}|y-9|=0\\ |x-3|=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r} 24216\\ +\ 312\\ \hline 24528\\ +\ 84\\ \hline 24612\\ -\ 3900\\ \hline 20712\end{array} \qquad \begin{array}{r} 1728\\ +\ 1331\\ \hline 4059\\ +\ 729\\ \hline 4788\\ +\ 512\\ \hline 5300\\ +\ 313\\ \hline 5613\\ +\ 216\\ \hline 5829\\ +\ 125\\ \hline 5954\\ +\ 64\\ \hline 6018\\ +\ 27\\ \hline 6045\\ +\ 9\\ \hline 6054\end{array} \qquad \begin{array}{r} 65\\ \times\ 6\\ \hline 390\end{array} \qquad \begin{array}{r} 6054\\ \times\ 4\\ \hline 24216\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144\\ \times\ 12\\ \hline 288\\ +\ 1440\\ \hline 1728\end{array} \qquad \begin{array}{r} 121\\ \times\ 11\\ \hline 121\\ +\ 121\\ \hline 1331\end{array}$$

№1

$f(n)=4n^3-6n^2+4n+7$

$\cancel{4\cdot 1-6\cdot 1+4\cdot 1+7+4\cdot 2^3-6\cdot 2^2+4\cdot 2+7\ldots}$

$\cancel{f(1)+f(2)+\ldots f(12)=7\cdot 12+4(1+2+3+\ldots+12)-6(1^2+2^2+3^2+\ldots 12^2)+4(1^3+2^3+3^3+\ldots 12^3)}$

$\cancel{=7\cdot 12+4\cdot 78-6\cdot 650+4\cdot 6054=84+312-3900+24216=}$

№3. Черновик

$x^2+bx+a=0$ по два к.

$x^2+cx+a-1=0$

$$\begin{cases} b^2-4a>0 \\ c^2-4(a-1)>0 \\ \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2}>-1 \\ \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2}>-1 \\ \dfrac{-c+\sqrt{c^2-4(a-1)}}{2}>-1 \\ \dfrac{-c-\sqrt{c^2-4(a-1)}}{2}>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-4a>0 \\ c^2-4(a-1)>0 \\ -b+\sqrt{b^2-4a}>-2 \\ -b-\sqrt{b^2-4a}>-2 \\ -c+\sqrt{c^2-4(a-1)}>-2 \\ -c-\sqrt{c^2-4(a-1)}>-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{b^2-4a}>b-2 \\ \sqrt{b^2-4a}<2-b \\ \sqrt{c^2-4(a-1)}>c-2 \\ \sqrt{c^2-4(a-1)}<2-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b-2\geq 0 \\ b^2-4a>(b-2)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b-2<0 \\ b^2-4a>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} 2-b>0 \\ b^2-4a<(2-b)^2 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c-2\geq 0 \\ c^2-4(a-1)>(c-2)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} c-2<0 \\ c^2-4(a-1)>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} 2-c>0 \\ c^2-4(a-1)<(2-c)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\geq 2 \\ \cancel{b^2}-4a>\cancel{b^2}-4b+4 \end{cases} \\ \begin{cases} b<2 \\ b^2-4a>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} b<2 \\ \cancel{b^2}-4a<\cancel{b^2}-4b+4 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c\geq 2 \\ \cancel{c^2}-4(a-1)>\cancel{c^2}-4c+4 \end{cases} \\ \begin{cases} c<2 \\ c^2-4(a-1)>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} c<2 \\ \cancel{c^2}-4(a-1)<\cancel{c^2}-4c+4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$-4a+\cancel{4}>-4c+\cancel{4}$

$c^2-4a+4>0$

$-4a+\cancel{4}<-4c+\cancel{4}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\geq 2 \\ a<b-1 \end{cases} \\ \begin{cases} b<2 \\ a<\dfrac{b^2}{4} \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} b<2 \\ a>b-1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c\geq 2 \\ a<c \end{cases} \\ \begin{cases} c<2 \\ a<\dfrac{c^2}{4}+1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} c<2 \\ a>c \end{cases} \end{cases}$$

8

Чистовик

Вариант 21 0107

№1

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\dots+f(12)$, $f(n)=4n^3-6n^2+4n+7$

$S=4(1^3+2^3+\dots 12^3)-6(1^2+2^2\dots+12^2)+4(1+2+\dots 12)+7\cdot 12$.

$1^3+2^3+\dots+12^3=\frac{12^3(12+1)^2}{4}$

Вывод ф-лы:

$2^4+3^4+\dots+(n+1)^4=1^4+2^4+\dots+n^4+4(1^3+2^3+\dots n^3)+6(1^2+\dots n^2)+$
$+4(1+2+\dots 12)+1.$

Следовательно,

$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{1}{4}\left((n+1)^4-(n+1)-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right).$

$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{1}{4}(n+1)((n+1)^3-1-n(2n+1)-2n)$

$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{1}{4}(n+1)(n^3+3n^2+3n+1-1-2n^2-n-2n)$

$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{1}{4}(n+1)(n^3+n^2)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

По известным формулам: $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2\dots+n^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Тогда:

$S=4\cdot\frac{12^2(12+1)^2}{4}-6\cdot\frac{12(12+1)(2\cdot 12+1)}{6}+4\cdot\frac{12(12+1)}{2}+7\cdot 12=$

$=12^2\cdot 13^2-12\cdot 13\cdot 25+2\cdot 12\cdot 13+84=156(156-25+2)+84=$

$=156\cdot 133+84=\underline{20832}$

Ответ: 20832