МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Первеева Валерия Борисовна**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	15	0

М.

$f(1)+f(2)+\dots f(12)$ $f(n)=4n^3-6n^2+4n+7$ Черновик

Докажем, что $1^3+2^3+\dots n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$f(1)+f(2)+\dots f(12)=4(1^3+2^3\dots+12^3)-6(1^2+2^2\dots+12^2)+4(1+2+\dots12)+7=$

$=4\cdot\frac{12^2\cdot13^2}{4}-6\cdot\frac{12\cdot13\cdot25}{6}+4\cdot\frac{13}{2}\cdot12+7=144\cdot\cancel{186}-3900+\cancel{78}+7=24357$

~~24336~~ 24336 13·24 312 20832

$13\times12=156$, 156×25: 780, 312, 3900

$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$

$(n+1)^2(n^2+4n^2+8n+4$

$49-48=1$ $\frac{-7\pm1}{4}$

k^2+4k^2 $4(1-\frac{\sqrt3}{2})^2\cdot\frac{3}{4}$

$x^2+bx+a=-1$ ← корни x_1 и $x_2\in\mathbb{Z}$

$x^2+cx+a=0$ ← корни x_3 и $x_4\in\mathbb{Z}$

По т. Виета

$\begin{cases}x_1\cdot x_2=a+1\\x_1+x_2=-b\\x_3\cdot x_4=a\\x_1+x_2=-c\end{cases}\Rightarrow a,b,c\in\mathbb{Z}$

$(1-\frac{\sqrt3}{2})^2=1-\sqrt3+\frac{3}{4}$

$3(1-\frac{\sqrt3}{2})^2$

$3(1+\frac{3}{4}-\sqrt3)=\frac{27}{4}-3\sqrt3$

Если $x_1\geq1$ и $x_2>1\Rightarrow x_1\geq2$ и $x_2\geq2\Rightarrow x_3\cdot x_4\geq4\Rightarrow a\geq4$

Начнем перебирать

1) $a=4\Rightarrow x_1\cdot x_2=5$, не подх. по условию корни >1

2) $a=5\Rightarrow x_3\cdot x_4=5$ анал.

3) $a=6$ $x_1\cdot x_2=7$ анал.

4) $a=7$ $x_3\cdot x_4=7$ анал

5) $a=8$ $x_1\cdot x_2=9\Rightarrow x_1=x_2=3$ один корень, а по усл. 2

6) $a=9$ $x_3\cdot x_4=9$ анал. 5

7) $a=10$

8) a

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+|y+8|=1\\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5\end{cases}$$

ОДЗ:
$x^2+y^2\geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y}\geq 1$

Черновик

$\sqrt{x^2+y}+|y+8|=1$

$|y+8|=1-\sqrt{x^2+y}\leq 1-1=0 \Rightarrow$

$|y+8|=0 \Rightarrow y=-8$

$x^2+y=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

Проверим корни

1) $x=-3$ $y=-8$

$\sqrt{9-8-1}+|-3+8|=5$ - верно

$5=5$

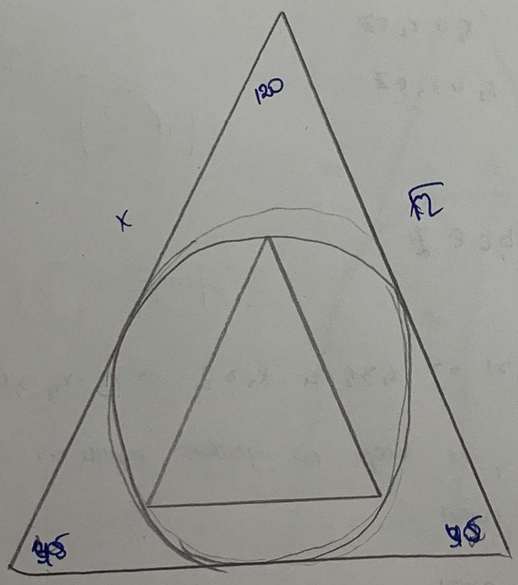
2) $x=3$ $y=-8$

$\sqrt{9-8-1}+|3+8|=5$

$11=5$ - неверно

$(-3;-8)$

1)



