МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Савкин Степан Александрович**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	0	15

Чистовик

№1 1) Пусть: $f(x)=t$, $f(t)=m$, $f(m)=n$, $f(n)=q$

Тогда: $f(q)=0 \Rightarrow q^2+6q+6=0$

$(q+3)^2-3=0$

$q=-3\pm\sqrt{3}$

2) $n^2+6n+6=q$

$(n+3)^2-3=-3\pm\sqrt{3}$

$(n+3)^2=\pm\sqrt{3}$

$(n+3)^2=\sqrt{3}$ (т.к. $-\sqrt{3}<0$)

$n=-3\pm\sqrt[4]{3}$

3) $(m+3)^2-3=-3\pm\sqrt[4]{3}$

$(m+3)^2=\pm\sqrt[4]{3}$

$(m+3)^2=\sqrt[4]{3}$ (т.к. $-\sqrt[4]{3}<0$)

$m=-3\pm\sqrt[8]{3}$

4) $(t+3)^2=\pm\sqrt[8]{3}$

$t=-3\pm\sqrt[16]{3}$

5) $(x+3)^2-3=-3\pm\sqrt[16]{3}$

$x=-3\pm\sqrt[32]{3}$

Ответ: $x=-3\pm\sqrt[32]{3}$

№2 1) Число x образовано из геом. прогр., где $b_1=4$, $q=\frac{1}{2}$

если бы эта прогрессия была бесконечна, то её сумма

была бы: $\frac{b_1}{1-q}=8$, но она конечная $\Rightarrow x<8 \Rightarrow 8-x>0$

2) Пусть $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=a\geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=x+4\sqrt{x-4}+2\sqrt{x^2-16(x-4)}+x-4\sqrt{x-4}$

$a^2=2x+2\sqrt{x^2-16x+64}=2x+2\sqrt{(x-8)^2}=2x+2|x-8|$

$a^2=2x-2x+16=16 \Rightarrow a=4$ (т.к. $a\geqslant 0$)

Ответ: 4

№3 1) $P(x)=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

$P(-1)=-1+A-B+C-D+E=11$

$P(1)=1+A+B+C+D+E=21$

$P(-1)+P(1)=2A+2C+2E=32$

$A+C+E=16$

$P(1)-P(-1)=2+2B+2D=10$

$B+D=4$

…новых

Все числа натуральные и целые, осуществим перебор

$B + D = 4$

$B = 1 \quad D = 3$

$B = 2 \quad D = 2$

$B = 3 \quad D = 1$

Всего 3 варианта

4) $A + C + E = 16$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{lll} A=1 & C=1 & E=14 \\ & \dots & \\ A=1 & C=14 & E=1 \end{array}\right\} 14 \text{ вар.} \\ \left.\begin{array}{lll} A=2 & C=1 & E=13 \\ & \dots & \\ A=2 & C=13 & E=1 \end{array}\right\} 13 \text{ вар.} \\ \quad \vdots \\ \left.\begin{array}{lll} A=14 & C=1 & E=1 \end{array}\right\} 1 \text{ вар.} \end{array}\right\} 14 \text{ вар.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum = \frac{14+1}{2} \cdot 14 = 15 \cdot 7 = 105$ – вариантов

5) Всего: $3 \cdot 105 = 315$ Ответ: 315

№7 1) 1-ым ходом Аня убирает 2021 зелёный камень, остаётся 2021 красный и 1 зелёный

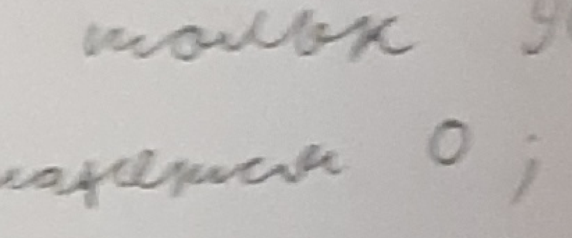
2) Как только Петя уберет последний зелёный камень, то их останется 0; 0 делится на любое число ⇒ Аня может забрать все оставшиеся камни и выиграть

