МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Сабиров Роман Ринатович**

Класс: **11**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	5	0	15	5

Чистовик 1 Вариант 210106

Задание 1) $f(1)+f(2)+\ldots+f(11)$ – ?

$f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$

$f(1)+f(2)+\ldots+f(11)=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+9+\ldots+4\cdot11^3+6\cdot11^2+4\cdot11+9=$

$=4(1^3+2^3+\ldots+11^3)+6(1^2+2^2+\ldots+11^2)+4(1+2+\ldots+11)+9\cdot11=4(1+8+\ldots+1331)+$

$+6\cdot\left(\frac{11\cdot(11+1)\cdot(11\cdot2+1)}{6}\right)+4\cdot\frac{11\cdot12}{2}+99=17424+3036+264+99=$

$=20.823$

Ответ: 20.823

Задание 2) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+|y+3|=1\\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1\end{cases}$

$x^2+y-1\geq0$, т.к. у нас есть $\sqrt{x^2+y-1}$

$\Downarrow$

$x^2+y\geq1$

$\Downarrow$

$\sqrt{x^2+y}\geq1$, но у нас $\sqrt{x^2+y}+|y+3|=1$, где $|y+3|\geq0$,

а значит, $\sqrt{x^2+y}\leq1$.

Тогда получаем, что $\sqrt{x^2+y}=1$, $x^2+y=1$.

$|y+3|=1-\sqrt{x^2+y}=0$

$y=-3$

$x^2+y=1$

$x^2-3=1$

$x^2=4$

$x=\pm2$

Подставим во 2 уравнение: $x=2, y=-3: \sqrt{0}+|5|=1$

$5=1$ - ложь

$x=-2, y=3: \sqrt{0}+|1|=1$

$1=1$ - правда

Чистовик 2

Итак, $x=-2$, $y=-3$ - подошло, я объяснил, почему других решений нет.

Ответ: $x=-2$; $y=-3$.

Задание 3) $x^2+bx+a=-1$

$x^2+cx+a=0$

Каждое из 2 уравнений имеет по 2 корня, целых >1, пусть эти корни x_1, x_2, x_3, x_4. ~~Тогда~~ x_1, x_2 - у 1 уравнения

x_3, x_4 - у 2 уравнения

$x^2+bx+(a+1)=(x-x_1)(x-x_2)$

$x^2+cx+a=(x-x_3)(x-x_4)$

} мы можем так сделать, т.к. нам даны приведенные квадратные уравнения.

$\begin{cases} a+1=x_1\cdot x_2 \\ a=x_3\cdot x_4 \end{cases}$

нам нужно найти Min a, очевидно, что $x_3, x_4 \geq 2$, т.к. x_3, x_4 - целые, >1., тогда $a \geq 2\cdot 2=4$, $a\geq 4$. Давайте начнём рассматривать значения a: $a=4$, тогда $a+1=5$, но 5 не представляется в виде произведения двух целых чисел >1, т.к. 5 - простое число. $a=5$, нет, т.к. 5 - простое. $a=6$, тогда $a+1=7$, нет, т.к. 7 - простое, $a=7$, нет, т.к. 7 - простое, и a тогда не представится, как $x_3\cdot x_4$, $a=8$, тогда $a+1=9$, да: пусть $x_3=2$; $x_4=4$; $x_1=3$; $x_2=3$, тогда $a=8$. $x^2+bx+(a+1)=(x-3)^2=x^2-6x+9$

$x^2+cx+a=(x-2)(x-4)=x^2-6x+8$

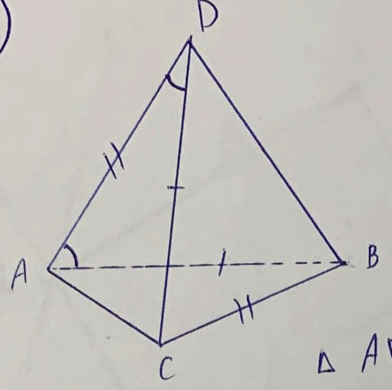
$a=8$, $b=6$, $c=6$.