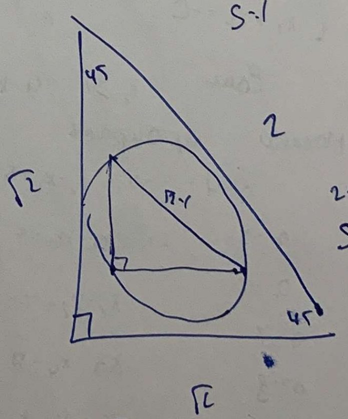
$S=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{2}$ sin max $=1 \Rightarrow \angle=45^\circ$

$x^2=$

$1=\frac{x^2}{2}$

$x=\sqrt{2}$

$S=1$



$r=\sqrt{2}-1$

$S=(3-2\sqrt{2})\pi$

$\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$ 0,04

Чистовик

Задача 3

Пусть корни ур-ния $x^2+bx+a=-1$ – x_1 и x_2, а корни уравнения $x^2+cx+a=0$ x_3 и x_4.

$$\begin{cases} x^2+bx+(a+1)=0 \\ x^2+cx+a=0 \end{cases}$$ по теореме Виета получим

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=a+1 \\ x_1+x_2=-b \\ x_3\cdot x_4=a \\ x_3+x_4=-c \end{cases}$$ => Т.к. по условию $x_1; x_2; x_3$ и $x_4 \in \mathbb{Z}$, то и a, b и $c \in \mathbb{Z}$!

По условию $x_3>1$ и $x_4>1$ => $x_3\geq 2$ и $x_4\geq 2$ => $a\geq 4$

Рассмотрим каждое значение a, начиная с 4, пока не найдем первое,

1) $a=4$ => $x_1\cdot x_2=5$, не подходит по усл. x_1 и $x_2 \in \mathbb{Z}$, x_1 и $x_2>1$

2) $a=5$ => $x_3\cdot x_4=5$ аналогично п.1 не подходит

3) $a=6$ => $x_1\cdot x_2=7$ аналогично не подх.

4) $a=7$ => $x_3\cdot x_4=7$ аналогично не подх.

5) $a=8$ => $x_1\cdot x_2=9$ => $x_1=x_2=3$ это один корень, а по условию ур-ние имеет 2 корня => не подх.

6) $a=9$ => $x_3\cdot x_4=9$ анал. не подх

7) $a=10$ => $x_1\cdot x_2=11$ анал. не подх.

8) $a=11$ => $x_3\cdot x_4=11$ анал. не подх

9) $a=12$ => $x_1\cdot x_2=13$ анал.

10) $a=13$ => $x_3\cdot x_4=13$ анал.

11) $a=14$ => $x_3\cdot x_4=14$ => $x_3=2$ $x_4=7$ => $c=-9$

$x_1\cdot x_2=15$ => $x_1=3$ $x_2=5$ => $b=-8$

Проверка для $a=14$:

$x^2-8x+15=0$

$x_1=5$ $x_2=3$

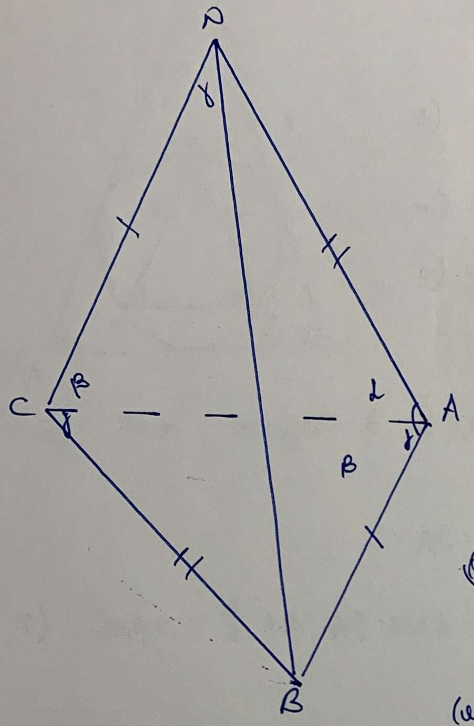
$x^2-9x+14=0$

$x_1=7$ $x_2=2$ – подходит

Ответ: $a_{min}=14$

Чистовик

Задача 6



Дано: ABCD - неправ пир, сумма углов при вершине $A = 180^\circ$, $AB = CD$, $AD = BC$, $S_{BCD} = S$.

Найти: $S_{поверхности}$ пир

Решение.

① Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle DAB = \gamma$, тогда по условию $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

② 1. $CD = AB$ (по усл)
2. $AD = BC$ (по усл.)
3. BD - общая

$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle CDB$ по трем сторонам) $\Rightarrow \angle DCB = \angle DAB = \gamma$ - лежат напротив BD; $S_{BCD} = S_{ADB} = S$

③ 1. $CD = AB$ (по усл)
2. $AD = BC$ (по усл)
3. AC - общая

$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABC$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle DCA = \angle CAB$; (лежат напротив $BC = AD$) $S_{ADC} = S_{BCA}$

④ В $\triangle ACD$ $\angle DAC = \alpha$; $\angle DCA = \beta \Rightarrow$ по т. о сумме углов тр-ка $\angle ADC = 180^\circ - \beta - \alpha = \gamma$ (из п.1)

⑤ Заметим, что $S_{BAD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} DC \cdot AD \cdot \sin\gamma = S_{ADC} \Rightarrow$

$S_{BAD} = S_{ADC} = S_{BCA} = S_{BCD} \Rightarrow S_{поверх} = 4 S_{BCD} = 4S$

Ответ: 4S

Чистовик

Задача 2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+8| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+8| = 5 \end{cases}$$

ОДЗ:

$x^2+y-1 \geq 0$

$x^2+y \geq 1$ (1)

$|y+8| = 1 - \sqrt{x^2+y} \overset{\text{ч(1)}}{\leq} 1-1 = 0$ $|y+8|$ - модуль $\Rightarrow$ $|y+8| \geq 0$

