МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Пак Матвей Евгеньевич**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	5	5	15	0

Чистовик

Вариант 210107. Лист №1

Задача 3

• Пусть x_1, x_2 - корни ур-я $x^2+bx+a=0$, x_3, x_4 - корни ур-я $x^2+cx+a-1=0$. По условию: $x_1, x_2, x_3, x_4 < (-1)$.

По т. Виета:
$$\begin{cases} x_1 x_2 = a \\ x_3 x_4 = a-1 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = a = x_3 x_4 + 1.$$

Т.к. $x_3 < -1$ и $x_4 < -1$, то $x_3 x_4 > 1$, а т.к. они целые, то $x_3 x_4 \geq 4$. $\Rightarrow a \geq 5$. 1°) Если $a=5$, то $x_1 x_2 = 5$ - невозможно т.к. a, очевидно, целое.

(*) $x_1, x_2 < (-1)$ и $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

2°) Если $a=6$, то $x_3 x_4 = 5$ - невозможно по тем же причинам. 3°) $a=7 \Rightarrow x_1 x_2 = 7$ - не м.б. из-за (*)

4°) $a=8 \Rightarrow x_3 x_4 = 7$ - не м.б.

5°) $a=9$ - м.б., например: $x_1 = x_2 = -3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -4$.

Т.о. минимально возможное a - это 9.

Ответ: 9.

Чистовик

Лист №2

Задача 1

- $\sum_{i=1}^{12}(4i^3-6i^2+4i+7)=4\sum_{i=1}^{12}i^3-6\sum_{i=1}^{12}i^2+4\sum_{i=1}^{12}i+7\cdot 12=$

$= \left|\begin{array}{l}\text{Используем формулы: (доказать их можно по индукции)}\\ \sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\ \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\end{array}\right| \ominus$

$\ominus\ 4\cdot\frac{12^2\cdot 13^2}{4}-6\cdot\frac{12\cdot 13\cdot 25}{6}+4\cdot\frac{12\cdot 13}{2}+7\cdot 12=$

$=12^2\cdot 13^2-12\cdot 13\cdot 25+24\cdot 13+7\cdot 12=\cancel{12\cdot 13(13\cdot 2)}+$

$=12\cdot 13(12\cdot 13-25+2)+7\cdot 12=156\cdot 133+7\cdot 12=$

$=20812$

$$\begin{array}{r} \times\ 156\\ 133\\ \hline 468\\ 468\ \\ 156\ \ \\ \hline 20748\\ +\ \ 84\\ \hline 20812 \end{array}$$

Ответ: 20812.

Чистовик.

Лист №3

<u>Задача 2</u>

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-9| = 4, & (1) \\ \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 2. & (2) \end{cases}$$

Посмотрим на ур-е (2): т.к. x^2-y-16 под корнем, то:

$x^2-y-16 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2-y \geq 16$ из (1) $x^2-y \geq 0$. Поэтому

$x^2-y \geq 16 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2-y} \geq 4$.

Посмотрим на (1):

$|y-9| \geq 0$, а $\sqrt{x^2-y} \geq 4$, поэтому если $\sqrt{x^2-y} > 4$, то решений

у (1) не будет. Поэтому: $\begin{cases} \sqrt{x^2-y} = 4 \\ |y-9| = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y = 9 \end{cases}$.

1°) $x=-5$, $y=9$.

Подставим во (2):

$\sqrt{25-9-16} + |-8| = 2$ - не верно

2°) $x=5$, $y=9$.

Подставим во (2):

$\sqrt{25-9-16} + |2| = 2$ - верно.

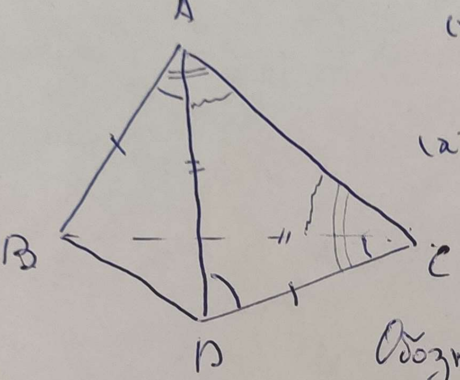
Т.О. единственное решение - $(5; 9)$.

