МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Пономарев Андрей Андреевич**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	0	15	0

Черновик №1

144 · 121 = 17424

2760 + 276 = 3036

$4+6+4+9$

$9\cdot 11 = 99$

$4(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)$

$4\cdot 66$

$6(1+4+9+16+25+36+49+$

пусть $n=6$

$f(n-5)+f(n-4)+f(n-3)+f(n-2)+f(n-1)+f(n)+\dots f(n+5)$

$(a+b)(a+b)(a+b) =$

$4n^3+6n^2+4n+9$

$4(n+1)^3+6(n+1)^2+4n+9$

$4n^3+12n^2+12n+4+6n^2+12n+6+4n+9$

$4n^3+18n^2+28n+18$

№3

$x^2+bx+a=0$ $\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1\cdot x_2=a \end{cases}$ раз x_1 и x_2 меньше -1, то $x_1\cdot x_2>1$ а также является целым, аналогично $x_3\cdot x_4=a-1>1$ Значит $a\geq 2$

$x^2+cx+(a-1)=0$ $x_3+x_4=-c$

$x_3\cdot x_4=(a-1)$

попробуем $a=3$, тогда x_1 или x_2 будут равняться -1, ведь $3=(-2)\cdot(-1)=(-3)\cdot(-1)$

$a=4$, тогда $x_1=x_2=-2$ (чтобы они были меньше -1), но в ситуации $x_3\cdot x_4=3$, будет аналогичная с $a=3$ проблема

Значит a - не является простым, а также $a-1$ - не является простым

6 из 7

Черновик

$\sqrt{3}$

$x^2+bx+a=0$ 4421

$x^2+cx+(a-1)=0$, т.к. оба ур-я имеют корни, ~~то можно~~ воспользоваться теоремой Виета (пусть x_1 и $x_2<-1$ корни первого ур-я, x_3 и $x_4<-1$ корни второго)

$\begin{cases} x_1\cdot x_2=a \\ x_1+x_2=-b \end{cases}$ т.к. $x_1; x_2; x_3; x_4$ целые и отрицательные, то $x_1\cdot x_2=a$ — натуральные.

$\begin{cases} x_3\cdot x_4=(a-1) \\ x_3+x_4=-c \end{cases}$ $x_3\cdot x_4=(a-1)$

Заметим, что $x_1; x_2; x_3; x_4>|1|$, значит a и $a-1$ натуральные и не простые

минимальные такие числа, $a=9$, пример:

$a-1=8$,

$b=6$ $x^2+6x+9=0$ $D=36-36=0$

$c=6$, тогда $x_1=x_2=-3$

здесь $x_1=x_2$, что является неверным

~~Ответ: $a=9$~~

$x^2+6x+(9-1)=0$ $D=36-32=4>0$ но

$x_1=-2$

$x_2=-4$

Нам не подходит по условию продолжение

$\sqrt{2}$

$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+3|=1 \quad (1) \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1 \quad (2) \end{cases}$

из (2) $\sqrt{x^2+y-1}\geq 0$, значит в (1) $\sqrt{x^2+y}\geq 1$, но т.к. $|y+3|\geq 0$, а их сумма $=1$, то $\sqrt{x^2+y}=1$, а $|y+3|=0 \Rightarrow y=-3$, тогда $\sqrt{x^2+y}=1$, $x=\pm 2$, но во ~~втором~~ (2) $\sqrt{x^2+y-1}=0$ $+|x+3|=1$,

значит $x=-2$ (если $x=2$, то равенство не выполняется $5\neq 1$)

Ответ $x=-2$

$y=-3$

2 из 7

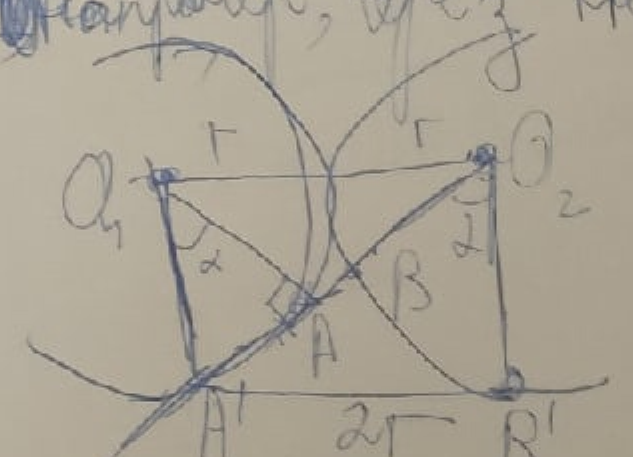
Черновик

№4 $\angle O_2O_1A$, $\angle AO_1O_2$

1) Пусть центры α и β — это O_1 и O_2 соотв
2) в момент старта $\angle O_2AO_1 = 90^\circ$ (~~по св-ву отр~~ O_2A — кас к окр α, а O_1A, по углу между кас и радиусом)

3) $O_1A = r$, $O_1O_2 = 2r$, тогда $\angle O_2O_1A = 60^\circ$, $\angle O_1O_2A = 30^\circ$

4) т.к. они движутся с равными скоростями, то и отъедут на равные углы на ~~...~~ например, через некоторое время.