$|y+8| \leq 0$

$\Rightarrow$

$|y+8| = 0$

$y = -8$, тогда $\sqrt{x^2-8} + 0 = 1$

$x^2 - 8 = 1$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Проверим корни

1) $x=3$; $y=-8$ $\sqrt{9-8-1} + |3+8| = 5$

$11 = 5$ - неверно $\Rightarrow$ $x \neq 3$

2) $x=-3$; $y=-8$ $\sqrt{9-8-1} + |-3+8| = 5$

$5 = 5$ - верно $\Rightarrow$ $x = -3$

Ответ: $(-3; -8)$

$S_{ABC} - 1$

черновик

$AC = 2a\cos\alpha$

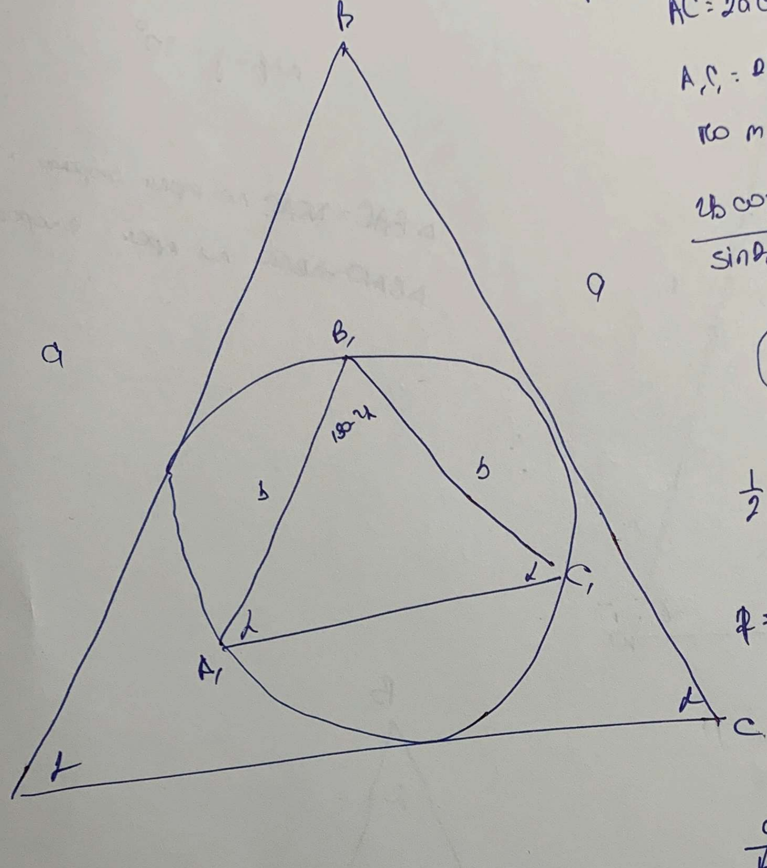
$A_1C_1 = 2b\cos\alpha$

по т синусов

$\frac{2b\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = 2r$

$r = \frac{b}{2\sin\alpha}$

$\frac{a}{b} - ?$



$\frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 2\alpha = 1$

$a^2 \cdot \sin 2\alpha = 2$

$2 = (2a + 2a\cos\alpha) \cdot \frac{b}{2\sin\alpha}$

$2a(\cos\alpha + 1) = \frac{2\sin\alpha}{b}$

$\frac{a}{b} =$

$a^2 \sin 2\alpha = 2$

$\min S = \frac{3}{4}(2-\sqrt{3})^2$

$S = \frac{1}{4}$

$2 = (2a + 2a\cos\alpha) \cdot \frac{b}{2\sin\alpha}$

$2 = \frac{2b(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$

$r = \frac{S}{p} = \frac{\cancel{2a+2a}\ 1}{2a} \quad 2a(\cos\alpha+1)$

$r = \frac{1}{a(\cos\alpha+1)} \Rightarrow A_1B_1 = \frac{2\sin\alpha}{a(\cos\alpha+1)}$

$A_1C_1 = 2\cos\alpha\, A_1B_1 = \frac{4\cos\alpha\sin\alpha}{a(\cos\alpha+1)}$

$AC =$

$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \frac{2\sin\alpha}{a(\cos\alpha+1)} \cdot \frac{4\cos\alpha\sin\alpha}{a(\cos\alpha+1)} = \frac{2\sin 2\alpha \sin^2\alpha}{a^2(\cos\alpha+1)^2}$