я объяснил, почему $a\geq 8$, a - целое, т.к. $a=x_3\cdot x_4$, где x_3 и x_4 - целые, >1. $a \geq 4$ А дальше небольшой перебор

Ответ: 8

Чистовик 3

Задача 6)



$\angle DAB + \angle BAC + \angle DAC = 180°$

$AB = CD,\ AD = BC$

$S_{ADC} + S_{DCB} + S_{ADB} + S_{ABC} = S$

S_{BCD} - ?

Решение:

$\triangle ADC = \triangle ABC$ (по 3 сторонам: $AD = BC$, $CD = AB$, AC - общая), значит $\angle BAC = \angle ACD$

$\angle DAB + \angle BAC + \angle DAC = 180°$

$\angle DAB + \angle ACD + \angle DAC = 180°$

$\angle DAB = 180° - \angle ACD - \angle DAC$ $\quad (\angle ACD + \angle DAC + \angle ADC = 180°$, с.у. $\triangle)$.

$\angle DAB = \angle ADC$

$\triangle DAB = \triangle DCA$ по 2 сторонам и $\angle$ между ними: ($\angle DAB = \angle ADC$, $AD = AD$, $DC = AB$), значит $\triangle DAB = \triangle DCA = \triangle ABC$

$\triangle DAB = \triangle DCB$ по 3 сторонам (DB - общая, $BC = AD$, $CD = AB$)

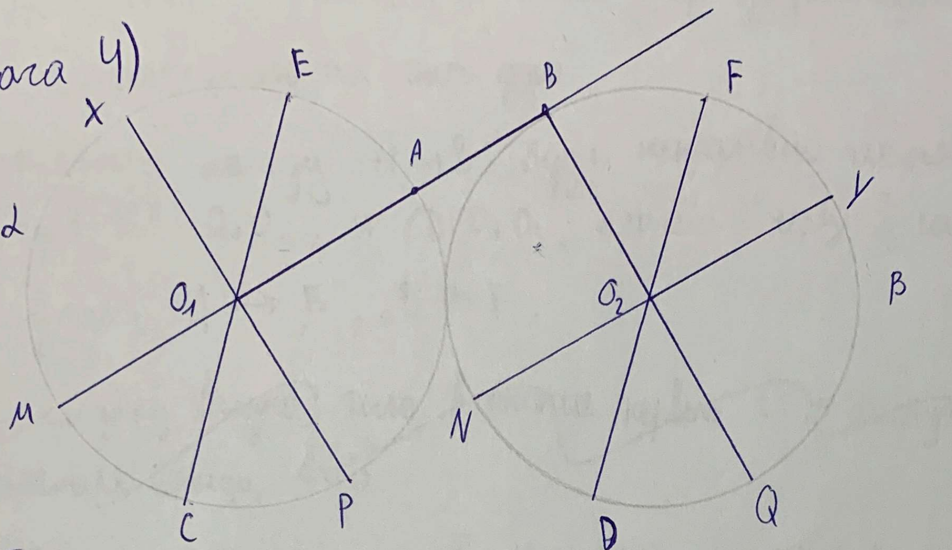
значит $\triangle DAB = \triangle DCB = \triangle DCA = \triangle ABC$, значит и S (площади) этих $\triangle$ равны, заметим, что площадь поверхности пирамиды равна S, тогда $S = S_{DAB} + S_{DCB} + S_{DCA} + S_{ABC} = 4 \cdot S_{BCD}$

$S_{BCD} = \frac{S}{4}$

Ответ: $\frac{S}{4}$

Шишовеек 4

Задача 4)



Первоначально A и B стояли в точках A и B. За 1 час они проходят целую окружность, тогда за ~~полови~~ 30 мин. они пройдут только половину, за 15 минут - четверть, за 22,5 минуты $\frac{3}{8}$ окружности, за 52,5 минуты $\frac{7}{8}$ окружности.

AM и XP $\perp$, BQ и NY $\perp$, тогда через 30 минут A окажется в M, B окажется в Q, через 15 минут A окажется в P, B окажется в N, т.к. вся окружность 360°, а $\angle AO_1P = \angle BO_2Q = 90^\circ$.