3) Следующим ходом Петя сможет взять или зелёный или красный, если возьмёт зелёный, то следующим ходом Аня выиграет, если нет, то Ане нужно будет убрать один красный камень, чтобы Петя не смог гарантированно выиграть

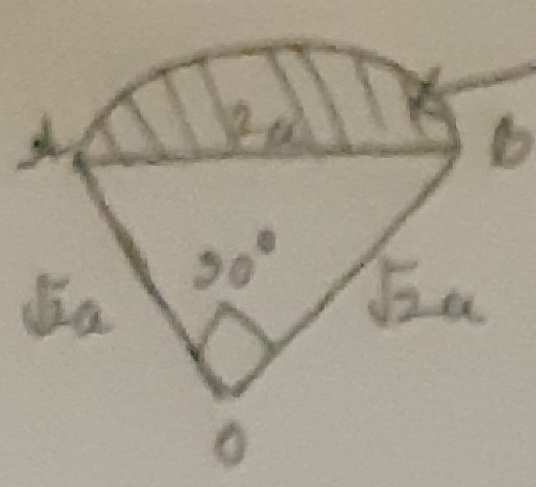
4) Пункт 3 будет повторятся пока Петя не возьмёт зелёный ⇒ проиграет или не останется 1 красный и 1 зелёный камень, тогда какой бы камень Петя не взял, последний камень возьмёт Аня

Ответ: Аня

№5 1) Пусть сторона квадрата – a, тогда при окончании площадь будет состоять из $\overset{(n+1)}{\vee}$ квадратов, n сегментов над $\times$ 2-мя квадратами и вычесть площадь пересечения 2-ух сегментов (таких площадей $(n-1)$)



2) $S_{\text{квадрата}} = a^2$

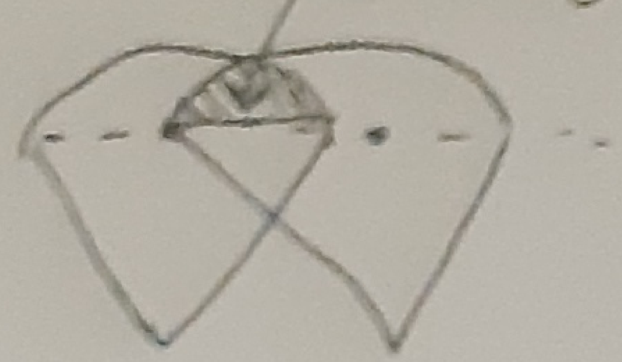
3) 

$S_{\text{сегмента}}$

Чистовик

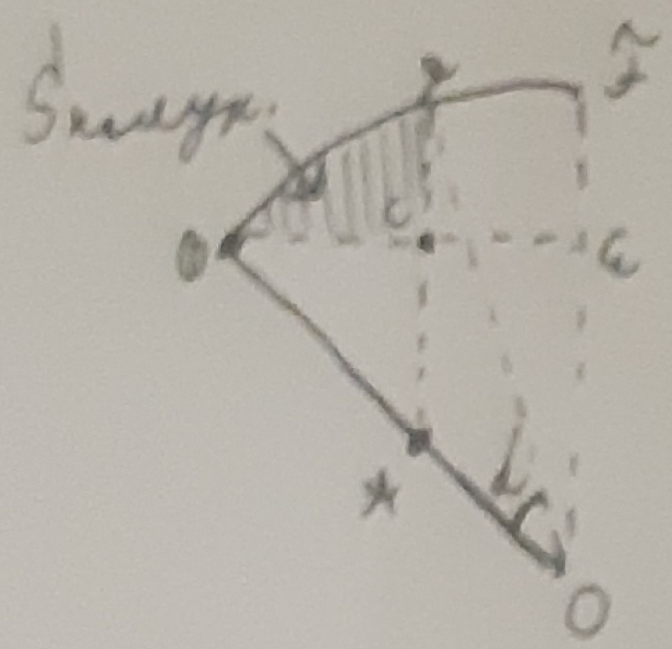
$S_{\text{сегмента}} = \pi(\sqrt{2}a)^2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\sqrt{2}a)^2 = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 = \frac{(\pi-2)a^2}{2}$

