МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Рыбаков Алексей Николаевич**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	15	5	15	0

$\boxed{1}$ $f(f(f(f(f(x)))))=0$, $f(x)=x^2+10x+20$ Чистовик

Лист 1 из 13

Рассмотрим $f(g(x))=0$, где $g(x)=f(f(f(f(x))))$:

$g(x)^2+10g(x)+20=0$

$(g(x)+5)^2=5$

$g(x)=-5\pm\sqrt{5}$

То есть $f(f(f(f(x))))=-5\pm\sqrt{5}$.

Рассм. $f(z(x))=-5\pm\sqrt{5}$, где $z(x)=f(f(f(x)))$:

$z^2(x)+10z(x)+20=-5\pm\sqrt{5}$

$(z(x)+5)^2=\pm\sqrt{5} \to (z(x)+5)^2=\sqrt{5} \to z(x)=-5\pm\sqrt[4]{5}$

Тогда $f(f(f(x)))=-5\pm\sqrt[4]{5}$

Рассм. $f(h(x))=-5\pm\sqrt[4]{5}$:

$h^2(x)+10h(x)+20=-5\pm\sqrt[4]{5}$

$(h(x)+5)^2=\pm\sqrt[4]{5} \Leftrightarrow h(x)=-5\pm\sqrt[8]{5}$

То есть $f(f(x))=-5\pm\sqrt[8]{5}$:

Рассм. $f(m(x))=-5\pm\sqrt[8]{5}$:

$m^2(x)+10m(x)+20=-5\pm\sqrt[8]{5}$

$(m(x)+5)^2=\pm\sqrt[8]{5} \Leftrightarrow m(x)=-5\pm\sqrt[16]{5}$

то есть $f(x)=-5\pm\sqrt[16]{5}$:

$x^2+10x+20=-5\pm\sqrt[16]{5}$

$(x+5)^2=\pm\sqrt[16]{5}$

$x+5=\sqrt[32]{5}$

$x=-5+\sqrt[32]{5}$

Ответ: $-5+\sqrt[32]{5}$

$\boxed{2}$ $x = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-2021}$ чистовик

$A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ лист 2 из 13

$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} = \frac{1\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2022} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2022}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$

$A^2 = \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}\right)^2 + \left(\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\right)^2 + 2\sqrt{(x+2\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1})}$

$A^2 = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4|x-1|}$

так как $x = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} > 1$, то $|x-1| = x-1$:

$A^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2}$

Однако $x = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} < 2$, поэтому $|x-2| = 2-x$:

$A^2 = 2x + 2(2-x) = 2x + 4 - 2x = 4 \rightarrow A^2 = 4$

Поскольку $x > 0$, то $A > 0 \rightarrow A = 2$

Ответ: 2

$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$$\begin{cases} P(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 8 \\ P(1) = 1 + A + B + C + D + E = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+C+E = 9+B+D \\ A+C+E = 21 - B - D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+B+D = 21-(B+D) \\ A+C+E = \frac{9+21}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(B+D) = 21-9 \\ A+C+E = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+D = 6 \\ A+C+E = 15. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда число многочленов $P(x)$ равно числу решений системы (1).

а) $B+D=6 \to 5$ решений $(1;5);(2;4);(3;3);(4;2);(5;1)$

б) $A+C+E=15$.

~~Рассмотрим~~ Рассмотрим 17 шаров, из которых 15 зеленых и 2 синих. Найдем число способов разложить эти шары так, чтобы в трех группах, на которые 2 синих шара делят 15 зеленых шаров, был хотя бы один шар:

○○○●○○○○●○○○○○○○○ $\quad C_{14}^2$

Тогда пусть число шаров левее первого синего равно A, между синими равно числу C, правее от правого синего E.

Тогда $A+C+E=15$, $A, C, E > 0$ имеет C_{14}^2 решений.

Тогда всего способов $5 \cdot C_{14}^2 = \frac{5 \cdot 14!}{2! \cdot 12!} = \frac{5 \cdot \cancel{14}^{7} \cdot 13}{\cancel{2} \cdot 1} = 35 \cdot 13 = 455$

Ответ: 455

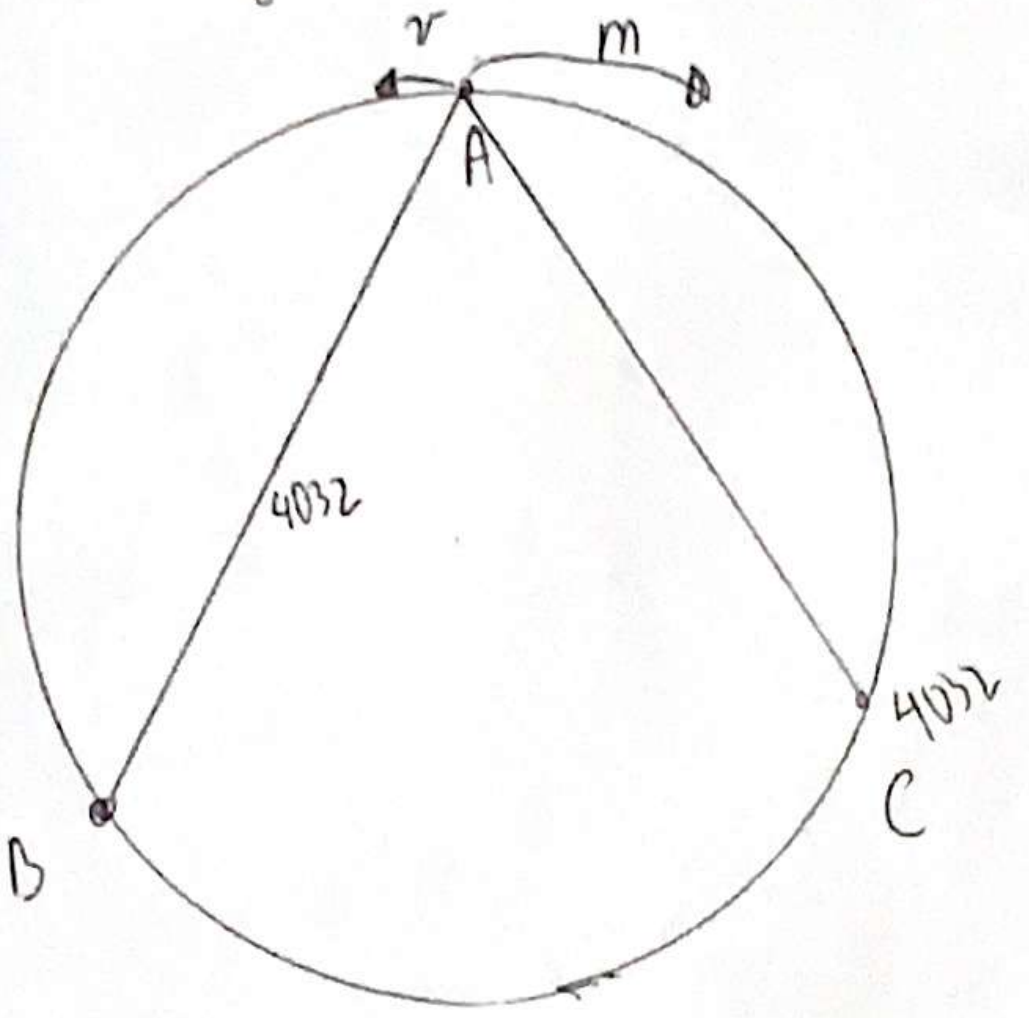
4 Чистовик лист 4 из 13

По условию, мотоциклист проезжает круг за $t_1 = 36$ минут

велосипедист за t: $61 < t < 72$

Если l - длина круговой трассы, то $\frac{l}{t_1}$ - скорость мотоциклиста

Расс. движение навстречу: пусть v - скор-ть велосип, m - скорость мотоцикл.