Пусть $\angle CO_1P = \angle DO_2Q = 45^\circ$, тогда через $\frac{3}{8}$ часа A окажется в C, B окажется в D, т.к. $\angle CO_1A = \frac{3}{8} \cdot 360^\circ = 135^\circ$, $\angle BO_2D = \frac{3}{8} \cdot 360^\circ = 135^\circ$. то, есть CO_1 - биссектриса $\angle MO_1P$, и O_2D - биссектриса NO_2Q.

$AM \perp BQ$, $NY \perp BQ$, значит $AM \parallel NY$. $\angle(AM, EC) = 135^\circ$, $\angle(NY, FD) = 135^\circ$ (по главной стрелке), ~~AM~~ $AM \parallel NY$, значит $\underset{\text{по г. стр.}}{(EC \parallel FD)}$.

EC - диаметр α, FD - диаметр β, значит $EC = FD$, т.к. $\alpha = \beta$ (радиусы)

CEFD - параллелограм, т.к. $EC = FD$, $EC \parallel FD$. O_1 - середина EC, O_2 - середина FD, тогда по теореме Фалеса $CD = O_1O_2 = EF$, ну или O_1O_2 - средняя линия параллелограмма, а она равна основаниям.

Через $\frac{7}{8}$ часа ~~A~~ A $\to$ E, B $\to$ F, т.к. $\underset{(>180)}{\angle AO_1E} = \frac{7}{8} \cdot 360 = 315^\circ$ и $\angle BO_2F =$

Шиповик 5

$\frac{7}{8} \cdot 360° = 315°$, дуги окружности пропорциональны центральным углам, опирающимся на эти дуги.

Расстояние между A и B будет непрерывно меняться, мы доказали, что $EF = O_1O_2$, и $CD = O_1O_2$, причём через $\frac{3}{8}$ часа $A \to C$, $B \to D$, а через $\frac{7}{8}$ часа $A \to E$, $B \to F$.

~~По рисунку видно~~, что ~~в течение первых~~ 22.5 ~~минуты~~ (~~$\frac{3}{8}$ часа~~) ~~расстояние между А и В~~

Давайте попробуем ещё найти моменты, когда AB = диаметру O_1O_2, сейчас мы нашли только 2 момента для точек (A; B) : (C; D) и ~~от~~ (E; F)
через $\frac{3}{8}$ ч. через $\frac{7}{8}$ ч.

Давайте в самом начале посадим в точку Y автомобиль K, который двигается по часовой стрелке со скоростью = скорости A.

Тогда AK всегда будет равно O_1O_2, т.к. в любой момент времени K будет получено параллельным переносом A на вектор O_1O_2, т.к. A и K первоначально стоят в одинаковых для своих окружностей точках, и двигаются с равными скоростями. ~~К в любой~~: ~~А~~ точка первоначальная A, то же самое, что и точка K для P.

K - всегда симметрична B относительно FD, т.к. они двигаются с равными скоростями в противоположном направлении, и K симметрично B относительно FD, т.к. FD - биссектриса $\angle BO_2Y$.

Я хочу, чтобы $AB = O_1O_2$ (диаметру A или B) = AK в любое время, тогда AB = AK, значит A - лежит на серпере к BK, но серпер KBK - всегда будет FD, т.к. B и K всегда симметричны относительно FD.
(кроме случаев в F и D, но они уже разобраны)

но FD не пересекает C_1, а значит больше такого не будет, что AB = ~~до~~ диаметру A или B.

Чистовик ~~№~~ 6

AB - непрерывно меняется, AB = диаметру & мы получим дважды, значит в промежутке для точке A, между EC в одной половине AB > диаметр, в другой половине AB < диаметр. Значит ровно 30 минут AB > диаметр

Ответ: 30 минут

б) Нам дан Δ, мы хотим поместить Δ в окружность, так, чтобы ~~это~~ S этой окружности была Min, тогда эта окружность должна быть описанной окружностью нашего Δ, т.к. иначе мы будем уменьшать наш радиус непрерывно до тех пор, пока не получим, что все 3 вершины Δ лежат на окр. S напрямую зависит от r, поэтому S новой окружности будет меньше.