4) $S_{\text{пересечения}}$



$S_{\text{пересечения}} = 2S_{\text{полупересечения}}$

$S_{\text{полуп.}}$



$BA = AO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; $BC = CA = \frac{a}{2}$

$DO = \sqrt{2}a$; $\angle DAB = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAO = 135°$; $DA = x > 0$

По т. cos: $DO^2 = DA^2 + AO^2 - 2\,DA \cdot AO\cos 135°$

$2a^2 = x^2 + \frac{a^2}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2a^2 = x^2 + \frac{a^2}{2} + ax$

$x^2 + ax - \frac{3a^2}{2} = 0$

$2x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$

$D' = a^2 + 6a^2 = 7a^2$

$x = \frac{\sqrt{7}a - a}{2} = \frac{(\sqrt{7}-1)a}{2} \Rightarrow$

По т. sin:

$\frac{DA}{\sin\alpha} = \frac{DO}{\sin 135°} \Rightarrow \frac{(\sqrt{7}-1)a}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}a \cdot 2}{\sqrt{2}}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$

$S_{BDO} = \pi(\sqrt{2}a)^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = a^2 \cdot \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4}$

5) $S_{\text{полуп.}} = S_{BDO} - S_{BCA} - S_{ODA} = a^2 \cdot \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \sqrt{2}a \cdot \sin\alpha =$
$= a^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{7}-1}{8}\right)$

6) $S_{\text{пересечения}} = 2a^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{7}-1}{8}\right)$

7) $S_{\text{окончательн}} = (n+1)S_{\text{квадр}} + nS_{\text{сегмента}} - (n-1)S_{\text{пересеч}} =$
$= (n+1)a^2 + n\frac{(\pi-2)a^2}{2} - (n-1) \cdot 2a^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{7}-1}{8}\right)$

8) $S_{01} - S_{02} = a_1^2\left((n_1+1) + n_1\frac{\pi-2}{2} - (n_1-1)\left(\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{7}-1}{8}\right)\right) - a_2^2\left(n_2+1+n_2\frac{\pi-2}{2} -\right.$
$\left.- (n_2-1)\left(\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{7}-1}{8}\right)\right)$, где $a_1 = 1$; $n_1 = 4$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $n_2 = 13$

Черновик

$f(x) = x^2 + 6x + 6 = 0$

$x^2 + 6x + 9 - 3 = 0$

$(x+3)^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3} - 3$

$x = -\sqrt{3} - 3$

2. $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$

$ab = \sqrt{x^2 - 16x + 64} = \sqrt{(x-8)^2} = 8 - x$

$b_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3. $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$P(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 11$