Время движ. до встречи: $\frac{l}{m+v}$

Расстояние, пройденное v до встречи:

$\frac{vl}{m+v} < \frac{vl}{v} = l$

Движение в одну сторону:

Время движение: $\frac{l}{m-v} \to$ Расстояние, пройденное v:

$\frac{vl}{m-v} \vee l \Leftrightarrow v \vee m-v \Leftrightarrow 2v \vee m \to \frac{vl}{m-v} > l$.

Так как $t_1 = 36$ мин.

$t < 72 = 36 \cdot 2$, то $m < 2v$

~~То есть, при движении в одну сторону велосипедист проедет больше одного круга до встречи.~~

~~Пусть A - точка старта. B - встреча при движении навстречу, C - в одну сторону. От A есть 2 точки равноудаленные на одно расстояние, т.е. возможны 2 варианта:~~

~~1) Пути, пройд. велосип. в обоих случаях равны: $\frac{vl}{m+v} = \frac{vl}{m-v} \to$ противоречие.~~

~~2) Оба пути в сумме дают l: $\frac{vl}{m+v} + \frac{vl}{m-v} = l \Leftrightarrow 2mv = m^2 - v^2$~~

Сравним $\frac{vl}{m-v}$ и $2l$: так как $2m > 3v$, то $\frac{vl}{m-v} < 2l$.

Тогда возможны 2 случая:

1) $B \equiv C$: $\frac{vl}{m-v} - \frac{vl}{m+v} = l \Leftrightarrow \frac{v(m+v) - v(m-v)}{m^2 - v^2} = 1 \Leftrightarrow 2v^2 = m^2 - v^2 \Leftrightarrow 3v^2 = m^2$

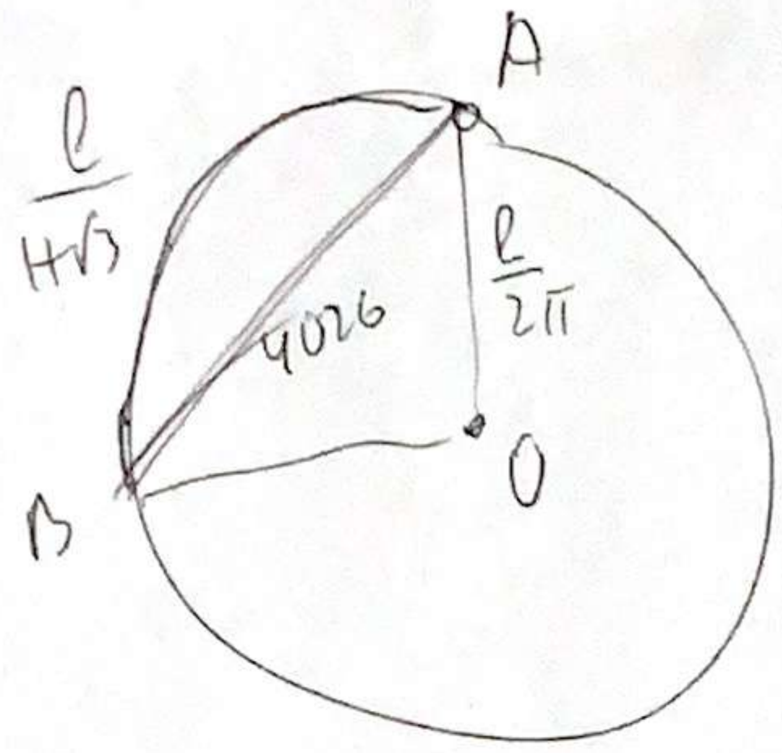
$\underline{m = v\sqrt{3}}$

2) $\frac{vl}{m-v} + \frac{vl}{m+v} = 2l \Leftrightarrow v\left(\frac{1}{m-v} + \frac{1}{m+v}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{2mv}{m^2 - v^2} = 2 \Leftrightarrow mv = m^2 - v^2 \Leftrightarrow m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}v$

Тогда $t_1 = \left[\begin{array}{l} t\sqrt{3} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}t \end{array}\right. \to t_1 = \left[\begin{array}{l} 36\sqrt{3} > 36 \cdot 1{,}7 = 61{,}2 \\ 18 + 18\sqrt{5} < 61 \to \text{не подходит} \end{array}\right.$

Значит $\underline{m = v\sqrt{3}}$

$\boxed{4}$ $\underline{m = v\sqrt{3}}$



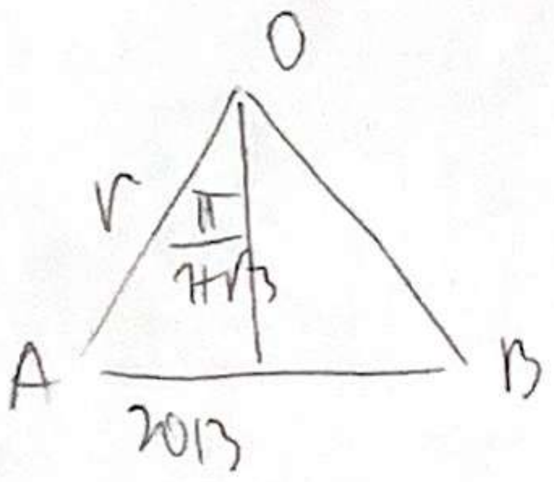
Тогда при движении навстречу:

$$t = \frac{l}{m+v} = \frac{l}{v+v\sqrt{3}} = \frac{l}{v(1+\sqrt{3})}$$

Путь, пройденный велосипедистом $vt = \frac{l}{1+\sqrt{3}}$, мотоциклистом $\frac{l\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$$\left.\begin{aligned} \cup AB &= \frac{l}{1+\sqrt{3}} \\ \cup AB &= \frac{l}{\cancel{\ }} \cdot \frac{\angle AOB}{2\pi} \end{aligned}\right\} \quad \frac{l}{1+\sqrt{3}} = \frac{l \cdot \angle AOB}{2\pi}$$