Аналогично для ~~вписанной окружности~~, треугольника подобного данному, но S будет Min, если окружность будет вписана в него, доказывается аналогичными рассуждениями

Чистовик №7

$$(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2011} = n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot7\cdot11}$$

Давайте объясним, почему найдутся такие натуральные m, n, k, l

найдутся давайте раскроем скобки, мы получим 3^{2011} слагаемых вида $\sqrt{5}^a\cdot\sqrt{7}^b\cdot\sqrt{11}^c = \sqrt{5^a\cdot7^b\cdot11^c}$, где $a+b+c=2011$, причем слагаемых каждого вида будет ~~целое~~ натуральное число. Пусть слагаемых вида $\sqrt{5^a\cdot7^b\cdot11^c}$ – было k, тогда мы получим 1 большое слагаемое: $k\sqrt{5^a\cdot7^b\cdot11^c}$, $a+b+c=2011$, значит среди a, b, c – либо ~~все четные~~ 1-нечетное и 2-четных, либо все нечетные.

1 случай: не умаляя общности, a-нечетное, b и c - четные, тогда
$a=2x+1$, $b=2y$, $c=2z$

$k\sqrt{5^a\cdot7^b\cdot11^c} = k\sqrt{5^{2x+1}\cdot7^{2y}\cdot11^{2z}} = 5^x\cdot7^y\cdot11^z\cdot k\sqrt{5}$, где $5^x\cdot7^y\cdot11^z\cdot k$ - натуральное.

2 случай: $a=2x+1$, $b=2y+1$, $c=2z+1$.

$k\sqrt{5^a\cdot7^b\cdot11^c} = k\sqrt{5^{2x+1}\cdot7^{2y+1}\cdot11^{2z+1}} = 5^x\cdot7^y\cdot11^z\cdot k\sqrt{5\cdot7\cdot11}$, где $5^x\cdot7^y\cdot11^z\cdot k$ - ~~целое~~ натуральное, таким образом, коэффициенты перед $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{5\cdot7\cdot11}$ - будут представляться в виде суммы натуральных чисел, а значит n, m, k, l - натуральные.

Черновик 8

$f(1)+f(2)+\dots+f(11)$

$f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$

$f(1)=$

-4

$27 \times 4 = 108$

$108 + 54 = 162$

$162 + 12 = 174$

$174 + 9 = 183$

60

96

6

$256 + 96 = 352$

$352 + 16 = 368$

$500 + 150 = 650$

676

$216 \times 4 = 864$

$864 + 216 = 1080$

1104

$49 \times 6 = 294$

121

$1331 \times 4 = 5324$

$5324 + 726 = 6050$

$121 \times 6 = 726$

6094

6113

$4n^3+6n^2+4n+9$

$2n(2n^2+3n+2)+9$

$64 \cdot 8 = 512$

$4 \cdot 512 \quad 2048$

$64 \times 6 = 384$

$2048 + 384 = 2432$

$2432 + 32 = 2464$

$2464 + 9 = 2471$

$81 \times 6 = 486$

$729 \times 4 = 2916$

$2916 + 486 = 3402$

$3402 + 36 = 3440$

$3440 + 9$

$343 \times 4 = 1372$

$1372 + 294 = 1666$

$1666 + 28 = 1694$

$1694 + 9 = 1703$

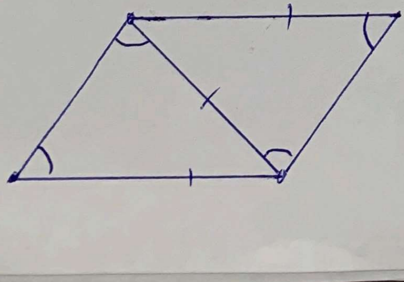
$\sqrt{5a \cdot 7b \cdot 11c}$

$m\sqrt{7} + k\sqrt{11}$

$S \cdot \sqrt{5a \cdot 7b \cdot 11c} = S \cdot \sqrt{5^{2a} \cdot 7^{2b} \cdot 11^{2c+1}} = S \cdot 5^a \cdot 7^b \cdot 11^c \cdot \sqrt{11}$