$P(1) = 1 + A + B + C + D + E = 21$

$2A + 2C + 2E = 32$

$A + C + E = 16$

$-2 - 2B - 2D = -10$

$-2B - 2D = -8$

$B + D = 4$

$B = 1 \quad D = 3$

$B = 2 \quad D = 2$

$B = 3 \quad D = 1$

A	C	E	
1	1	14	14
1	2	13	
1	3	12	
1	14	1	
2	1	13	13
2	13	1	
3	1	12	12
3	12	1	
14	1	1	1

$\Sigma = \frac{14+1}{2} \cdot 14 = 15 \cdot 7$

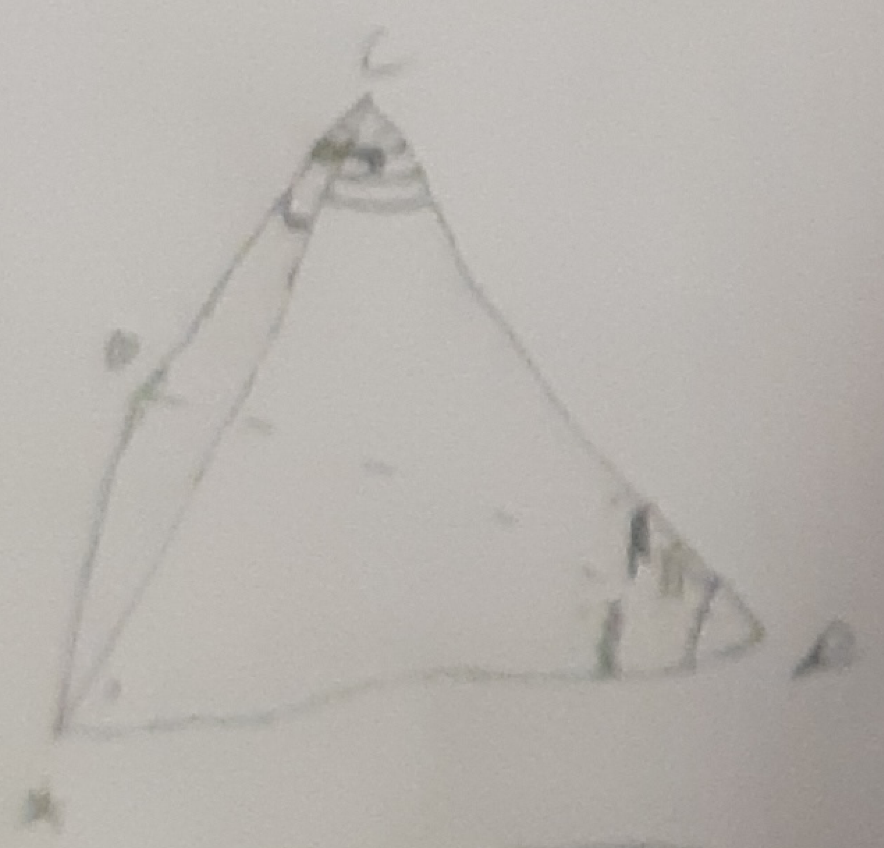
Ответ: $15 \cdot 7 \cdot 3$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

$b = 1 \quad q = \frac{1}{2}$

$\Sigma = 2 \Rightarrow \Sigma = \frac{b}{1-q}$

6



$\angle CAD + \angle BAD + \angle CAD = \angle ABC + \angle BAC$

$\angle BCA + \angle ACD + \angle DCB$

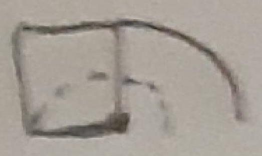
$\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a}$