Ответ: $\{(5; 9)\}$

Чистовик

Лист №4

Задача №6



(1) $\triangle ABD = \triangle CBD$ (по 3ём сторонам)

$\Downarrow$

$\angle \widehat{BAD} = \angle \widehat{DCA}$

(2) $\triangle ABC = \triangle CDA$ (по 3ём сторонам)

т.о:

$\angle \widehat{BAC} = \angle \widehat{DCA}$ и $\angle \widehat{BCA} = \angle \widehat{DAC}$.

Обозначим $\widehat{BAD} = \frown$, $\widehat{BAC} = \approx$, $\widehat{DAC} = \sim$.

По условию $\frown + \approx + \sim = 180^0$.

Рассмотрим $\triangle CDA$: в нем два угла: $\sim$ и $\approx$. Тогда третий будет $\frown$. Тогда $\triangle BAD = \triangle CDA$ (по 2ум сторонам и углу между ними). $\triangle BAD = \triangle CDA \overset{(1)}{=} \triangle CBD \overset{(2)}{=} \triangle ABC$.

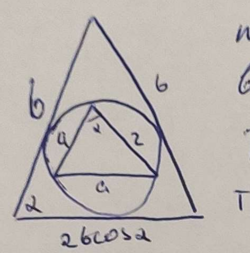
Тогда площади всех этих четырех треугольников равны и в сумме дают $S \Rightarrow S(ABC) = \frac{S}{4}$.

Ответ: $\frac{S}{4}$.

Чистовик

Лист №5

Задача №5



Очевидно, что максимальный по площади круг – это вписанный в треугольник круг, т.к. радиус - максимален. Также понятно, что все 3 точки подобного треугольника должны лежать на окр-ти.

Докажем это:

Пусть у треугольника площадь максимальна и его точки лежат внутри круга. Тогда сущ-вует гамотетия с $k>1$, переводящая эти точки на окр-ть.

По условию ~~???~~ 2 треуг. подобен 1.

т.к. 3 точки лежат на окр-ти, то это описанная окр-ть около 2 и впис. в 1. Пусть b - боковая сторона 1 треуг., a - боковая сторона 2 треуг.

$$S = 1 = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin(180 - 2\alpha) \Rightarrow b^2 = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

$$\frac{S}{S_{иск}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2; \quad r_{впис.1} = R_{опис.2} = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{b + b + 2b\cos\alpha} = \frac{1}{b + \cos\alpha\, b}$$

т.о:

$$\frac{1}{b(1+\cos\alpha)} = \frac{a}{2\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{S}{b(1+\cos\alpha)} = \frac{a}{2\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} b^2 \sin 2\alpha}{b(1+\cos\alpha)} = \frac{a}{2\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha \cdot b}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{a}{2\sin\alpha} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{2\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

См. на след. стр.

Чистовик

Лист №6.

Задача №5

т. об. $S_{max} = \left(\frac{a}{6}\right)^2 \cdot 1 = \left(\frac{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^2 = S(\alpha)$.

~~Исследу~~ $S(\alpha) = \left(\frac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha+1}\right)^2 =$

$= \left(2(1-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha\right)^2$.

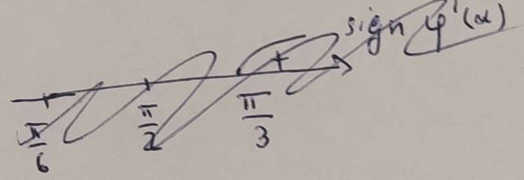
Исследуем на макс. и мин. ф-ю:

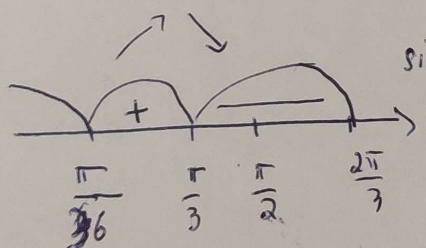
$\sqrt{S(\alpha)} = \varphi(\alpha) = 2(1-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha$;

$\varphi'(\alpha) = 2\left(-\sin\alpha(1-\cos\alpha) + \cos\alpha\cdot\sin\alpha\right) = 2\sin\alpha\left(-1+2\cos\alpha\right) =$

$= 4\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)$

$\vee$ 0 при $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$





sing $\varphi'(\alpha)$

Из графика sign $\varphi'(\alpha)$ понятно, что при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ф-я максимальна.