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{1+\sqrt{3}}$$



Тогда из $\triangle OAB$:

$$2013 = r \sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right)$$

$$\Downarrow$$

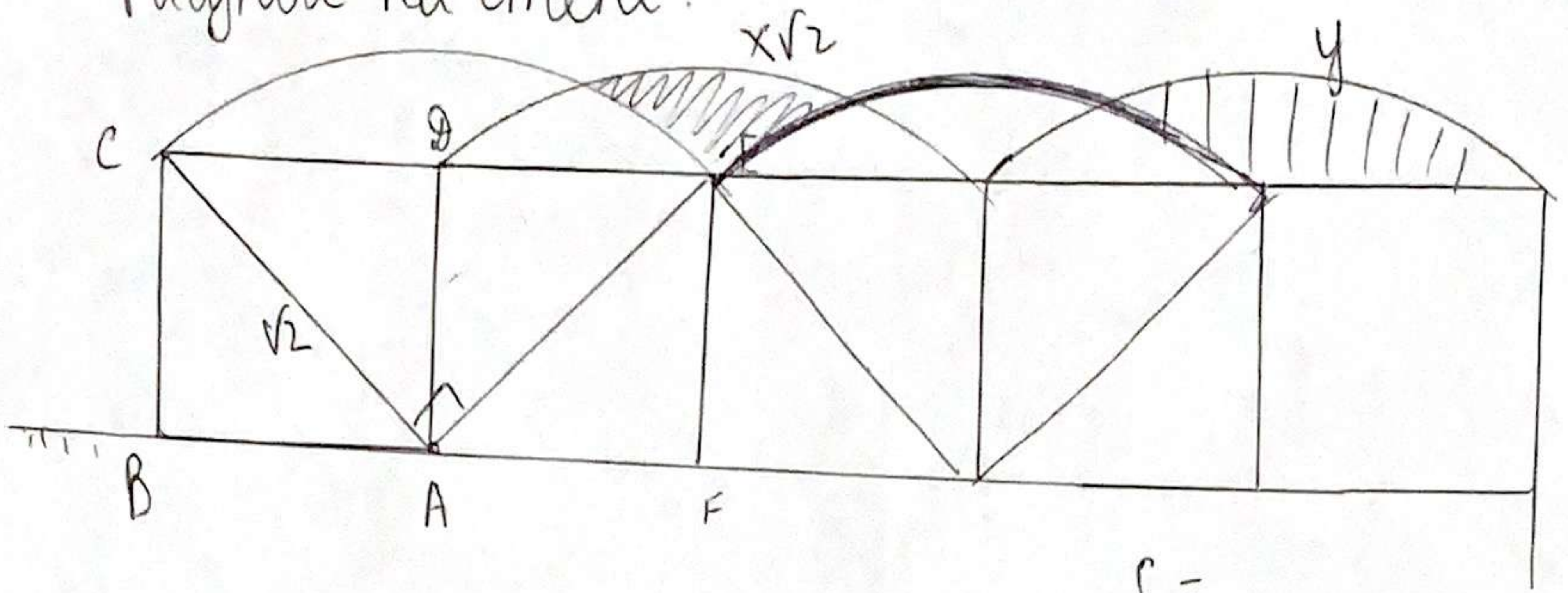
$$r = \frac{2013}{\sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right)}$$

Ответ: $\frac{2013}{\sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right)}$

5 Рассмотрим одно кантование квадрата ABCD относительно A: чистовик лист 6 из 13

A→A; B→D; C→E; D→F

Рисунок на стене.



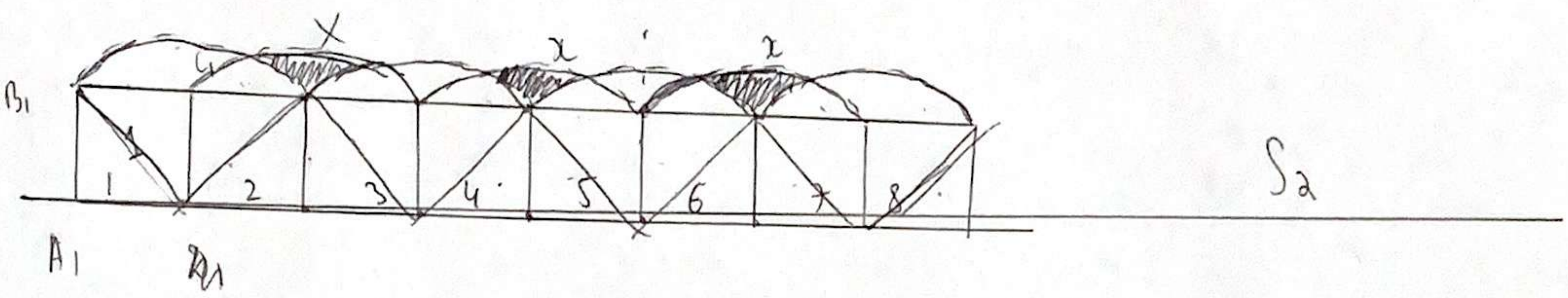
y – площадь заштрихов. „|||" обл-ти.

S_1

$S =$

Кантование $A_1B_1C_1D_1$, где $A_1C_1 = 1$:

Пусть x – площадь малой заштр обл-ти



S_2

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4 + 3x$$

$$S = 2 + \pi + 3x$$

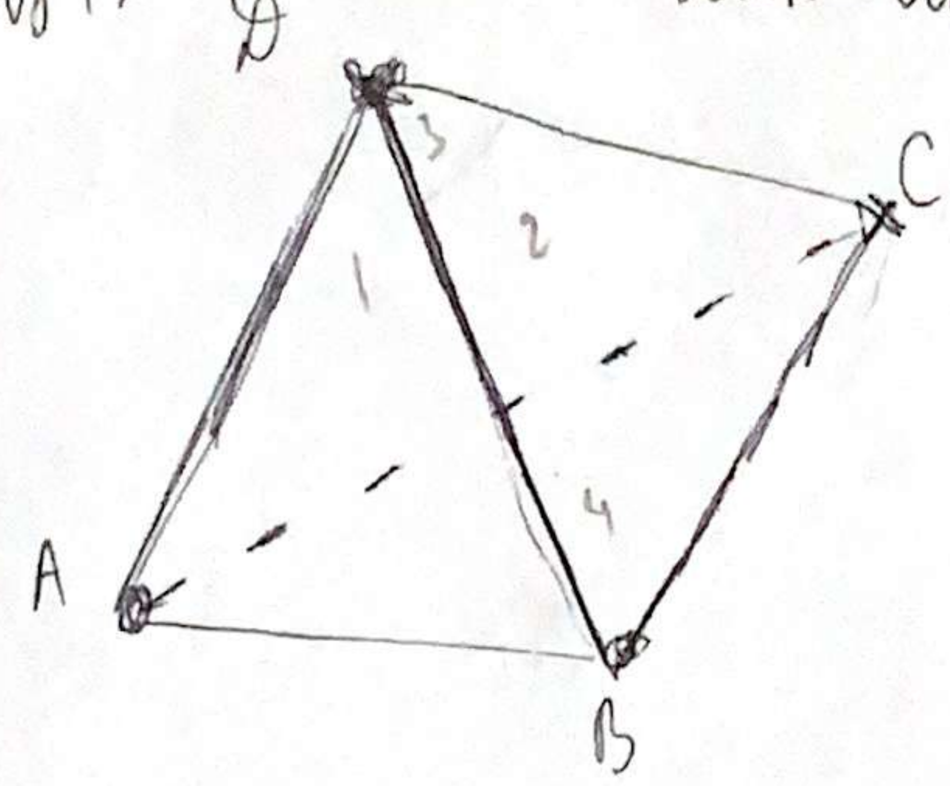
$$S_1 = \frac{6 \cdot 1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 + x\sqrt{2} + y$$