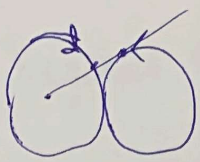
$\cancel{S \cdot \sqrt{5^{2a} \cdot 7^{2b+1} \cdot 11^{2c}} = S \cdot 5^a \cdot 7^b \cdot 11^c \cdot \sqrt{7}}$

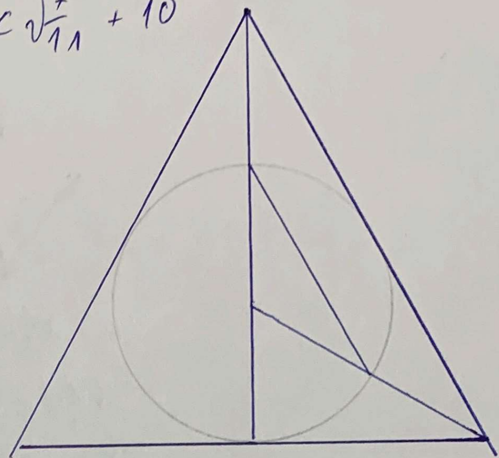
$S \cdot \sqrt{5^{2a} \cdot 7^{2c+1} \cdot 11^{2b}} = S \cdot 5^a \cdot 7^c \cdot 11^b \cdot \sqrt{7}$