$\sin^4\alpha = (1 - \cos^2\alpha)^2$

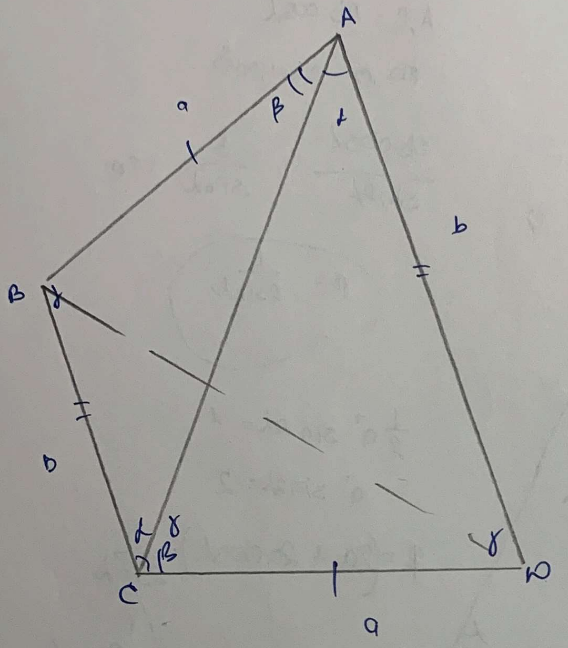
черновик

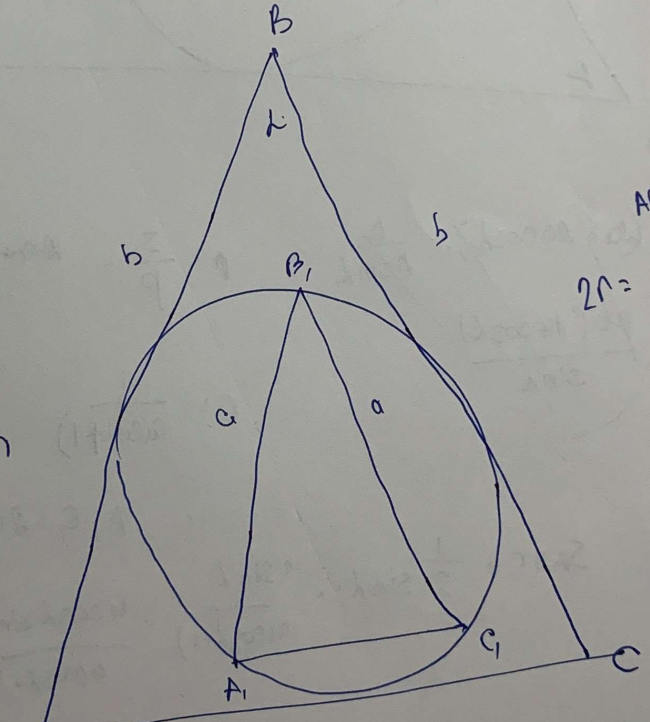
$\angle CAD = \alpha$, $\angle BAC = \beta$, $\angle BAD = \gamma$

$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$

$\triangle BAC = \triangle DAC$ по трем сторонам $\Rightarrow$ $\angle BCA = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, $\angle ABC = \gamma$

$\triangle BAD = \triangle BCD$ по трем сторонам





$AC = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$

$2r =$

$4\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$

$S_{min} =$

$4\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4} =$

min $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

max $t = \frac{1}{2}$

$f(t) = 4(1-t)^2 - t^2 = 4 -$

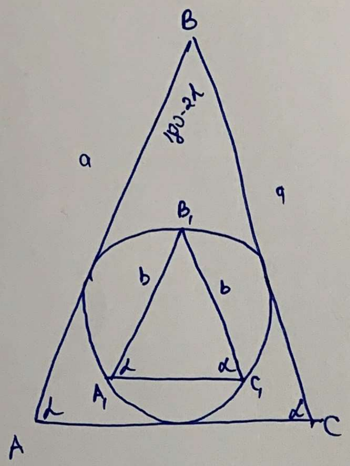
$t = \cos\alpha$

$\alpha \in [30^\circ; 60^\circ]$, то

$t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Чистовик

Задача 5



1) Пусть $AB = a$, $A_1B_1 = b$.

2) Из $\triangle ABC$ т.к. он равноб получаем, что $AC = 2a\cos\alpha$,
в $\triangle A_1B_1C_1$ $A_1C_1 = 2b\cos\alpha$ соотв.