$$S_1 = 3 + \pi + x\sqrt{2} + y$$

$$S_1 - S = 1 + x\sqrt{2} + y - 3x = 1$$

Ответ: на 1 больше

6 лист 7 из 15 условие



$\angle DAC + \angle DAB + \angle BAC = \angle ABD + \angle DBC + \angle CBA$

$\angle ACD + \angle BCD + \angle BCA = \angle ADB + \angle BDC + \angle CDA$

$S(ABC) + S(ACD) = S$

$S_{пов}(DABC) = ?$

$$2\underbrace{(\angle DAC + \angle DAB + \angle BAC)}_{S_1} + 2\underbrace{(\angle DCB + \angle DCA + \angle BCA)}_{S_2} = \text{сумма всех пл-ных углов } DABC$$

$$2(S_1+S_2) = 180^\circ \cdot 4 \to \underline{S_1+S_2 = 360}$$

$$\begin{cases} (\angle DAC + \angle BAC + \angle BAD) + (\angle ACD + \angle ACB + \angle BCD) = 360^\circ \\ (\angle DAC + \angle CAB) + (\angle DCA + \angle ACB) + \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ \cdot 2 = 360 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\angle BAD + \angle BCD = \angle ADC + \angle ABC$

~~Аналогично $\angle ABD$~~ Аналогично из $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$:

$\angle ABD + \angle ACD = \angle CAB + \angle BDC$

~~Из $\triangle ABC$ и $\triangle BDC$: $\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ADC$~~

Аналогично:

$\angle ACB + \angle ADB = \angle ABC + \angle DAC$

Тогда $S(ADB) + S(DCB) = S(ADC) + S(ABC)$

$\Downarrow$

$S_{общ} = 2S$

Ответ: $2S$

$\boxed{1}$ $f(x) = x^2+10x+20$ черновик лист 8 из 13

$f(f(f(f(f(x))))) = 0$

~~Заметим, что~~

Пусть x_0 — решение данного ур-ия.

Рассм. ур-ие $f(g(x))=0$:, где $g(x) = f(f(f(f(x))))$:

$(g(x))^2 + 10g(x) + 20 = 0 \Leftrightarrow g(x) = -5\pm\sqrt{5}$

Рассм ур-ие $f(z(x)) = 5\pm\sqrt{5}$, где $z(x) = f(f(f(x)))$:

$z^2(x) + 10z(x) + 20 = 5\pm\sqrt{5}$

$(z(x)+5)^2 = (5\pm\sqrt{5}) - 5 = \pm\sqrt{5}$

т.к. $(z(x)+5)^2 \geq 0$, то $(z(x)+5)^2 = \sqrt{5} \to z(x) = \pm\sqrt[4]{5} - 5$

Теперь рассмотрим

$f(k(x)) = \pm\sqrt[4]{5} - 5$, где $k(x) = f(f(x))$:

$k^2(x) + 10k(x) + 20 = \pm\sqrt[4]{5} - 5$

$(k(x)+5)^2 = \pm\sqrt[4]{5}$

т.к. $(k(x)+5)^2 \geq 0$, то $(k(x)+5)^2 = \sqrt[4]{5}$

отсюда $k(x) = \pm\sqrt[8]{5} - 5$.

$\frac{vl}{m+r}$ +

чернови лист 9ц3/3

$\frac{v\ell}{m+v}$

$\frac{v\ell}{m-v}$ 2ℓ

v $2m-2v$

$3v$ $2m$

$2m>3v$

$\frac{v}{m-v}-\frac{v}{m+v}=1$

$v(m+v)-v(m-v)=m^2-v^2$

$mv+v^2-mv+v^2=$

$m+v+m-v$

$m^2-mv-v^2=0$

$D=1+4 \Rightarrow v=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$v($ $m+v-1$

$m=v\sqrt{3}$

$m=v\sqrt{3}$ $t=36\cdot 1{,}7$

$$\begin{array}{r} \times\; 36 \\ 17 \\ \hline 252 \\ 36\;\; \\ \hline 61{,}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\; 36 \\ 17 \\ \hline 553 \\ 36\;\; \\ \hline 81{,}3 \end{array}$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}<\sqrt{3}$

$1+\sqrt{5}<2\sqrt{3}$

$1+5+2\sqrt{5}<4\cdot 3=12$

$2\sqrt{5}<6$

$\sqrt{5}<3$

$$\begin{array}{r} -\;61 \\ 18 \\ \hline 43 \end{array}$$

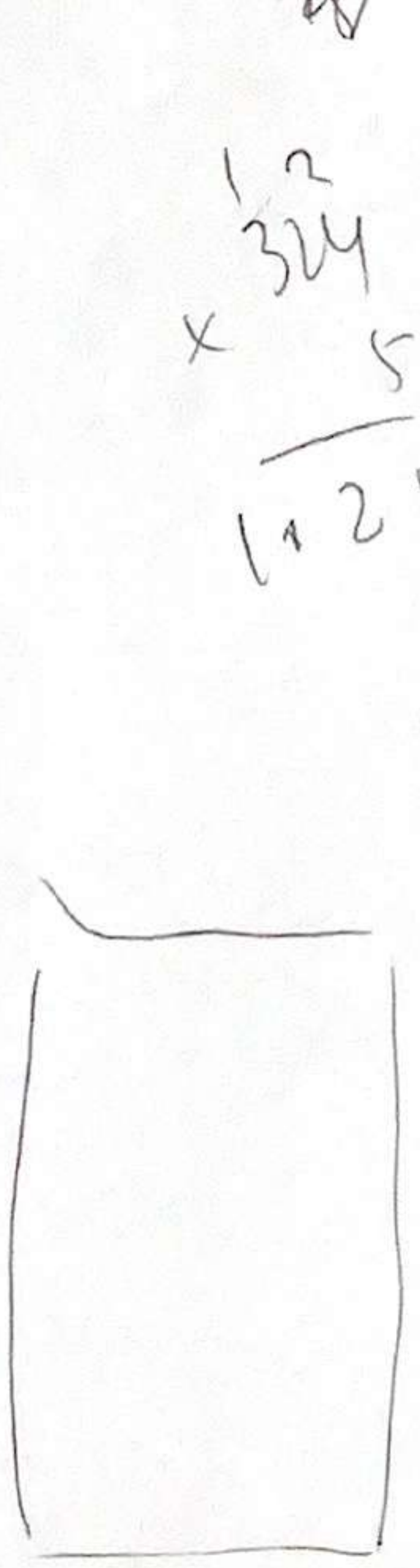
$36\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 61