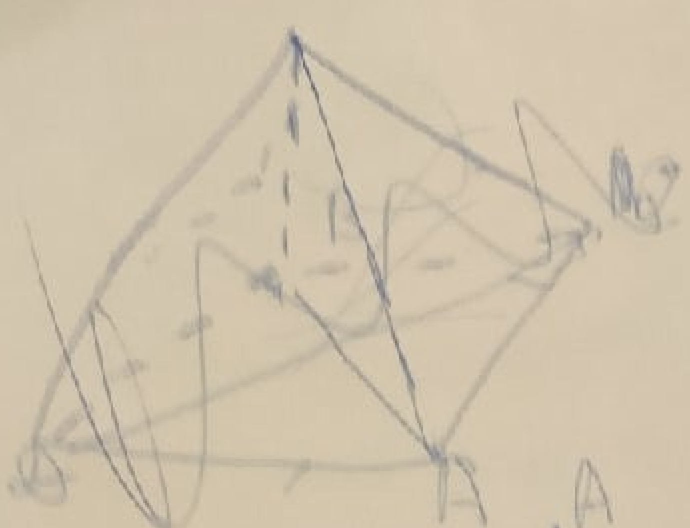
5) рассмотрим когда расстояние между ними 2r (в первый раз) $A'O_1O_2B'$ — пар-мм (по признаку прот стороны — равны) с этого момента расстояние между ними будет $\geq 2r$ (диаметра) до тех пор пока, они не попадут в точки A'' и B'' где A'' и A' диаметрально прот, и аналогично B' и B''
т.к. $\angle A''O_1O_2 = \angle A'B'O_2 = 180^\circ - O_1O_2B' = \angle O_1O_2B''$ $\angle A''O_1O_2 = \angle O_1O_2B'$
6) из 5) следует, что ~~это~~ мы получили пар-мм $A''O_1O_2B''$, в котором расстояния между A'' и B'' равно 2r
Таким образом мы можем заметить, что ровно половину окружности, расстояние между ними будет не больше диаметра и это расстояние он проезжает за $\frac{1{,}5 \text{ часа}}{2} = 0{,}75$ часа

Ответ: 0,75 часа = 45 мин

Числовой,

№6

m

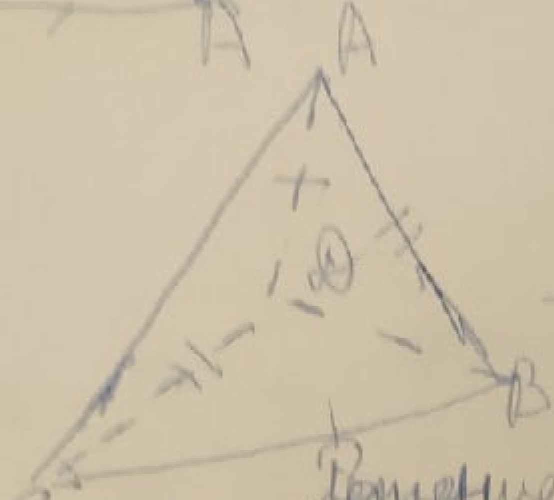


Дано: $AB = CD$, $AD = BC$

$ABCD$ – неправильная пирамида

$\angle CAD + \angle BAD + \angle DAC = 180^\circ$

$S(ABCD)$ – ?



Решение

1) $\triangle ABC = \triangle ADC$ (AC – общая сторона) $\Rightarrow \angle ACB = \angle DAC$; $\angle DCA = \angle CAB$

2) $\angle DAB = 180^\circ - \angle DAC - \angle CAB$ (из условия) $\Rightarrow$

$\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle ACD = \angle DAB$; $\angle ACD = \angle CAB$

$\triangle ABD = \triangle ADC$ (по 2-ум сторонам и углу м-ну ними) $\Rightarrow AC = DB$