3) По т. синусов в $\triangle A_1B_1C_1$ $\dfrac{b}{\sin\alpha} = 2r \Rightarrow r = \dfrac{b}{\sin\alpha}$

4) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2 \cdot \sin 2\alpha = 1 \Rightarrow a^2 = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

5) $S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{2a + 2a\cos\alpha} = \dfrac{1}{a(\cos\alpha + 1)}$

6) По т. синусов в $\triangle A_1B_1C_1$ получим $\dfrac{A_1B_1}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{a(\cos\alpha+1)} \Rightarrow A_1B_1 = \dfrac{2\sin\alpha}{a(\cos\alpha+1)} \Rightarrow$

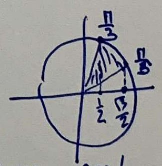
$$A_1C_1 = 2\cos\alpha\, A_1B_1 = \frac{4\cos\alpha\sin\alpha}{a(\cos\alpha+1)} = \frac{2\sin2\alpha}{a(\cos\alpha+1)}$$

7) $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin\alpha = \dfrac{2\sin2\alpha \cdot \sin^2\alpha}{a^2(\cos\alpha+1)^2} = \dfrac{2\sin2\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot \sin2\alpha}{(\cos\alpha+1)^2 \cdot 2} = \dfrac{4\sin^4\alpha\cos^2\alpha}{(\cos\alpha+1)^2} =$

$$= \frac{4(1-\cos^2\alpha)^2\cos^2\alpha}{(\cos\alpha+1)^2} = \frac{4(1-\cos\alpha)^2(1+\cos\alpha)^2\cos^2\alpha}{(\cos\alpha+1)^2} = 4(1-\cos\alpha)^2 \cdot \cos^2\alpha$$

Пусть $\cos^2\alpha = x$, рассмотрим $S = f(x) = 4(1-x)^2 \cdot x^2 = 4 - 8x + x^2 \Rightarrow$ возрастающая функция

т.к. $\alpha \in [30^\circ; 60^\circ]$, то $\alpha\ [\frac{\sqrt3}{2}; \frac{1}{2}]$



но по тригонометрической окружности ясно, что с увеличением α на данном промежутке значение $\cos\alpha$ уменьшается $\Rightarrow$

$S_{min} = f\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)$, а $S_{max} = f\left(\frac{1}{2}\right)$

$S_{max}: \frac{1}{4}$ $\qquad$ $S_{min}: 3\left(1 - \frac{\sqrt3}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} - 3\sqrt3$

Ответ: максимальная площадь $= \frac{1}{4}$,
минимальная $-$ $\cancel{3\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}$ $\frac{21}{4} - 3\sqrt3$

Чистовик Вариант 210108

Задача 1

$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 7$

$f(1) + f(2) + \dots f(12)$ Для удобства счета для начала докажем, что

1) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 2) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ пользуясь методом мат. индукции

1) 1. База индукции для $n=1$

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \text{ - верно}$$

2. Индукционное допущение, пусть для $n=k$

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \text{ ~~тогда~~}$$

3. Проверим для $n=k+1$

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6) = (k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$$

$$2(k+2)\left(k + \frac{3}{2}\right) = (k+2)(2k+3)$$

$$2k+3 = 2k+3 \text{ - верно}$$

4. Все три условия метода мат. индукции выполнены, а значит утверждение верно для всех натуральных n.

2) 1. База индукции для $n=1$

$$1^3 = \frac{1 \cdot 4}{4} \text{ - верно}$$

2. Индукционное допущение для $n=k$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

3. Проверим для $n=k+1$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = (k+1)^2(k+2)^2$$

$$(k+2)^2 = (k+2)^2 \text{ - верно}$$

4. Все три условия принципа мат индукции выполнены, а значит утверждение верно для всех натур. n

Когда формулы доказаны можно преобразовать предложенное выражение в вид

$$f(1) + f(2) + \dots + f(12) = 4(1^3 + 2^3 + \dots 12^3) - 6(1^2 + 2^2 + \dots + 12^2) + 4(1 + 2 \dots + 12) + 7 \cdot 12 =$$

$$= \cancel{4} \cdot \frac{12^2 \cdot 13^2}{\cancel{4}} - \cancel{6} \cdot \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{\cancel{6}} + 4 \cdot \frac{13}{\cancel{2}} \cdot \overset{6}{\cancel{12}} + 7 \cdot 12 = 24336 - 3900 + 312 + 84 = 20832$$

Ответ: 20832 №1