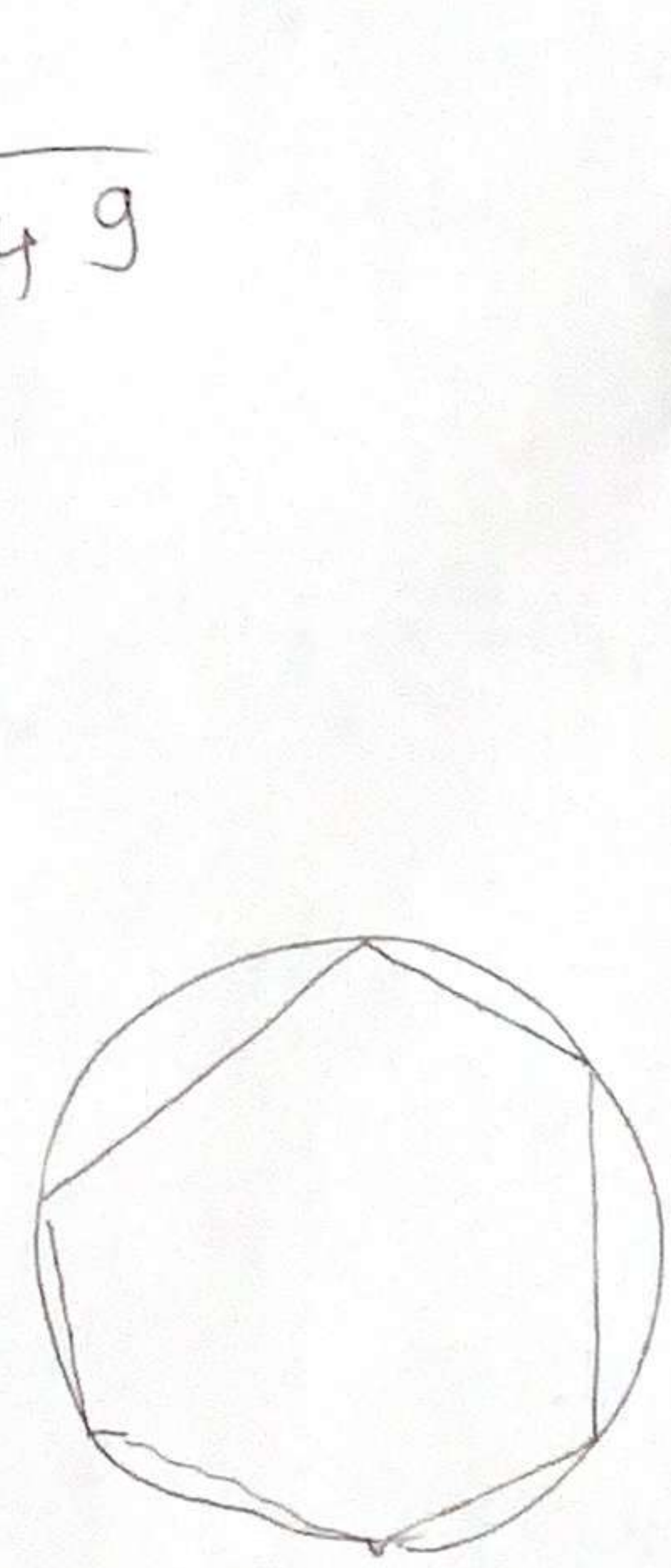
$18+18\sqrt{5}$ 61

$$\begin{array}{r} \times\; 43 \\ 43 \\ \hline 129 \\ 172\;\; \\ \hline 1849 \end{array}$$

$18^2=324$

$$\begin{array}{r} \times\; 324 \\ 5 \\ \hline 1620 \end{array}$$





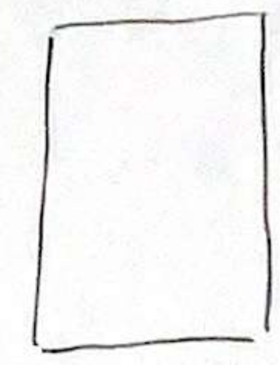
11

черновик лист 10 из 13

$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 13 \\ \hline 105 \\ 35\ \ \\ \hline 455 \end{array}$

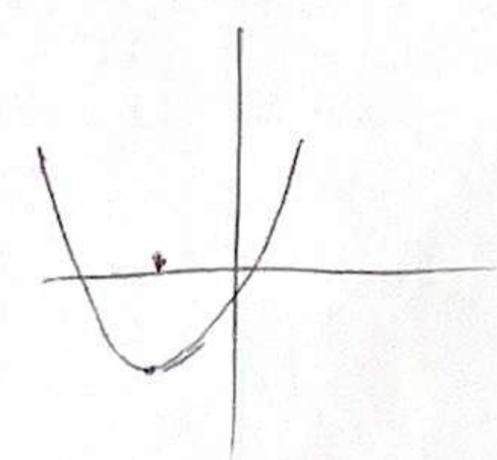
$\cancel{a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3}$

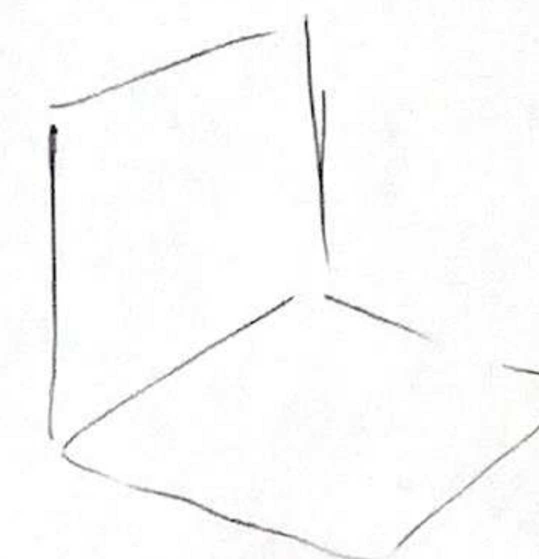
$\cancel{c_1+c_2+c_3 = d_1+d_2+d_3}$



$x^2+10x+20$

$(x+5)^2-5$ f…f





$a_1+a_4+a_2 = b_1+b_2+b_4$

$c_2+c_3+c_4 = d_1+d_2+d_3$

$a_1+b_1+d_1 = 180$

$a_4+b_4+c_4 = 180$

$a_2+d_2+c_2 = 180$

$d_3+c_3+b_3 = 80$

$x_0 < -5$

$\downarrow$

$f(x_0)$

$$\underset{\substack{\parallel \\ b_1+b_2+b_4}}{(a_1+a_2+a_4)} + (b_1+b_4) + \underset{\substack{\parallel \\ (c_2+c_3+c_4)-d_3}}{(d_1+d_2)} + (c_2+c_4) = 180\cdot 3$$