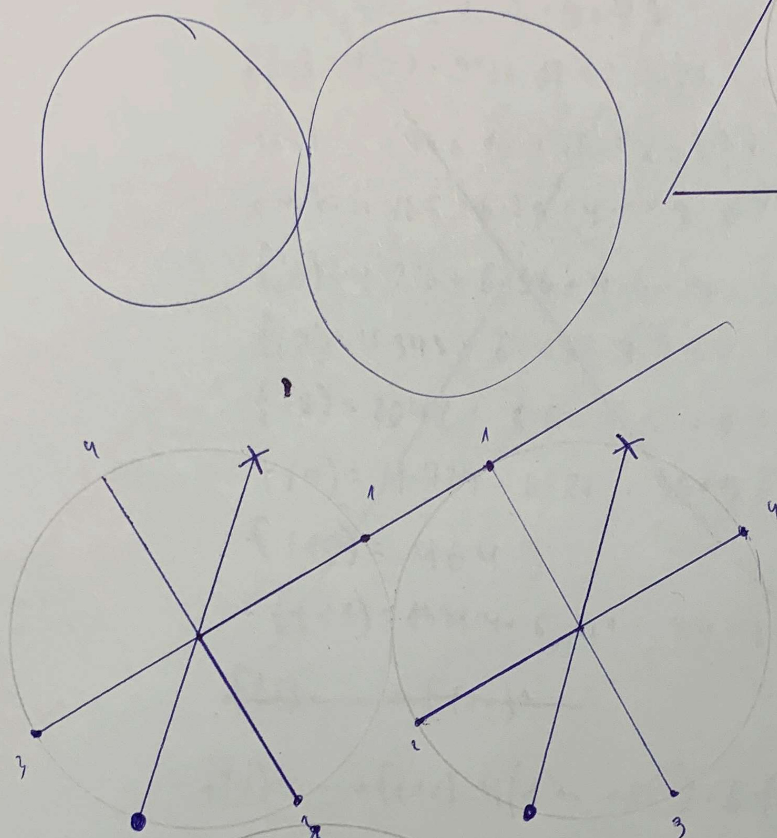


Черновик 9

$\sqrt{\frac{7}{11}} < \frac{k}{m} < \sqrt{\frac{7}{11}} + 10^{-500}$





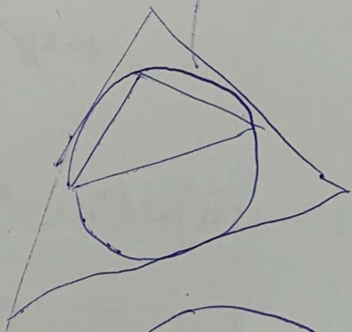


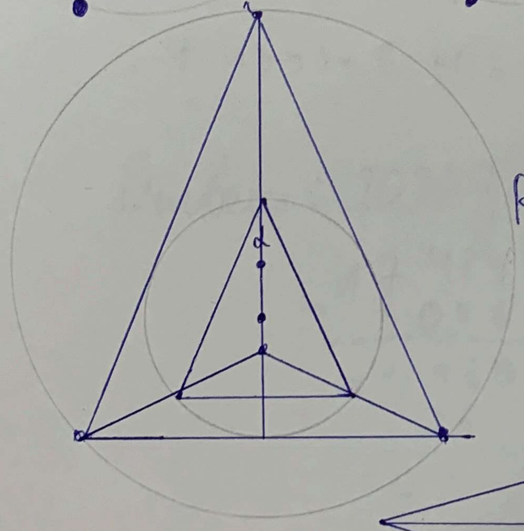
$\sqrt{5 \cdot a \cdot 7 \cdot b \cdot 11 \cdot c}$

$b = 11k + 1$

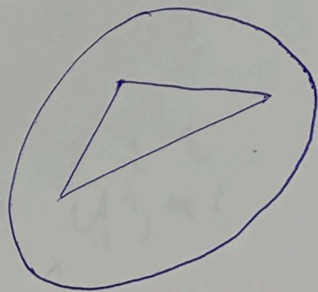
$x \cdot 3x = (x+y)^2$

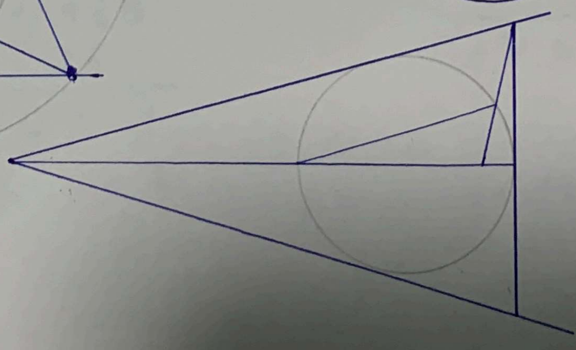
$3x^2 =$





$R = \frac{S}{4abc}$





~~Чистовик~~ Черновик 10

Задача 1) $f(1)+\ldots+f(11)$

$f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$

$f(1)=4+6+4+9=23$

$f(2)=32+24+8+9=73$

$f(3)=4\cdot 27+54+12+9=183$

$f(4)=4\cdot 64+6\cdot 16+16+9=377$

$f(5)=4\cdot 125+6\cdot 25+4\cdot 5+9=679$

$f(6)=4\cdot 216+6\cdot 36+4\cdot 6+9=1113$

$f(7)=4\cdot 343+6\cdot 49+4\cdot 7+9=1703$

$f(8)=2048+6\cdot 64+32+9=2471$

$f(9)=4\cdot 729+6\cdot 81+36+9=3449$

$f(10)=4649$

$f(11)=1331\cdot 4+6\cdot 121+44+9=6113$

$\cancel{f(1)+\ldots+f(11)}$

$f(1)+\ldots+f(11)=4(1^3+\ldots+11^3)+6\cdot(1^2+\ldots+11^2)+4(1+2+\ldots 11)+9\cdot 11=$

$=4\cdot 4352+6\cdot 506+4\cdot 66+99=20.807$

Ответ: 20.807

$$\begin{array}{r} 17424 \\ +\ 3036 \\ \hline 20460 \\ +\ 264 \\ \hline 20724 \\ 20823 \end{array}$$

16

$$\begin{array}{r} 4356 \\ \times\ 4 \\ \hline 17424 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 253 \\ \times\ 12 \\ \hline 506 \\ 253 \\ 3036 \end{array}$$

$2\cdot 11\cdot 12$

$132\cdot 2=$

$=264$

$11\cdot 12\cdot 23$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 253 \end{array}$$