3) Тогда все 4 грани пирамиды равны $\triangle$, они равны по 3 сторонам,

Значит $4S(\triangle BCD) = S(ABCD) \Rightarrow S(\triangle BCD) = \frac{S}{4}$

Ответ: $\frac{S}{4}$

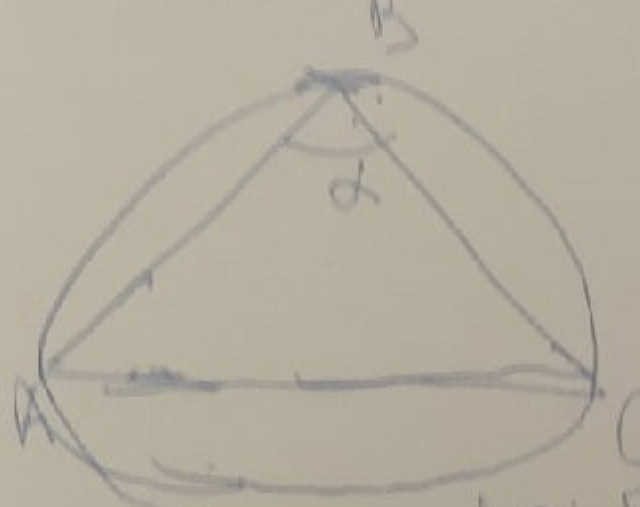
черновик

3 пример При $a=9$ или $a-1=9$ $x_1=x_2=-3$ - не подходит
или $x_3=x_4=-3$

Значит следующее подходящее $a=15$

$a-1=14$, тогда $x_1=-3$ $b=8$
$x_2=-5$
$x_3=-7$
$x_4=-2$ $c=9$

Ответ: $a=15$



$\sqrt{5}$
$S(\triangle ABC)=1$ $\triangle ABC$ - р/б

$S(\triangle ABC)=\frac{AB\cdot BC\cdot \sin\alpha}{2}$

Пусть $AB=BC=x$, тогда по т косинусов $\triangle ABC$

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\alpha}=\sqrt{2x^2-2x^2\cos\alpha}=$
$=x\sqrt{2-2\cos\alpha}$

из $S(\triangle ABC)=\frac{AB\cdot BC\cdot \sin\alpha}{2}$

$x=\sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}$

По обобщ т синусов

$S($

В. 210104 чистовик №1

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(11)=?$

Заметим, что $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$4\cdot121\cdot36=144\cdot121$

$11\cdot12\cdot23=276\cdot11$

$11\cdot24=264$

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Значит $f(1)+f(2)+\ldots f(11)=4(1^3+2^3+\ldots+11^3)+6(1^2+2^2+\ldots 11^2)+$
$+4(1+2+\ldots 11)+9\cdot11=4\left(\frac{11\cdot12}{2}\right)^2+6\,\frac{11\cdot12\cdot23}{6}+4\cdot\frac{11\cdot12}{2}+99=$
$=17424+3036+264+99=20823$

Ответ: 20823

1 из 4

Черновик

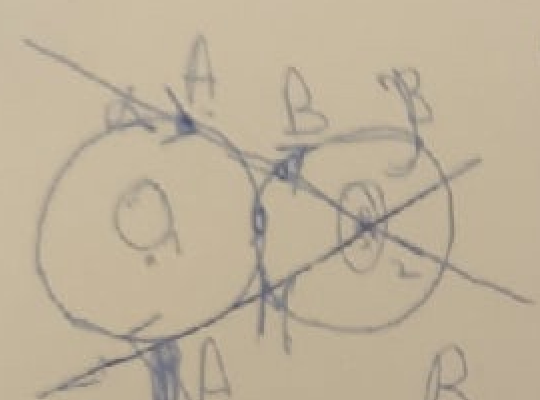
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+|y+3|=1 \quad (1)\\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1 \quad (2)\end{cases}$$

$x^2+y\geq 1$ из (2), тогда $\sqrt{x^2+y}\geq 1$ в первом ведь $|y+3|\geq 0$

Значит $y+3=0$, $y=-3$, тогда $\sqrt{x^2-3}=1$, значит $x=\pm 2$,

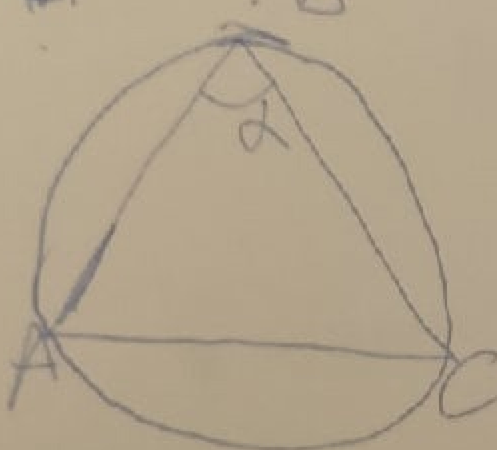
а $\sqrt{x^2+y-1}=0$ и $|x+3|=1$, значит $x=-2$

1
2 +
3 +
4 +
5
6 +
7



$r_\alpha = r_\beta$

$AB\leq 2r$



$S(\triangle ABC)=1=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin\alpha}{2}$ $\qquad \frac{x^2\sin\alpha}{2}=1$

по обобщ теор синусов

$r=\frac{AC}{2\sin\alpha}$ $\qquad x^2=\frac{2}{\sin\alpha}$

$S(\alpha)=\pi r^2=\frac{\pi AC}{2\sin\alpha}$

Пусть $AB=BC=x=\sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}$

AC по т кос($\triangle ABC$)

$AC=\sqrt{2x^2-2x^2\cos\alpha}$

$S(\alpha)=\frac{\pi\sqrt{2x^2-2}\cdot x\sqrt{2-2\cos\alpha}}{2\sin\alpha}=\sqrt{}$