$AB\cdot BC\sin\alpha = AB\cdot AD\sin$

$f(g(x)) = 0$

x^2+

$(g(x))^2 + 10g(x) + 20 = 0$

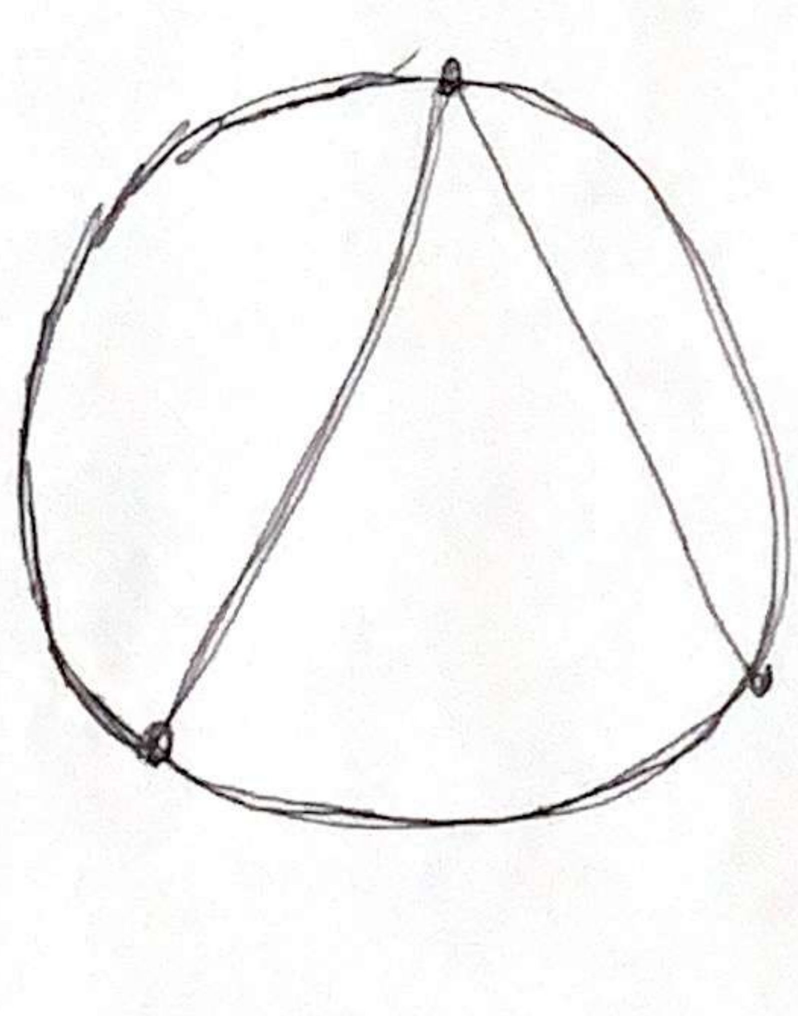
$D = 100-80 = 20$

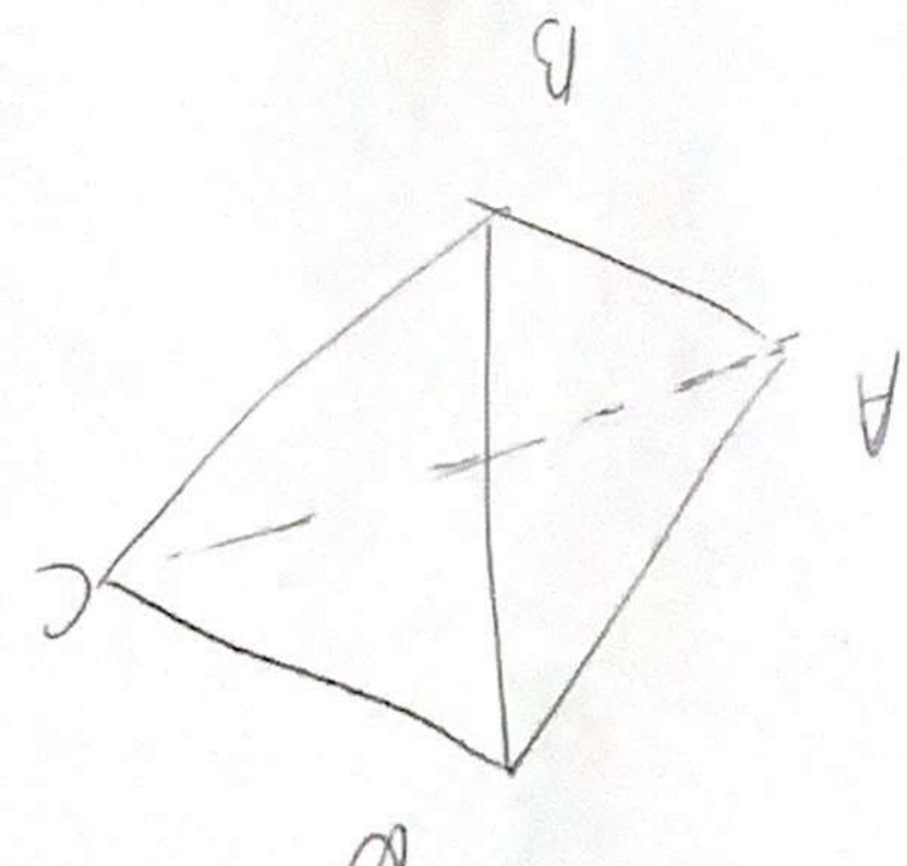
$\frac{-10\pm\sqrt{20}}{2}$

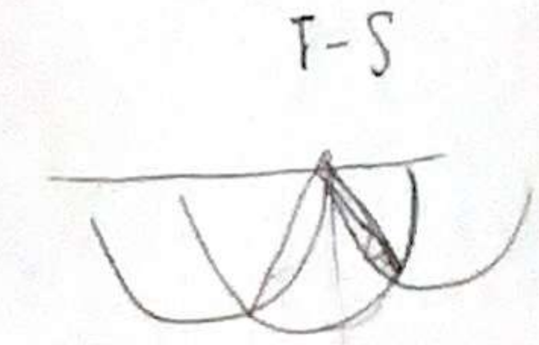
2022 кр

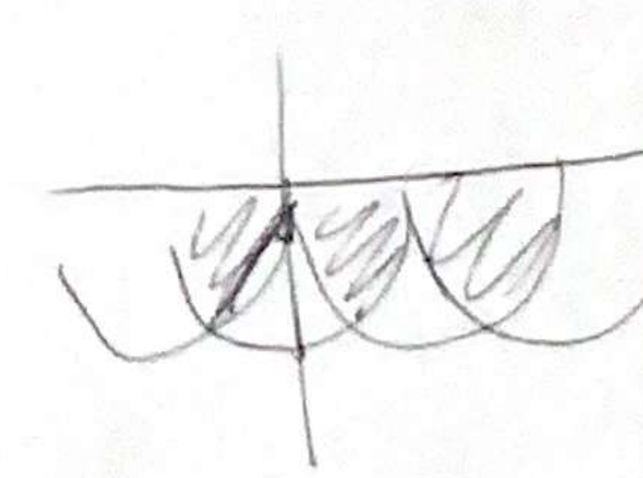
2024 гл.