$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

~~минимум либо в точках $\frac{\pi}{6}$, либо в $\frac{2\pi}{3}$.~~

~~$S\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\,2\,2(\alpha+$~~

а минимум ф-ии в точке $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{3}{4}\left(4+3-4\sqrt{3}\right) = \frac{3}{4}\left(7-4\sqrt{3}\right)$.

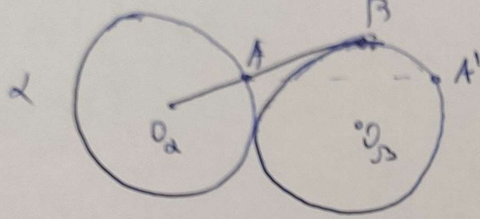
Ответ: $S_{max} = \frac{1}{4}$,

$S_{min} = \frac{3}{4}\left(7-4\sqrt{3}\right)$.

Чистовик

Лист №7.

Задача №4.



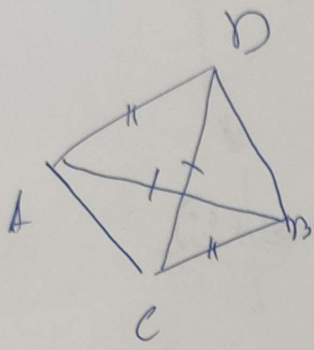
Понятно, что скорости велосипедистов одинаковы. Сделаем паралл. перенос на ~~тееx~~ вектор $\overrightarrow{O_\alpha O_\beta}$. Тогда $\alpha \to \beta$.

Пусть A' - образ точки A.

$|AA'| = d = const$

Теперь нужно понять, когда $|AB| \leq |AA'|$. Это, очевидно, зависит от угла $\hat{B}$. Если $\hat{B}$ тупой, то $|AB| < |AA'|$, если острый, то $|AB| > |AA'|$. ~~т.е.~~ Тогда очевидно, что это происходит ровно половину времени.

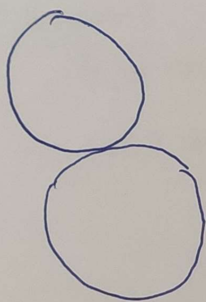
Ответ: 1час.

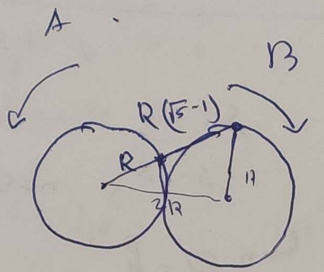


$\sin(45^\circ - 30^\circ) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$

$(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})^{2021} =$

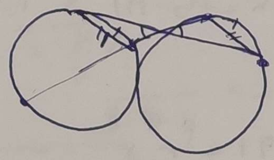


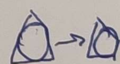


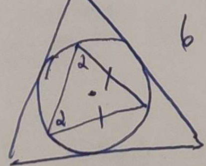
$\cancel{\sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

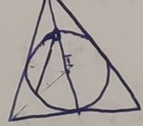
$R(\sqrt{5}-1)$

$S \leq d$

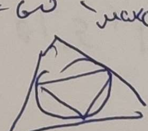


Поворот гом. с центром I, при кот. 