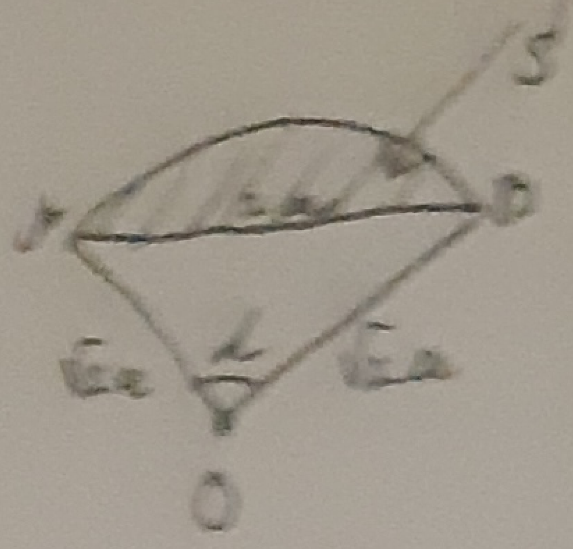
$\frac{\sqrt{17}-1}{2\sin\varphi} = 2$

$\sin\varphi = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$

$\cos\varphi = \sqrt{1 + \dots}$

5. Черновик



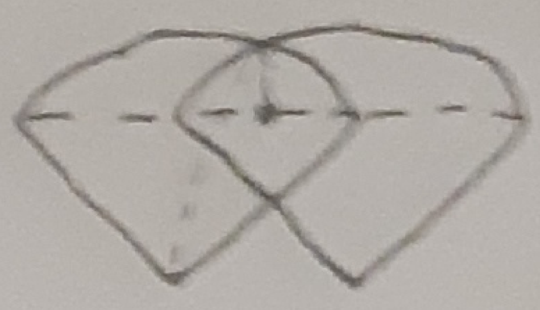


$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos\alpha$

$4a^2 = 2a^2 + 2a^2 \Rightarrow \alpha = 90° \Rightarrow$ $\pi(\sqrt{2}a)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi a^2}{2}$

$S_{AOB} = (\sqrt{2}a)^2 \cdot \frac{1}{2} = a^2$

$S = \frac{(\pi-2)a^2}{2}$



$b_1 = 4 \quad q = \frac{1}{2} \quad n = 2024$ $\Sigma = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

2

1

$\Sigma_1 = 4$ $\Sigma_2 = \frac{4\cdot(1-\frac{1}{4})}{\frac{1}{2}} = \frac{4\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{8\cdot 3}{4} = 6$

$\Sigma_3 = \frac{4\cdot\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}} = 7$

N2

$(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})^2 = x+4\sqrt{x-4} + x - 4\sqrt{x-4} + 2\sqrt{(x-8)^2} = 2x + 2(8-x) =$

$= 16 \Rightarrow 4$

N1

$x^2+6x+6=0$ $f(x)=t;\ f(t)=m;\ f(m)=n;\ f(n)=q$

$D' = 9-6=3$ $f(q)=0 \Rightarrow q = -3\pm\sqrt{3}$

$x = -3\pm\sqrt{3}$

$n^2+6n+6 = -3+\sqrt{3}$ $n^2+6n+6 = -3-\sqrt{3}$

$n^2+6n+9-\sqrt{3}=0$ $n^2+6n+9+\sqrt{3}=0$

$D' = 9-9+\sqrt{3}=\sqrt{3}$ $D' = 9-9-\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$n = -3\pm\sqrt[4]{3}$

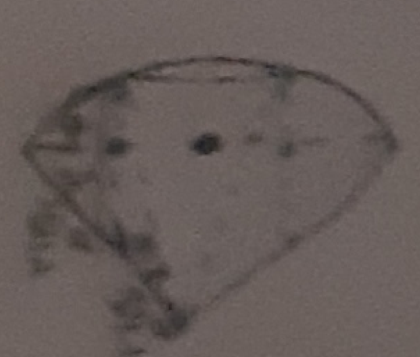
$(q-3)^2-3=0$

$m^2+6m+6 = -3+\sqrt[4]{3}$

$m^2+6m+9-\sqrt[4]{3}=0$ 2021 2020

$D' = 9-9+\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

$m = -3\pm\sqrt[8]{3} \Rightarrow t = -3\pm\sqrt[16]{3} \Rightarrow x = -3\pm\sqrt[32]{3}$



$(\sqrt{2}a)^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 + x^2 - 2\frac{\sqrt{2}a}{2}x\cos 135°$

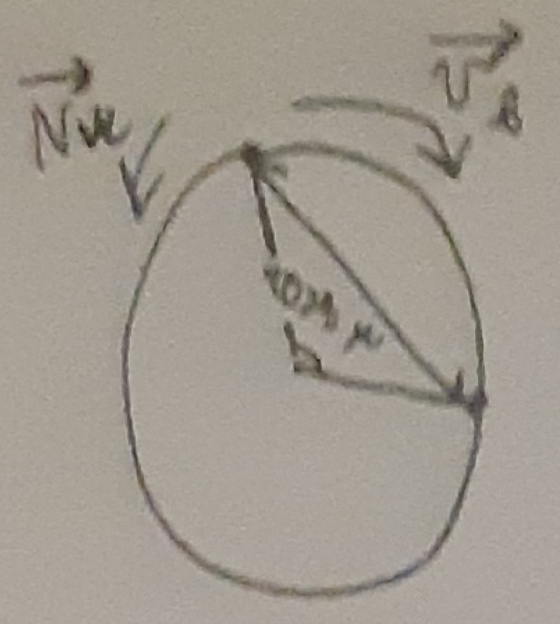
$2a^2 = \frac{a^2}{2} + x^2 + ax \Rightarrow x^2+ax-\frac{3a^2}{2}=0$ $D = a^2+6a^2 = 7a^2$