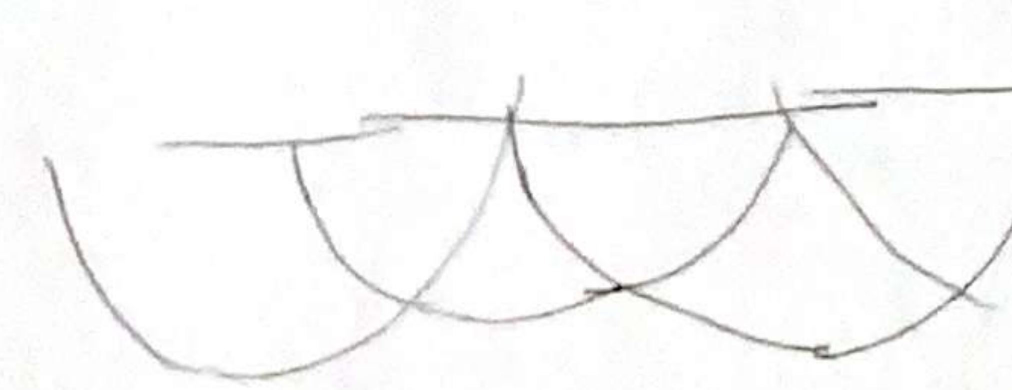
$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+1} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+1}$$











черновик лист 11 из 13

$v_{отн} = v_2 - v_1$

$\frac{2 v_1 l}{v_2 - v_1} < l$

$v_1 < v_2 - v_1$

$2v_1 < v_2$

$x^2+10x+20=0$

$(x+5)^2-5=0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{\cancel{2}}$

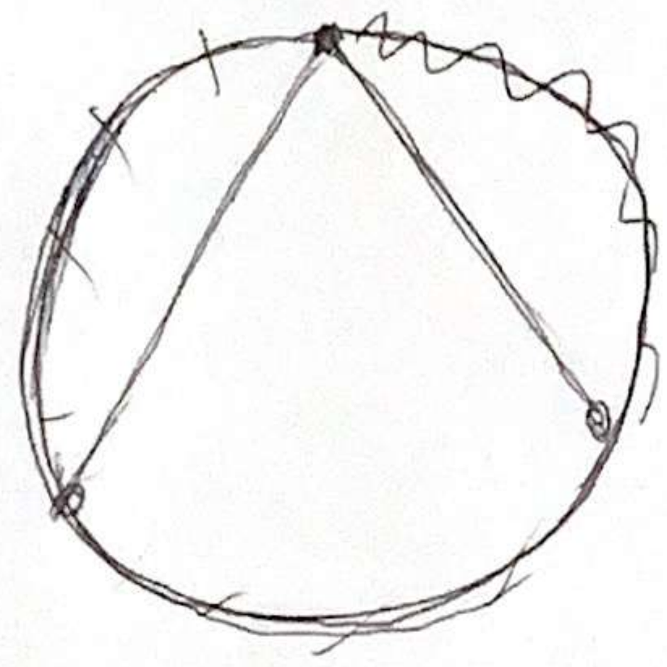
$f(f(f(f(f(x))))) = 0$

$f(g(x)) = 0 \rightarrow g^2(x) + 10g(x) + 20 = 0$

$(g(x)+5)^2 = 5$

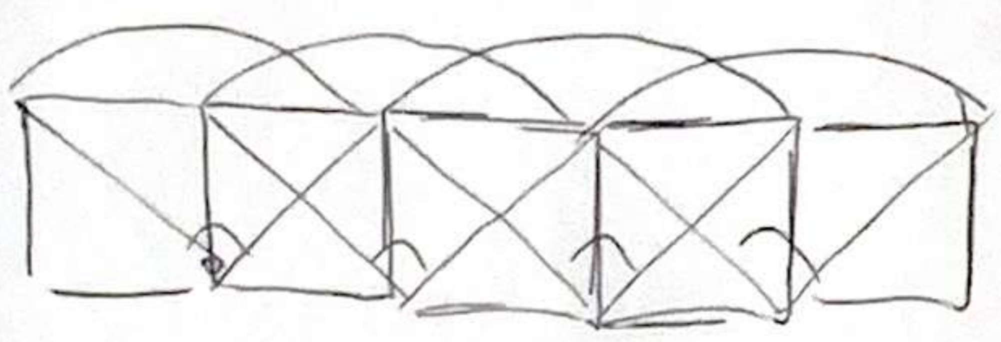
$g(x) = \pm\sqrt{5} - 5$

$\frac{4026}{2} = 2013$



$\frac{vl}{m+v}$ ≥

$\frac{vl}{m-v}$ ||



$m - v < v$

$\frac{vl}{m-v} > \frac{vl}{v} = l$

$m - v < v$

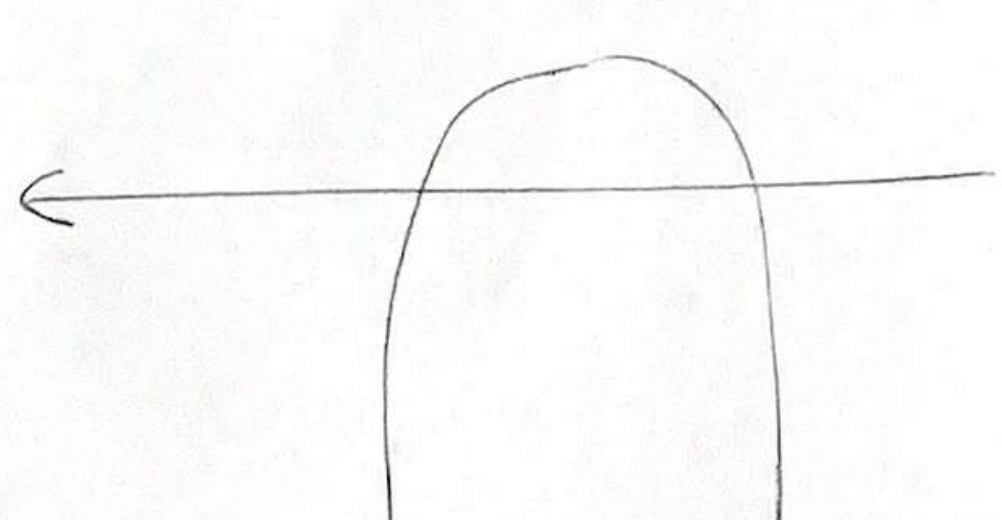
$\frac{vl}{m+v}$

$\frac{vl}{m-v} + v$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{-2021}}$

$a + ba + b^2a + \dots + b^{n-1}a = a(1 + \dots + b^{n-1}) = \frac{a(b^n - 1)}{b-1}$

$1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2022} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$



$A^2 = x + \cancel{2\sqrt{x-1}} + x - \cancel{2\sqrt{x-1}} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)}$

$\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\right)^2 + \left(x - 2\sqrt{x-1}\right)^2$

$x + \cancel{2\sqrt{x-1}} + x - \cancel{2\sqrt{x-1}} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)}$

$2x + 2\sqrt{x^2-4x+4} = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2} = 2x + 2(x-2) =$

$f(f(x)) = 0 \iff f(x) = 0$, если $f(x)$ - моном. возр. функ.