Если $\alpha = 60^\circ$ макс. $\frac{S}{4}$



$r_{впис.} = \frac{S}{p}$, $R = \frac{6}{2\sin\alpha}$

$r = \frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha + 4}$, $R = \frac{1}{2\sin(2\alpha)}$ $\quad k = \frac{R}{r} = \frac{\sin\alpha + 4}{4\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha} =$

$\alpha = 60^\circ$:

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 4}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 8}{}$

Черновик

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + |y-9| = 4, \\ \sqrt{x^2-y-16} + |x-3| = 2 \end{cases}$$

$x^2-y-16 \geqslant 0$

$\begin{cases} x^2-16 \geqslant y \\ x^2 \geqslant y \end{cases}$ $2x^2-16 \geqslant 2y$

$x \in [1;5]$ $x^2-8 \geqslant y$

$\cancel{x^2 \in [x; 25]}$

$x^2-16 \in$

$|y-9| \leq 4 \iff y \in [5;14]$

5 $25-9$

$\sqrt{x^2-y} \leq 4$

$|y-9| \leq 4 \iff y \in [5;14]$

$x^2-y \leq 16$

$x^2 \leq 21$

$x^2 \geqslant 30$

25

$x^2-y-16 \geqslant 0 \Rightarrow x^2-y \geqslant 16 \Rightarrow \sqrt{x^2-y} \geqslant 4$

$x^2-y=4$

$\cancel{y=x^2}$ $|y-9|=4$

$y=13$ или $y=5$

$\sqrt{13}$

$x^2-13=4$ $x^2-5=4$ $(3;5)$

$13-$ $x^2=17$ $x=\pm 3$

$9-5+$

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{2021} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{2020} \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right) =$$

$\cancel{\sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{7}}$

$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{9} + \dfrac{\sqrt{7}}{9}$

$$= \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{43 \cdot 44}$$

$\sqrt{}$

$= (2$

$\dfrac{2}{4.15}$

7

$\times\ \begin{array}{r}13\\12\end{array}$

26

13

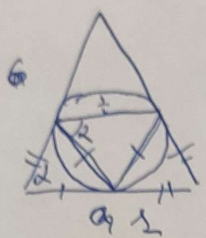
156

$-\ 25$

131

$\times\ \begin{array}{r}24\\13\end{array}$

$\alpha \in [30^\circ; 60^\circ]$, $S=1$



$6a \sin\alpha = 2S$

$6 = \frac{2}{\sin\alpha}$ $\quad p = \frac{1+2b}{2} = \frac{1+\frac{4}{\sin\alpha}}{2} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\sin\alpha}$

$\frac{n(n+1)}{2}$

$r = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{\sin\alpha}} = \frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha+4}$

$1+2+3=6$ $\quad \frac{3\cdot 4}{2}$

$1^2 \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$(1^3+2^3)(1+2) =$

$= 1^3+2^3+$

$1^2+2^2=5=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{6}$

$(1^2+2^2+\ldots+12^2)(1+\ldots+12) =$

$1^2+2^2+3^2=14=\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6}$ $\quad = S_3 +$