Черновик 11

~~11~~, ~~10~~, ~~9~~, ~~8~~, ~~7~~, ~~6~~, ~~5~~, ~~4~~, ~~3~~, 2, 1

$$\begin{array}{r} 1331 \\ +1000 \\ \hline 2331 \\ +729 \\ 3060 \\ +512 \\ 3572 \\ +343 \\ 3915 \\ +216 \\ 4131 \\ +125 \\ 4256 \\ +64 \\ 4320 \\ +27 \\ 4347 \\ +4 \\ \hline 4351 \\ +1 \\ \hline 4352 \\ \times 4 \\ \hline 17408 \\ +3036 \\ \hline 20444 \\ +264 \\ \hline 20708 \\ +99 \\ \hline 20.807 \end{array}$$

$$1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2 = 1+4+9 = 14$$

$$\cancel{\frac{3\cdot 2\cdot 5}{6}}$$

$$\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6}$$

$$\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6} = 11\cdot 23\cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 506 \\ \times 6 \\ \hline 3036 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 66 \\ \times 4 \\ \hline 24 \\ 24 \\ 264 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 253 \\ \times 2 \\ \hline 506 \end{array}$$

$$\frac{11\cdot 12}{2} = 66$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$\begin{array}{r} 1 \\ +8 \\ \hline 9 \\ +27 \\ \hline 36 \\ +64 \\ \hline 100 \\ +125 \\ 225 \\ +216 \\ 441 \\ +343 \\ 784 \\ +512 \\ 1296 \\ +729 \\ 2025 \\ +1000 \\ 3025 \\ +1331 \\ 4356 \end{array}$$

Черновик 12

a, b, c

$x^2+6x+a=-1$ $\quad x_1, x_2$ $\qquad 4$

$x^2+cx+a=0$ $\quad x_3, x_4$

$\cancel{x^2+6x+4=-1}$ $\qquad \cancel{x^2+cx+4=0}$

$\cancel{x^2+6x+5=0}$ $\qquad \cancel{x^2+cx+4=0}$

$x^2+6x+(a+1) = (x-x_1)(x-x_2)$

$x^2+cx+a = (x-x_3)(x-x_4)$

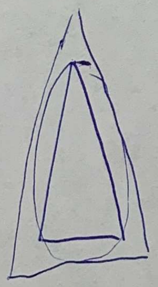
$a+1 = x_1 \cdot x_2$ $\qquad 5\ 6\ 7\ 8\ \boxed{10}$

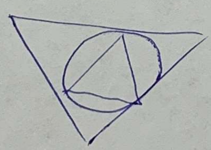
$a = x_3 \cdot x_4$ $\qquad 4\ 5\ 6\ 7\ \boxed{9}$

$\sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1$ $\qquad x^2+y-1 \geq 0$

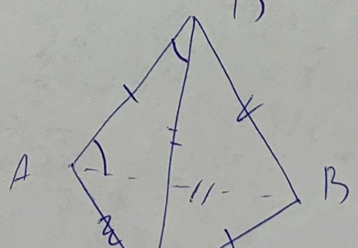
$\sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1$ $\qquad x^2+y \geq 1$

$\qquad \sqrt{x^2+y} \geq 1$





x^2+y



$\angle DAC + \angle CAB + \angle DAB = 180^\circ$

$\angle DAC + \angle ACD + \angle DAB = 180^\circ$

ЗРЦ

$\angle DAB = \angle ADC$

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников „Ломоносов"
Ректору МГУ имени М. В. Ломоносова
академику В. А. Садовничему
ученика 11 класса МОУ СОШ №5 УИМ
Сабирова Романа Ринатовича.

апелляция

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (70) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что 1, 2, 4, 6 задачи решены абсолютно верно, в 3 задаче допущена маленькая ошибка из-за различных корней уравнения, что в условии задаче не сказано, в 5 задаче приведены верные рассуждения о положении треугольника и окружности, в 7 задаче правильно доказано представление в виде линейной комбинации и представлены некоторые оценки коэффициентов

01.04.2021

Р. Саб