$2x^2+2ax-3a^2=0$ $x = \frac{-a\pm\sqrt{7}a}{2}$

5

Черновик

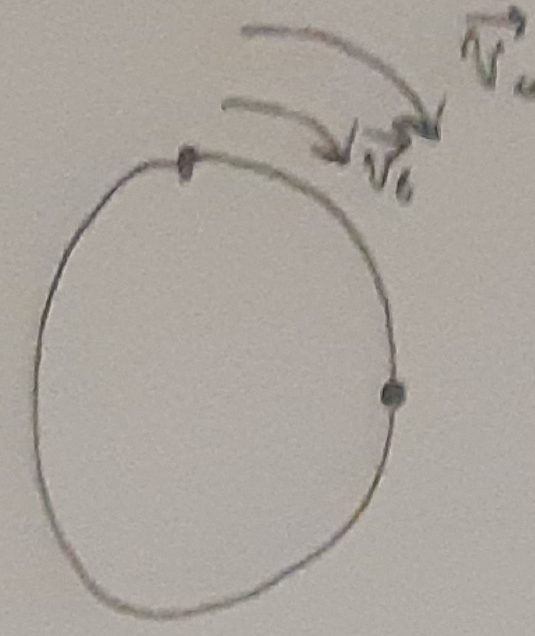
$T_ж = 38$ мин $\Rightarrow V_ж = \frac{2\pi R}{T_ж}$



$$\left(\frac{2\pi R}{T_ж} + \frac{2\pi R}{T_б}\right) t_1 = 2\pi R$$

$$\frac{1}{T_ж} + \frac{1}{T_б} = \frac{1}{t_1}$$

2)



$$\left(\frac{2\pi R}{T_ж} - \frac{2\pi R}{T_б}\right) t_2 =$$

$$\frac{2\pi R}{T_ж} \cdot t_2 - 2\pi R = \frac{2\pi R}{T_б} \cdot t_2$$

$$\frac{t_2}{T_ж} - 1 = \frac{t_2}{T_б}$$

$$\frac{1}{T_ж} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{T_б} \Rightarrow \frac{1}{T_ж} - \frac{1}{T_б} = \frac{1}{t_2}$$

$$\frac{2}{T_ж} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$

$\angle CAD + \angle ACD + \angle CAB + \angle BCA + \angle DAB + \angle DCB = \angle DBC + \angle CAD - \cancel{\angle BDA} + \cancel{\angle BDA} + \angle ABC + \angle CDA$

$360^\circ - \angle CDA - \angle ABC + \angle DAB + \angle DCB = 360^\circ - \angle DCB - \angle DAB + \angle ABC + \angle CDA$

$\angle DCB + \angle DAB = \angle ABC + \angle CDA$

$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{7}-1}{2\sin\beta} = 2$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \cancel{\frac{8-2\sqrt{7}}{4}}} = \sqrt{\frac{4 - 8 + 2\sqrt{7}}{4}} = \sqrt{\cancel{\frac{2\sqrt{7}-4}{4}}}$$

$$S_р = \pi(\sqrt{2}a)^2 \cdot \frac{\arcsin\beta}{2\pi} = 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{7}-1}{4} \arcsin\beta$$

$$S_Δ = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}-1}{4} = \frac{a^2(\sqrt{7}-1)}{8}$$

$$S_ж = a^2\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right) - \frac{\sqrt{7}-1}{8}\right)$$

$$S_ж = 2a^2\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right) - \frac{\sqrt{7}-1}{8}\right)$$