$(1+\ldots+12)^3 = 1$

$f'(n) = 12n^2-12n+4 =$

4

$D = 9-12$

$24n-12$

$= 3n^2-3n+1$

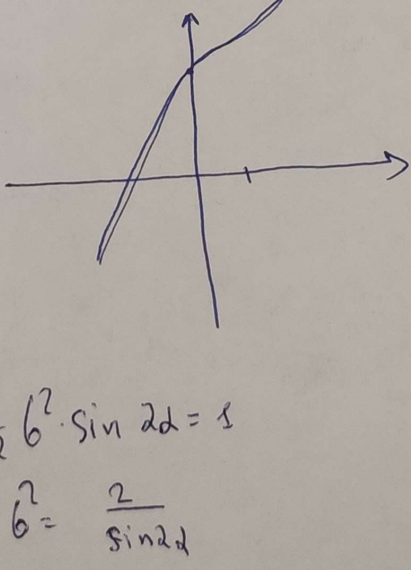
$\frac{2}{\sin 2\alpha}\ 2-2$

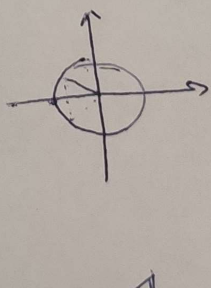
$f(0)=7,\ f(1)=9$

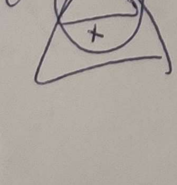
$\frac{ka+kb+kc}{2}$

$\frac{\quad}{a+b+c} = k$

$a = 2b\cdot\cos\alpha$



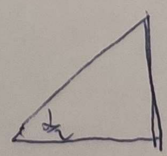




$\frac{1}{2}b^2\cdot\sin 2\alpha = 1$

$b^2 = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

$R_{опис.}$



$\frac{a}{2}$

Черновик

$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7 =$

~~$\cancel{x}$~~ $f(1) = 4 - 6 + 4 + 7 =$

$f(2) =$

$\cancel{4n^3 - 6n^2 + 4n + 7 +}$

$4 - 6 + 4 + 7 + 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4 + 7 =$

$= 7 \cdot 12 + 4(1^3 + 2^3 + \ldots + 12^3) - 6(\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2}_{S}) + 4(1 + \ldots + 12)$

$= 7 \cdot 12 +$

$\cancel{S(1 + \ldots 2 \cdot 12)}$ $1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2$

$x^2 + 6x + a = 0$ и $x^2 + 6x + a = 1$ 2 ч. корня $< (-1)$

$x_1 x_2 = a = x_3 x_4 + 1$

$x_3 < -1$

$x_4 < -1$

$x_3 x_4 \geqslant 4$

$\cancel{x_1 + x_2 = -6}$

$x_3 + x_4$

$a = \boxed{9}$

$x_1 = -3$ $x_3 = -2$

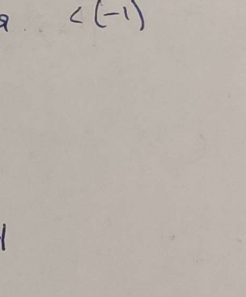
$x_2 = -3$ $x_4 = -4$

x^2

$2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha =$

$= 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{4 + 2} = \frac{1}{2}$$

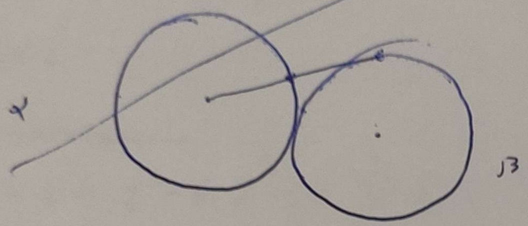


№4

Черновик Лист №7

Задача №4

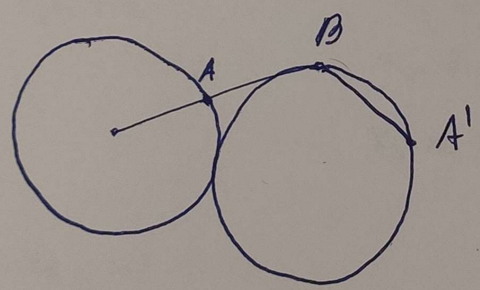
Понятно, что скорости велосипедистов одинаковы.



$$(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021} =$$

$$\underbrace{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})\ldots\ldots(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}_{2021}$$

$\cancel{\sqrt{3}}$.



$\alpha \to \beta$

$AB \geqslant AB'$

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников „Ломоносов"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
ученика 11³ класса ПФМЛ №239
г. Санкт-Петербурга ул. Кирочная д.8
Пак Матвея Евгеньевича

Апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы 60 за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что:

1) В задаче номер 3 в условии не оговорено, что корни каждого из уравнений <u>различные</u> целые числа. В своём решении я допускаю совпадение этих корней, поскольку в условии не оговорено иного. В связи с этим прошу добавить мне баллов за эту задачу, т.к. остальное решение при моем допущении абсолютно верно.

2) В задаче номер 1 по-видимому мне снимают 5 или более баллов за арифметическую ошибку. Прошу заметить, что ~~даже~~ все решение до последнего знака равенства верное. Можно даже найти вычислительную ошибку: В правом нижнем углу я складываю в столбик 10748 и 84, после чего получаю неверный ответ. Прошу пересмотреть баллы за эту задачу и добавить 3 балла, поскольку не совсем резонно снимать $\frac{1}{3}$ от всех баллов за ~~одну~~ арифметическую ошибку. Заранее спасибо.

31.03.2021

[signature]