т.е. докажем, что решение ще лежит на промежутке моном. возрастание $f(x)$, т.е. ~~x>-5~~ $x > -5$

$35 \times 13 = 105 + 35 = 455$

$a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_4$

$c_2+c_3+c_4 = d_1+d_2+d_3$

$a_1+b_1+d_1=180$

$c_2+d_2+b_2=180$

$a_3+c_3+d_3=180$

$a_4+b_4+c_4=180$

$a_4+d_2=b_1+c_3$

$a_1+c_2=d_3+b_4$

$\cancel{b_2+c_2=a_4+d_2}$

$d_1+c_4=a_3+b_2$

$a_1+a_3+a_4=b_1+b_2+b_4$

$c_2+c_3+c_4=d_1+d_2+d_3$

$a_1+c_2=b_4+d_3$

$a_3+b_2=d_1+c_4$

$a_4+d_2=b_1+c_3$

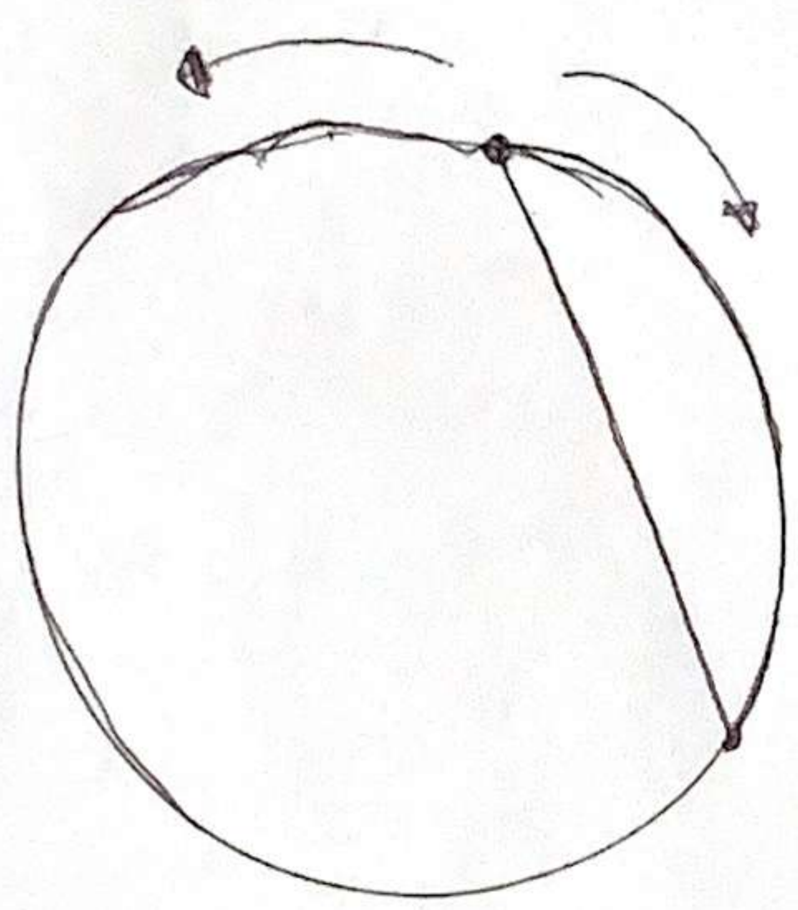
$(a_1+a_3+a_4)+(b_2+c_2+d_2)=\cancel{b_1+b_4}+(d_1+d_3)+c_3+c_4$

$\| \quad \cancel{b_1}+b_2+\cancel{b_4}$

$b_2+b_2+c_2+d_2=d_1+d_3+\underbrace{c_3+c_4}_{=d_1+d_2+d_3-c_2}$

$2b_2+c_2+\cancel{d_2}=d_1+d_3+d_1+\cancel{d_2}+d_3-c_2$

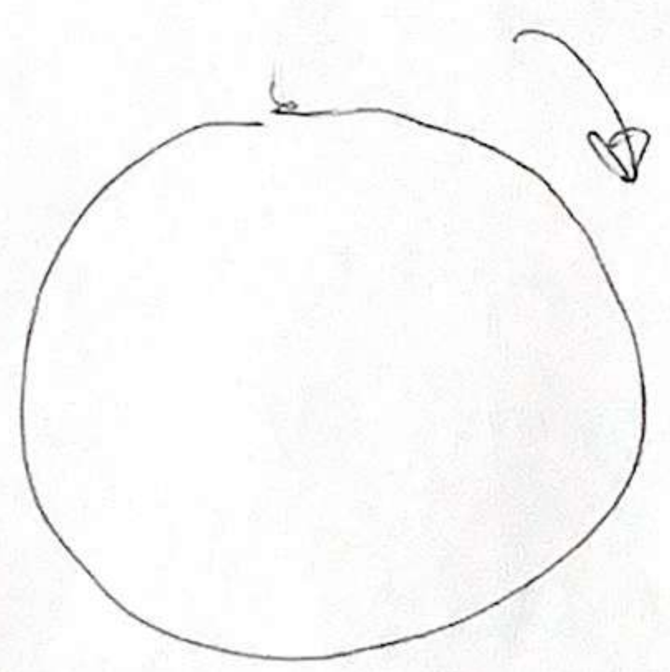
$b_2+c_2=d_1+d_3$



Пусть

$\frac{l}{v_1+v_2}=t$

$\frac{v_1 l}{v_1+v_2}$ - длина дуги, стягив. хорду длиной 4026



$\frac{l}{v_1-v_2}=t$

$\frac{v_1 l}{v_1-v_2}$ - длин

$\frac{l}{v_2}=36$

$\frac{v_1 l}{v_1-v_2}=l-\frac{v_1 l}{v_1+v_2}$

$\frac{v_1}{v_1-v_2}=\frac{\cancel{v_1}+v_2-\cancel{v_1}}{v_1+v_2}$

$v_1(v_1+v_2)=v_2(v_1-v_2)$

$v_1^2+\cancel{v_1v_2}=\cancel{v_1v_2}-v_2^2$

v_1^2+v

$a_1 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_4$

$c_4 + c_3 + c_2 = d_1 + d_2 + d_3$

$a_1 + b_1 + d_1 = 180$;

$= c_2 + d_2 + b_2 = 180$

$a_3 + d_3 + c_3 = 180$

$a_4 + b_4 + c_4 = 180$

$a_1 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_4$

$c_2 + c_3 + c_4 = d_1 + d_2 + d_3$

$a_1 + b_1 + d_1 = 180$

$b_2 + c_2 + d_2 = 180$

$a_3 + c_3 + d_3 = 180$

$a_4 + b_4 + c_4 = 180$

$a_1 = 180 - b_1 - d_1$

$a_3 = 180 - c_3 - d_3$

$a_4 = 180 - b_4 - c_4$

$b_1 + b_2 + b_4 = 180 \cdot 3 - b_1 - b_4 - d_1 - d_3 - c_3 - c_4$

$b_1 + b_2 + b_4 = 540 - (b_1 + b_4) - (d_1 + d_3) - (c_3 + c_4)$

$2S_1 + 2S_2 = 180 \cdot 4$

$S_1 + S_2 = 360$

$c_3 + c_4 = d_1 + d_2 + d_3 - c_2$

$\angle ADC + \angle ABC = \angle DAB + \angle DCB$

$S_1 + S_2 = 360$

$\angle DAB + \angle ADB + \angle ABD + \angle ABC + \angle DAC + \angle ACD$

$(\angle DAB + \angle DAC + \angle CAB) + (ABC + ADB + BDC)$

$\triangle ABC$ и $\triangle BDC$:

$(\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC) + (\angle DBC + \angle DCB + \angle BDC)$

$(\angle ABD + \angle DBC + \angle ABC) + (\angle ACD + \angle DCA + DCB)$